

Andrzej WITKOWSKI

WYBÓR METODY ANALIZY PRZEPŁYWU W KANAŁACH MIĘDZYŁOPATKOWYCH  
STOPNIA SPRĘŻAJĄCEGO

**Streszczenie.** W pracy przeprowadzono analizę zakresu stosowalności metod analizy przepływu w kanałach międzyłopatkowych stopni maszyn wirnikowych o dowolnym kształcie przekroju merydionalnego, w warunkach przepływu ściśliwego, poddźwiękowego i lokalnie naddźwiękowego. Przyjęto quasitrójwymiarowy model przepływu izentropowego bez występowania fal uderzeniowych. Przedstawiono wstępny algorytm przepływu przydźwiękowego dla koła wirnikowego osiowopromieniowej sprężarki.

Zestawienie oznaczeń

- $a_i$  - współczynniki w równaniu (12),  
 $c$  - prędkość przepływu w układzie bezwzględnym,  
 $h_1, h_2, h_3, h_4$  - odległości między sąsiednimi węzłami siatki (równ. 11),  
 $i$  - entalpia statyczna czynnika,  
 $k_0$  - wyraz wolny w równaniu (12),  
 $m$  - odległość mierzona wzdłuż linii prądu w przekroju merydionalnym wieńca łopatkowego,  
 $M$  - liczba Macha,  
 $n$  - liczba węzłów siatki w metodzie różnicowej,  
 $\Delta n$  - grubość strugi w przekroju merydionalnym,  
 $p$  - ciśnienie statyczne,  
 $r$  - promień mierzony od osi obrotu, współrzędna,  
 $x, y$  - współrzędne,  
 $r_k$  - promień krzywizny linii prądu,  
 $S; T$  - parametry równania (27),  
 $T$  - temperatura bezwzględna,  
 $t$  - czas,  
 $\beta$  - kąt między kierunkiem prędkości względnej a rzutem osi maszyny w płaszczyźnie stycznej do powierzchni prądu,  
 $\delta$  - kąt między styczną do linii prądu w przekroju merydionalnym a osią obrotu,  
 $V^\theta$  - współrzędna kątowna,  
 $\Psi$  - funkcja prądu,  
 $\lambda$  - zawirowanie strugi,

- $\kappa$  - wykładnik adiabaty,  
 $\varrho$  - gęstość czynnika,  
 $\omega$  - prędkość kątowna.

### Wskaźniki

- 1 - dotyczy wlotu,  
 2 - dotyczy wylotu,  
 j - kolejny numer iteracji,  
 kr - warunki krytyczne,  
 m - składowa merydionalna w kierunku osi m,  
 n - składowa w kierunku osi n,  
 r - składowa promieniowa,  
 x, y - składowe w kierunkach osi x, y,  
 $\psi$  - składowa obwodowa.

### 1. Wstęp

Współczesne metody obliczeń aerodynamicznych wieńców łopatkowych maszyn przepływowch sprowadzają się do szukania związków pomiędzy charakterem rozkładu prędkości i ciśnień wzdłuż ścianek ograniczających kanał międzyłopatkowy, a narastaniem warstwy przyściennej z jednej strony oraz wielkością strat tarcia występujących w przepływie z drugiej strony [1], [2]. Zważywszy, że rozkład prędkości i ciśnień na powierzchni łopatki, a tym samym jej obciążenie aerodynamiczne zależne jest od punktu pracy maszyny, znajomość związku pomiędzy grubością warstwy przyściennej, a wielkością strat stwarza możliwość opracowania w dalszej kolejności metody obliczeniowej wyznaczania charakterystyk aerodynamicznych wieńców łopatkowych zarówno w obliczeniowym jak i pozaobliczeniowych punktach jej charakterystyki [3], [4].

Warunkiem wstępnym i koniecznym przystąpienia do bardziej zaawansowanych obliczeń przepływu przez stopnie maszyn wirnikowych jest opracowanie efektywnych metod wyznaczania rozkładów prędkości i ciśnień w kanałach międzyłopatkowych i na powierzchni łopatek. Problemowi obliczeń quasitrójwymiarowego przepływu płynu nielepkiego przez przestrzenne kanały międzyłopatkowe sprzężających kół wirnikowych, z wykorzystaniem metod opartych o pojęcie "krzywizny linii prądu", poświęcone były wcześniejsze prace autora [5], [6], [7]. Przepływ trójwymiarowy zastępowany był tam, podobnie jak w szeregu innych prac [8], [9], kolejno dwoma dwuwymiarowymi przybliżeniami ustalonego przepływu względnego. W niniejszej pracy przeprowadzono analizę metod rozwiązywania drugiego zagadnienia dwuwymiarowego, poświęconego badaniu przepływu na osiowosymetrycznych powierzchniach prądu wyznaczonych przez rozwiązanie pierwszego zagadnienia dwuwymiarowego [10]. W szczególności, w związku z występowaniem w wysokoobciążonych sprzężarkach osiowopromieniowych, służących na przykład do wysokiego doładowania silników

spalinowych, lokalnych prędkości naddźwiękowych, zwrócono uwagę na możliwość opracowania metody uniwersalnej, dogodnej do analizy przepływu przydźwiękowego [11].

W tym celu poddano analizie dwie metody: metodę oparą o równanie funkcji prądu [12] rozwiązywane metodą różnic skończonych [13] oraz równanie wyprowadzone z warunków równowagi przepływu w kierunku obwodowym [6], [8].

## 2. Wybór metody

Klasyczną metodą badania opływu nieściśliwego palisad łopatkowych jest metoda odwzorowania konforemnego. Nie znalazła ona jednakże szerszego zastosowania poza przypadkami, gdy wykorzystywana jest do sprawdzenia dokładności rozwiązań numerycznych [14].

Bardziej użyteczne w badaniu przepływu nieściśliwego są metody punktów osobliwych, w których łopatki są zastępowane przez rozkłady źródeł i upustów. Sukces tej metody zależy jednakże od przyjęcia właściwego obrazu przepływu na krawędzi spływowej łopatki [14].

W przypadku przepływu ściśliwego niewirowego i ustalonego w kanałach międzyłopatkowych, najbardziej użyteczne są dwie metody.

1. Metoda oparta na rozwiązywaniu równania równowagi sił w kierunku poprzecznym do kierunku przepływu, zwana również metodą "krzywizny linii prądu".
2. Metoda oparta na rozwiązywaniu równania funkcji prądu.

Obie metody mają swoje zalety i wady. W metodzie "krzywizny linii prądu" równania różniczkowe rozkładu prędkości względnych w kierunku normalnym lub zbliżonym do normalnego do linii prądu, stanowią funkcje wstępnie założonej wartości promieni krzywizny linii prądu. Metoda może być stosowana do badania przepływu izentropowego, przydźwiękowego [14]. Budzi jednakże wątpliwość przydatności tej metody w obszarze występowania fal uderzeniowych.

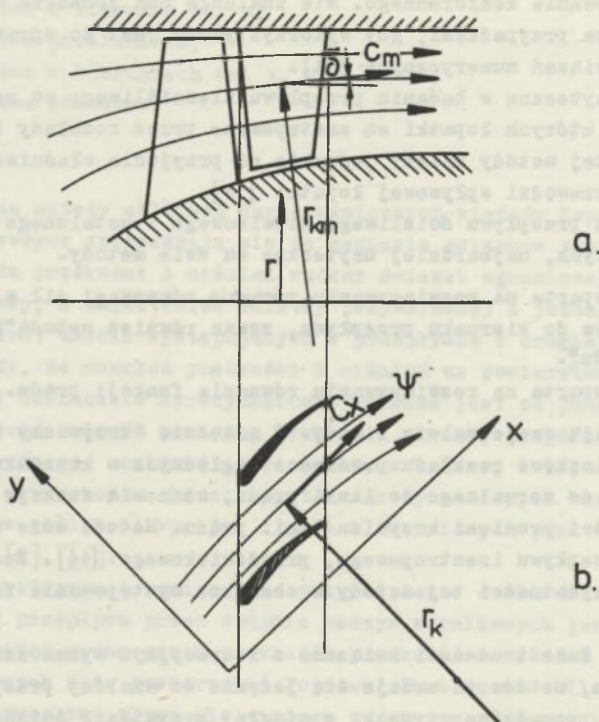
Z uwagi na duże trudności związane z iteracyjnym wyznaczaniem przebiegu linii prądu, metoda ta nadaje się jedynie do analizy przepływu przez kanały dobrze prowadzące czynnik, o ciągłej krzywiznie ścianek ograniczających, utworzone przez wystarczająco gęste układy łopatkowe.

Dążność do tworzenia ułopatkowania wysokoobciążonego aerodynamicznie prowadzi w konsekwencji do "rzadkich" wieńców łopatkowych. W tych przypadkach dogodniejszą w zastosowaniu jest druga metoda oparta na równaniu funkcji prądu wyprowadzonym z warunku niewirowości przepływu bezwzględnie [12] i spełniającym warunek ciągłości przepływu. Równanie to można przedstawić w postaci różnicowej, opartej o przyjętą siatkę i rozwiązać łącznie z równaniem określającym lokalną wartość gęstości czynnika, metodą relaksacyjną lub przez odwracanie macierzy. Zakres stosowania metody ograniczony jest jedynie do przepływu poddźwiękowego.

Przez równoczesne zastosowanie obu metod można rozszerzyć znacznie zakres możliwych do rozwiązania przypadków przepływu.

### 2.1. Równanie niewirowości przepływu bezwzględnego na obrotowej powierzchni prądu

Dla ułatwienia rozważań, w pierwszej kolejności rozpatrujemy równania ruchu cieczy w układzie współrzędnych prostokątnych  $x, y$  przyjmując kierunek współrzędnej  $x$  równoległe do kierunku średniej prędkości (rys. 1) tak, że  $c_x \gg c_y$ .



Rys. 1. Stopień maszyny wirnikowej  
a. przekrój merydionalny, b. kanał międzyłopatkowy

Do analizy przepływu ustalonego nielepkiego stosujemy dwa równania ruchu: równanie ciągłości

$$\frac{\partial}{\partial x} (\varrho c_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\varrho c_y) = 0, \quad (1)$$

oraz równanie niewirowości przepływu bezwzględnego

$$\frac{\partial c_x}{\partial y} - \frac{\partial c_y}{\partial x} = 0. \quad (2)$$

Uzupełniając równanie dla obliczenia gęstości otrzymujemy z warunku izentropowości przepływu:

$$\frac{\rho}{\rho_{01}} = \left( \frac{h_{01}}{h_{01}} - \frac{c^2}{2} \right)^{\frac{1}{\kappa - 1}}, \quad (3)$$

gdzie:  $\rho_{01}$  i  $h_{01}$  stanowią wlotowe wartości gęstości i entalpii spoczynkowej,

$$c^2 = c_x^2 + c_y^2.$$

Po wprowadzeniu pojęcia funkcji prądu

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \rho c_x; \quad -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \rho c_y,$$

równanie (2) przyjmie postać równania

$$\nabla^2 \psi = f(\psi, \rho), \quad (4)$$

lub po odpowiednim zastąpieniu gęstości  $\rho$  po prawej stronie:

$$(1 - M_x^2) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + (1 - M_y^2) \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + 2 M_x M_y \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = 0. \quad (5)$$

Jest to równanie nieliniowe, w które wprowadzono liczbę Macha  $M_x$  i  $M_y$ . Równanie to może być rozwiązane przy współudziale równania (3) przedstawionego w postaci:

$$\frac{\rho}{\rho_{01}} = \left[ 1 - \frac{1}{2h_{01}\rho} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{1}{\kappa - 1}}. \quad (6)$$

Analizując równanie (5) można zauważyć, że tak długo jak długo  $M_x$  jest małe, równanie to jest typu eliptycznego [17], [15] i może być rozwiązane metodą relaksacyjną lub przez odwracanie macierzy przy określeniu dodat-

kowych warunków brzegowych. W przypadku gdy  $M_x$  jest bliskie prędkości dźwięku, pierwsze wyrażenie będzie bardzo małe i wówczas równanie może być wprost całkowane względem  $y$ . W przepływie naddźwiękowym równanie jest typu hiperbolicznego i wówczas odpowiednią metodą rozwiązania byłaby metoda charakterystyk [17], [15].

W kanałach międzyłopatkowych sprężarek mogą wystąpić równocześnie wszystkie rodzaje przepływów. Możliwości rozwiązania przedyskutowane zostaną dla konkretnego przypadku koła wirnikowego sprężarki osiowopromieniowej. Podobnie jest w pracach [6], [8] równanie ruchu cieczy rozpatrujemy na obrotowych powierzchniach prądu, wyznaczonych w pierwszym zagadnieniu dwuwymiarowym [10] w układzie współrzędnych "m" stycznej do linii prądu w przekroju merydionalnym (rys. 2) oraz "rv" zgodnej z kierunkiem obwodowym (rys. 3). Kanał przepływowy jest określony przez promień  $r$  oraz wysokość  $\Delta n$  mierzona w kierunku prostopadłym do linii prądu (rys. 2).

Równania (1) i (2) w układzie współrzędnych  $m$ ,  $v$  przyjmą postać równanie ciągłości

$$\frac{\partial(\Delta n \cdot \rho \cdot W v)}{\partial v} + \frac{\partial(\Delta n \cdot \rho \cdot W_m)}{\partial m} = 0, \quad (7)$$

równanie niewirowości przepływu bezwzględnego

$$\frac{\partial C v}{\partial m} - \frac{\partial C_m}{r \partial v} = 0. \quad (8)$$

Pamiętając o tym, że

$$c_m = w_m, \quad w_v = c_v - r \omega,$$

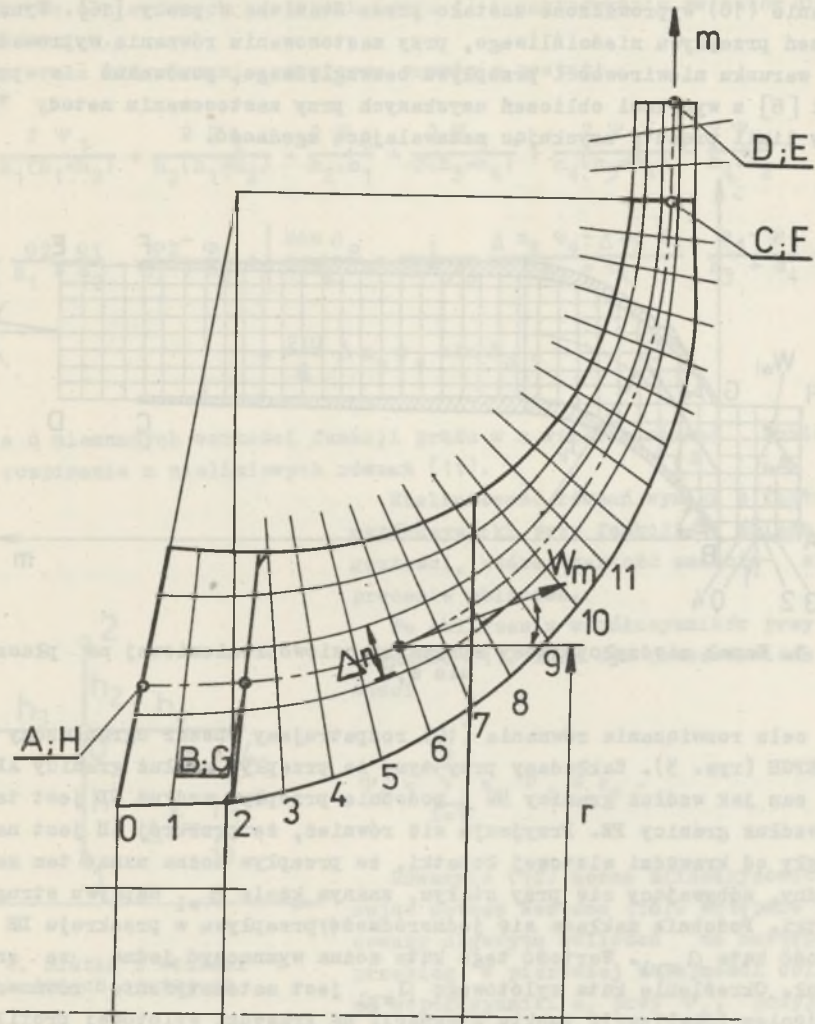
oraz

$$\partial r / \partial m = \sin \delta,$$

oraz po wprowadzeniu zależności na funkcję prądu

$$\frac{\partial \psi}{\partial m} = -b \rho w_v, \quad (9)$$

$$\frac{\partial \psi}{r \partial v} = b \rho w_m,$$



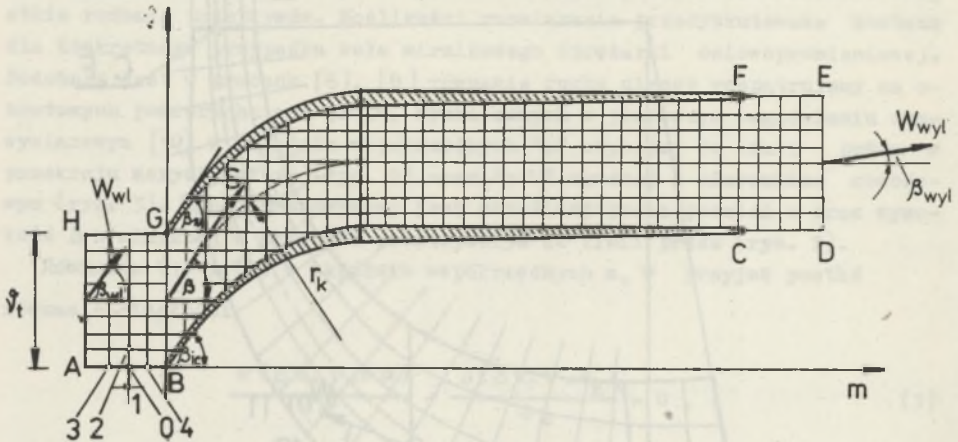
Rys. 2. Koło wirnikowe sprężarki osiowopromieniowej w przekroju merydionalnym

Równanie (8) przekształcamy do ostatecznej postaci

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial m^2} - \frac{1}{r^2} \frac{1}{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial v} + \frac{\sin \delta}{r} - \frac{1}{\Delta n \varphi} \frac{\partial (\Delta n \varphi)}{\partial m} \frac{\partial \psi}{\partial m} =$$

$$= 2 \Delta n \varphi \omega \sin \delta . \quad (10)$$

Równanie (10) wyprowadzone zostało przez Stanitzę w pracy [16]. Wyniki obliczeń przepływu nieściśliwego, przy zastosowaniu równania wyprowadzonego z warunku niewirowości przepływu bezwzględnego, porównano w pracach [5] i [8] z wynikami obliczeń uzyskanych przy zastosowaniu metody "krzywizny linii prądu", uzyskując zadawalającą zgodność.



Rys. 3. Kanał międzyłopatkowy sprężarki osiowopromieniowej na płaszczyźnie  $m, \psi$

W celu rozwiązania równania (10) rozpatrujemy obszar ograniczony linią ABCDEFGH (rys. 3). Zakładamy przy tym, że przepływ wzdłuż granicy AB jest taki sam jak wzdłuż granicy HG i podobnie przepływ wzdłuż CD jest taki sam jak wzdłuż granicy FE. Przyjmuje się również, że przekrój AH jest na tyle odległy od krawędzi wlotowej łopatki, że przepływ można uznać tam za jednorodny, odbywający się przy stałym, znanym kącie  $\beta_{wl}$  napływu strug na łopatki. Podobnie zakłada się jednorodność przepływu w przekroju DE oraz wartość kąta  $\beta_{wyl}$ . Wartość tego kąta można wyznaczyć jedną z znanych formuł. Określenie kąta wylotowego  $\beta_{wyl}$  jest matematycznie równoważne z przyjęciem lokalizacji punktu stagnacji na krawędzi wylotowej profilu łopatki.

Ponieważ dla przepływu poddźwiękowego równanie (10) jest typu eliptycznego konieczne jest sprecyzowanie warunków brzegowych wzdłuż granic ABCDEFGH. Przyjmujemy, że wzdłuż powierzchni łopatki BC funkcja prądu  $\psi = 0$  oraz wzdłuż FG  $\psi = 1$ . Wzdłuż linii AB, GH, CD oraz EF warunki zmieniają się okresowo, przy czym wartość funkcji wzdłuż HG i FE jest dokładnie o jedność większa niż wzdłuż linii AB i CD.

Dla problemu przepływu ukośnego brak jest w chwili obecnej rozwiązania analitycznego równania (10). Rozwiązania tego szukamy więc na drodze numerycznej przez zastąpienie równania (10) równaniem różnicowym rozpisany



dla węzłów o nierównych odstępach (rys. 4) i zastosowaniu związków dla różnic przednich.

Dla węzła "0" równanie różnicowe przyjmie postać:

$$\begin{aligned} & \frac{2 \psi_1}{h_1(h_1+h_2)} + \frac{2 \psi_2}{h_2(h_1+h_2)} - \frac{2 \psi_0}{h_2 \cdot h_1} + \frac{2 \psi_3}{2(h_3+h_4)} + \frac{2 \psi_4}{h_4(h_3+h_4)} - \frac{2 \psi_0}{h_4 \cdot h_2} \\ & - \frac{1}{\varrho_0} \frac{\varrho_2 - \varrho_1}{h_1 + h_2} \cdot \frac{\psi_2 - \psi_1}{h_1 + h_2} + \left[ \frac{\sin \delta_0}{r_0} - \frac{1}{\Delta n_0 r_0} \frac{\Delta n_4 \varrho_4 - \Delta n_3 \varrho_3}{h_3 + h_4} \right] \frac{\psi_4 - \psi_3}{h_3 + h_4} = \\ & = \frac{2\omega}{m} \Delta n_0 \varrho_0 \sin \delta_0 . \end{aligned} \quad (11)$$

Dla  $n$  nieznanymi wartościami funkcji prądu w  $n$  węzłach siatki konieczne jest rozpisanie  $n$  nieliniowych równań (11).

Nieliniowość równań wynika z faktu, że współczynniki przy funkcji  $\psi$  zależą od gęstości, której wartość zmienia się w procesie obliczeń.

Po obliczeniu współczynników przy  $\psi_i$ , równanie (11) może być przedstawione w postaci

$$\psi_0 = \sum_{i=1}^4 a_i \psi_i + k_0 . \quad (12)$$

Równanie (12) można zlinearyzować stosując metodę Newtona [18]. Wstępnie opracowany algorytm obliczeń ma następujący przebieg: W pierwszej kolejności obliczamy współczynniki  $a_i$  przy  $\psi_i$ , przyjmując

Rys. 4. Siatka z węzłami o nierównych odstępach

wstępnie założony rozkład gęstości czynnika  $\varrho_j$ , i rozwiązujemy układ  $n$  równań liniowych (12), otrzymując przybliżone wartości funkcji prądu  $\psi_j$  we wszystkich punktach siatki. Uzyskane przybliżone wyniki wykorzystujemy z kolei do obliczenia przybliżonych wartości iloczynów  $\varrho \cdot w_m$  i  $\varrho \cdot w_v$  przez numeryczne całkowanie równań (9) oraz do obliczeń wielkości

$$(\varrho w) = \sqrt{(\varrho w_m)_j^2 + (\varrho w_v)_j^2} .$$

Iloczyn  $\varrho w$  przyjmuje maksymalną wartość dla  $w = w_{kr}$ .

Jeśli  $\varrho w$  jest mniejsze od tej maksymalnej wartości, wówczas występują dwie prędkości "w", którym przyporządkować można tę samą wartość iloczy-

nu  $Q_w$  - poddźwiękowa i naddźwiękowa. W celu znalezienia poddźwiękowej wartości prędkości "w" odpowiadającej danej wartości ( $Q_w$ ) przedstawiamy ten iloczyn jako funkcję W

$$Q_w = Q_0 \left[ 1 - \frac{w^2 + 2\omega \lambda_1 - \omega^2 r^2}{2 c_p T_{01}} \right]^{\frac{1}{\kappa-1}} w, \quad (13)$$

oraz obliczamy pochodną

$$\begin{aligned} \frac{d(Q_w)}{dw} = & - \frac{Q_{01} \cdot w^2}{\kappa R \cdot T_{01}} \left[ 1 - \frac{w^2 + 2\omega \lambda_1 - (\omega r)^2}{2 c_p T_{01}} \right]^{\frac{2-\kappa}{\kappa-1}} + \\ & + Q_{01} \left[ 1 - \frac{w^2 + 2\omega \lambda_1 - (\omega r)^2}{2 c_p T_{01}} \right]^{\frac{1}{\kappa-1}}. \end{aligned} \quad (14)$$

Jeżeli znane są z poprzedniej iteracji lub wstępnie założone wartości  $(Q_w)_j$  i  $Q_j$ , wówczas obliczamy kolejno

$$w_j = \frac{(Q_w)_j}{Q_j},$$

z równania (14) nową wartość iloczynu  $(Q_w)_{j+1}$  oraz stosując metodę Newtona 18 nową wartość prędkości

$$w_{j+1} = w_j + \frac{(Q_w)_j - Q_{j+1} w_j}{\frac{d(Q_w)}{dw}} \quad (15)$$

Iteracja prowadzona jest tak długo aż spełnione zostanie wyrażenie

$$\frac{w_{j+1} - w_j}{w_{j+1}} < \varepsilon.$$

W przypadku przepływu przydźwiękowego występują trudności w lokalizacji miejsc, w których prędkość jest większa od prędkości dźwięku. Obliczenia komplikuje dodatkowo fakt, że równanie (10) jest nieliniowe i wymaga iteracyjnego wyznaczania współczynników zawierających gęstość.

Biorąc pod uwagę wymienione trudności, w przypadku gdy lokalnie może wystąpić przepływ naddźwiękowy do obliczeń można zastosować równanie wprowadzone z warunku równowagi przepływu w kierunku obwodowym.

2.2. Równanie równowagi przepływu w kierunku obwodowym

Dla wyprowadzenia zależności umożliwiającej analizę przepływu w kanale międzyłopatkowym korzystamy z równania równowagi przepływu w kierunku obwodowym

$$\frac{d w_v}{dt} + \frac{w_r w_v}{r} + 2 \omega w_r = -1/g \frac{\partial p}{r \partial v}, \quad (16)$$

oraz z równania wyprowadzonego z równania energii izentropowego przepływu względnego w układzie wirującym [6]

$$\frac{1}{g} \frac{\partial p}{r \partial v} = -w \frac{\partial w}{r \partial v}. \quad (17)$$

Po porównaniu równań (16) i (17) oraz uwzględnieniu zależności

$$w_m = w \cos \beta; \quad w_v = w \sin \beta; \quad w_r = w_m \sin \delta,$$

$$w_r = w \cos \beta \sin \delta,$$

otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \frac{d(w \sin \beta)}{dt} + \frac{1}{r} w^2 \cos \beta \sin \delta \sin \beta + 2 \omega w \cos \beta \sin \delta &= \\ &= w \frac{\partial w}{r \partial v}. \end{aligned} \quad (18)$$

Po uwzględnieniu zależności

$$\frac{d(w \sin \beta)}{dt} = \sin \beta \frac{dw}{dt} + w \frac{d \sin \beta}{dt} \frac{d \beta}{dt},$$

$$\frac{d \beta}{dt} = \frac{d S}{dt} \cdot \frac{d \beta}{ds} = w \frac{d \beta}{ds},$$

oraz dla przepływu ustalonego

$$\frac{dw}{dt} = w_v \frac{\partial w}{r \partial v} + w_m \frac{\partial w}{\partial m},$$

równanie (18) przekształcamy do postaci:

$$\frac{\partial w}{r \partial v} = w \left( \frac{1}{\cos \beta} \frac{d \beta}{ds} + \frac{1}{r} \operatorname{tg} \beta \sin \delta \right) + \operatorname{tg} \beta \frac{\partial w}{\partial m} + 2 \frac{\sin \delta}{\cos \beta} \omega. \quad (19)$$

W równaniu (19), podobnie jak w rozwiązaniu pierwszego zagadnienia dwuwymiarowego, występuje krzywizna linii prądu (rys. 3)

$$\frac{d\beta}{ds} = \frac{1}{r_k} . \quad (20)$$

Z rysunku wynikają dalsze zależności umożliwiające wyrażenie równania (19) przez funkcję prądu  $\Psi$  i powiązanie omawianej metody z metodą opartą na założeniu niewirowości przepływu bezwzględnego [11]

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{r \partial v}{\partial m} , \quad (21)$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{wv}{w_m} = - \frac{r \partial \Psi}{\partial m} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial v} , \quad (22)$$

oraz

$$\frac{dm}{ds} = \cos \beta ; \quad \frac{dr}{dm} = \sin \delta . \quad (23)$$

Różniczkujemy równanie (22) oraz wykorzystujemy związki (23) i wyznaczamy zależność:

$$\frac{d\beta}{ds} = r \cos^3 \beta \frac{d^2 v}{dm^2} + \frac{\sin \delta \sin \beta \cos^2 \beta}{r} . \quad (24)$$

Wyrażenie  $\frac{d^2 v}{dm^2}$  można z łatwością określić wzdłuż powierzchni łopatki, ponieważ  $v$  jest tu wyraźną funkcją  $m$ .

Natomiast w kanale  $d^2 v / dm^2$  może być wyrażone nie wprost, przez funkcję prądu.

Porównujemy równania (21) i (22) i otrzymujemy

$$\frac{dv}{dm} = - \frac{\partial \Psi}{\partial m} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial v} . \quad (25)$$

Zależność tę różniczkujemy i otrzymujemy wyrażenie

$$\frac{d^2 \Psi}{dm^2} = \frac{2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial m \partial v} \frac{\partial \Psi}{\partial m} \frac{\partial \Psi}{\partial v} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial m^2} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial v} \right)^2 - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial v^2} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial m} \right)^2}{\left( \frac{\partial \Psi}{\partial v} \right)^3} . \quad (26)$$

Postać ogólna równania (19) może być wyrażona zależnością

$$\frac{\partial W}{\partial v^2} = T W + S, \quad (27)$$

przy czym parametr T określamy na powierzchni łopatki równaniem

$$T = r^2 \cos^2 \beta \frac{d^2 v}{d \cdot^2} + \sin \delta \operatorname{tg} \beta (1 + \cos^2 \beta), \quad (28)$$

natomiast w kanale międzyłopatkowym równaniem:

$$T = \sin^2 \beta \left[ 2 \frac{\frac{\partial^2 \Psi}{\partial m \partial v}}{\frac{\partial \Psi}{\partial m}} - \frac{\frac{\partial \Psi}{\partial v}}{\left(\frac{\partial \Psi}{\partial m}\right)^2} - \frac{\frac{\partial^2 \Psi}{\partial v^2}}{\frac{\partial \Psi}{\partial m}} \right] + \sin \delta \operatorname{tg} \beta (1 + \cos^2 \beta). \quad (29)$$

Parametr S wyznaczamy z równania

$$S = r \operatorname{tg} \beta \frac{\partial W}{\partial m} + 2 \omega r \frac{\sin \delta}{\cos \beta}. \quad (30)$$

### 3. Metoda analizy przepływu przydźwiękowego

Uzupełniające się nawzajem właściwości obu przedstawionych metod stwarzają możliwość poszerzenia zakresu obliczeń przepływu [11]. W przypadku wystąpienia w przepływie lokalnych prędkości naddźwiękowych, w pierwszej kolejności stosujemy metodę różnic skończonych do obliczenia wartości funkcji prądu i rozkładu linii prądu. Redukujemy przy tym uprzednio przepływ do przepływu poddźwiękowego w całym obszarze, przez odpowiednie zmniejszenie masowego natężenia przepływu i prędkości kątowej  $\omega$ .

W przypadku przepływu nieściśliwego wartość funkcji prądu  $\Psi$  nie ulega zmianie. Jeżeli przyjmemy model przepływu ściśliwego wówczas rozwiązanie równania funkcji prądu zmieni się ponieważ współczynniki w równaniu (10) są funkcjami gęstości, która z kolei zależy od względnej prędkości  $w$ .

Uzyskany, zbliżony do rzeczywistego, rozkład linii prądu oraz funkcji prądu  $\Psi$  wykorzystywany jest z kolei do obliczeń parametrów T i S w równaniu (27). Równanie (27) rozwiązuje się dla rzeczywistego natężenia prze-

pływu wzdłuż linii obwodowych [6], wykorzystując obliczone parametry T i S przy spełnieniu równania ciągłości

$$m = \int_{v_1}^{v_2} \rho w \cdot \cos \beta \Delta n r \Delta V$$

między sąsiednimi liniami prądu.

Przy niedużych lokalnych przekroczeniach prędkości dźwięku błąd wyznaczenia wartości funkcji prądu i rozkładu linii prądu wywołany zmniejszeniem masowego natężenia przepływu nie powinien być znaczny.

W przypadku rozwiązywania równania (27) bezpośrednio, musimy znać wstępne wartości prędkości w po stronie biernej powierzchni łopatki i stosujemy wówczas metodę przedstawioną w pracy [6].

#### 4. Wnioski końcowe

Przeprowadzona w pracy analiza wykazała, że stosowane obecnie metody wyprowadzone z warunków równowagi przepływu względnego oraz z warunku niewirowości przepływu bezwzględnego, posiadają wyraźnie określone ograniczenia i zalety. W szczególności druga z tych metod, polegająca na rozwiązywaniu równania funkcji prądu metodą różnic skończonych może być stosowana jedynie do przepływu poddźwiękowego.

Metoda pierwsza zwana również metodą "krzywizny linii prądu" nie ma ograniczeń w tym względzie. Natomiast może być stosowana jedynie do kanałów dobrze prowadzących czynnik.

Przez kolejne zastosowanie obu metod można uzyskać rozwiązania przepływu przydźwiękowego w wieńcach łopatkowych o dowolnym kształcie przekroju merydionalnego i małej gęstości ułopatkowania.

Przedstawiona analiza stanowi wstępny etap pracy poświęconej opanowaniu skutecznych metod obliczania rozkładów prędkości i ciśnień w wieńcach łopatkowych o dowolnej konstrukcji. Obecnie w opracowaniu znajduje się koło wirnikowe sprężarki osiowopromieniowej. Z uwagi na dużą pracochłonność przygotowania geometrii koła wirnikowego oraz uruchomienia programu obliczeń, przykład obliczeniowy zamieszczony zostanie w późniejszej publikacji.

#### LITERATURA

- [1] LIEBLEIN SEYMOUR: Loos and Stall Analysis of Compressor Cascades. Trans. ASME J. of Basic Eng. Sept. 1959.
- [2] GREGORY SMITH D.G.: An Investigation of Annulus Wall Boundary Layer in Axial Flow Turbomachines. Trans. ASME, J. of Eng. for Power, Oct. 1970.

- [3] DAVIS R.C., DUSSOURD J.: A Unified Procedure for the Calculation of off-Design Performance of Radial Turbomachinery. Trans. ASME J. of Eng. for Power, Jan. 1971.
- [4] JANSEN W.: The Application of An<sub>w</sub>-Wall Boundary Layer Effects in the Performance Analysis of Axial Compressors. ASME Paper 67, WA/GT 11, 1967.
- [5] WITKOWSKI A.: Flow Analysis in Axial-Flow Compressor Impeller With Meridional Stream Acceleration. Proceedings of the Fourth Conference on Fluid Machinery. Budapest, 1972.
- [6] WITKOWSKI A.: Rozkład prędkości i ciśnień w kanałach międzyłopatkowych osiowego wienca sprężającego z merydionalnym przyspieszeniem strumienia. ZN Pol. Sl. Energetyka z. 45 Gliwice, 1973.
- [7] WITKOWSKI A.: Zastosowanie quasiortogonalnych współrzędnych do obliczeń przepływu w wieńcach sprężających o przestrzennie ukształtowanych kanałach międzyłopatkowych. ZN Pol. Sl. Energetyka. z. 47, Gliwice, 1973.
- [8] KATSANIS T.: The Use of Arbitrary Quasi Orthogonals for Calculating Flow Distribution in Turbomachine. Technical Preprint prepared for A.M. of the ASME, Chicago Illinois, November, 1965, NASA.
- [9] YASUTOSHI SENOO, YOSHIYUKU NAKASE: An Analysis Through Mixed Flow Impeller. Trans. ASME J. of Eng. for Power Jan. 1972.
- [10] MADEJ M.: Praca dyplomowa magisterska, Gliwice, 1975.
- [11] KATSANIS T.: Fortran Program for Calculating Transonic Velocities on a Blade-to-Blade Stream Surface of a Turbomachine. NASA TN D - 5427, September, 1969.
- [12] VAVRA M.H.: AeroThermodynamics and Flow in Turbomachines J. Waley, New York, 1960.
- [13] KATSANIS T.: Computer Program for Calculating Velocities and Streamlines on a Blade-to-Blade Stream Surface of a Turbomachine. NASA TN D 4525, Apr. 1968.
- [14] PERKINS H.J., HORLOCK J.W.: The Aerodynamic Analysis of Turbomachinery GEC J. Sa. Techn. Vol. 41 No 2, 1974.
- [15] DORFMAN L.A.: Численные методы в газодинамике турбомашин. Энергетика 1974.
- [16] STANITZ J.D.: Some Theoretical Aerodynamic Investigations of Impellers in Radial and Mixed Flow Centrifugal Compressors. Trans. ASME May, 1952.
- [17] COLLATZ L.: Metody numeryczne rozwiązywania równań różniczkowych, PWN, Warszawa, 1960.
- [18] LEGRAS J.: Praktyczne metody analizy numerycznej, WNT, Warszawa, 1974.

ВЫБОР МЕТОДА АНАЛИЗА ТЕЧЕНИЯ В МЕЖЛОПАТОЧНЫХ КАНАЛАХ  
КОМПРЕССОРНОГО РАБОЧЕГО КОЛЕСА

Р е з ю м е

В работе приводится анализ области применения методов анализа сжимаемого, дозвукового и локально околзвукового течения через межлопаточные каналы ступени турбомашин. Принято квазитрёхразмерный, невязкий, без скачков уплотнения модель течения. Приведено вступительный алгоритм вычисления околзвукового течения в рабочем колесе осерадиального компрессора.

THE CHOICE OF THE METHOD OF THE FLOW ANALYSIS IN BLADE-TO-BLADE PASSAGES OF THE COMPRESSOR STAGE

Summary

In the paper a range of application of flow analysis methods on a blade-to-blade surface in compressor stages has been discussed. The compressible, subsonic, and locally transonic flow has been analysed.

The quasithreedimensional isentropic and shock-free flow model has been considered. The numerical algorithm of the flow solution for mixed flow compressor impeller has been discussed.