ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1977

Seria: ENERGETYKA z. 63

Stefan POSTRZEDNIK

ANALITYCZNE CAŁKOWANIE RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH PARAMETRÓW GAZU DOSKONAŁEGO PRZEPŁYWAJĄCEGO W POZIOMYM RUROCIĄGU ADIATERMICZNYM

Streszczenie. Podany w pracy [2] układ równań różniczkowych rozwiązano metodą analityczną dla przypadku poziomego rurociągu adiatermicznego. Ustalono warunki oraz ograniczenia jakim podlegają funkcje wynikowe.

Ważniejsze oznaczenia

- A - stałe parametry i liczby charakterystyczne,
- c_p - ciepło właściwe czynnika przy stałym ciśnieniu,
- D - średnica wewnętrzna rurociągu,
- q - ciepło jednostkowe dopływające z zewnątrz,
- L - całkowita długość rurociągu,
- m - strumień substancji,
- p - ciśnienie statyczne,
- T - temperatura bezwzględna,
- w - średnia prędkość przepływu czynnika,
- v - objętość właściwa,
- x - współrzędna wzdłuż drogi przepływu czynnika,
- Y - funkcja pomocnicza,
- α - zredukowana prędkość,
- η - zredukowane ciśnienie,
- ϑ - zredukowana temperatura,
- λ_f - liczba tarcia,
- $\varkappa$ - stosunek ciepeł właściwych,
- ξ - zredukowana współrzędna.

Indeksy dotyczą:

- o - parametrów przy wlocie do rurociągu,
- max - wartości maksymalnych,
- min - wartości minimalnych.

1. Ogólna postać układu równań różniczkowych

Podany w pracy [2] podstawowy układ równań różniczkowych (równania (30) i (29)), opisujący parametry czynnika w poziomym rurociągu diatermicznym, można zanotować w dogodniejszej formie

$$\frac{d\vartheta}{d\xi} = \frac{-\mu_1\left[\frac{A_4}{2}\left(\frac{\vartheta}{\varphi}\right) - 1\right] + A_1\varphi}{(1 - A_4) - \frac{A_4}{2}\left(\frac{\vartheta}{\varphi}\right)} \tag{1}$$

$$\frac{d\varphi}{d\xi} = -\frac{A_1\varphi + A_4\mu_1}{(1-A_4) - \frac{A_4}{2}\frac{\vartheta}{\varphi}} \tag{2}$$

gdzie:

$$\varphi = \frac{A_5}{2}\alpha^2; \quad \alpha = \frac{w}{w_o}, \quad \vartheta = \frac{T}{T_o}, \quad \eta = \frac{p}{p_o}, \quad \xi = \frac{x}{L}$$

$$A_1 = \lambda_f\frac{L}{D}, \quad \mu_1 = \frac{d\mu}{d\xi}, \quad \mu = \frac{q}{c_p T_o}, \quad A_4 = \frac{\varkappa - 1}{\varkappa}, \quad A_5' = \frac{w_o^2}{c_p T_o}$$

są zredukowanymi zmiennymi i parametrami analizowanego układu.

Jeżeli dalsze rozważania ograniczyć do przypadku rurociągu adiatermicznego wtedy należy przyjąć $\mu = 0$, co uwzględnione w równaniach (1) i (2) daje układ

$$\frac{d\vartheta}{d\xi} = \frac{A_1\varphi}{(1 - A_4) - \frac{A_4}{2}\left(\frac{\vartheta}{\varphi}\right)} \tag{3}$$

$$\frac{d\varphi}{d\xi} = -\frac{A_1\varphi}{(1 - A_4) - \frac{A_4}{2}\left(\frac{\vartheta}{\varphi}\right)} \tag{4}$$

Wtedy również, zgodnie z I zasadą termodynamiki, zachodzi relacja

$$\frac{d\vartheta}{d\xi} = -\frac{d\varphi}{d\xi}.$$

Układ równań różniczkowych (3) i (4) należy rozwiązać przy uwzględnieniu następujących warunków brzegowych

$$\vartheta(\xi = 0) = 1$$
$$\eta(\xi = 0) = 1 \tag{5}$$
$$\alpha(\xi = 0) = 1 \quad \text{lub} \quad \varphi(\xi = 0) = \frac{A_5'}{2}$$

Takie warunki uzyskuje się, gdy parametrami odniesienia są parametry przy wlocie do rurociągu. Jako wielkościami odniesienia można posłużyć się również parametrami spoczynkowymi.

2. Rozwiązanie zagadnienia dla rurociągu adiatermicznego

Utworzona zostanie nowa funkcja

$$Y(\xi) = \frac{\vartheta(\xi)}{\varphi(\xi)} \tag{6}$$

której pochodna

$$\frac{dY}{d\xi} = \frac{1}{\varphi}\frac{d\vartheta}{d\xi} - \frac{\vartheta}{\varphi^2}\frac{d\varphi}{d\xi} \tag{7}$$

Po wstawieniu równań (3) i (4) do (7) uzyskuje się

$$\frac{dY}{d\xi} = \frac{1}{\varphi}\frac{A_1\varphi}{(1-A_4) - \frac{A_4}{2}\left(\frac{\vartheta}{\varphi}\right)} + \frac{\vartheta}{\varphi^2}\frac{A_1\varphi}{(1-A_4) - \frac{A_4}{2}\left(\frac{\vartheta}{\varphi}\right)}$$

i ostatecznie

$$\frac{dY}{d\xi} = A_1\frac{1+Y}{(1-A_4) - \frac{A_4}{2}Y} \tag{8}$$

Ostatnie równanie jest równaniem zwyczajnym pierwszego stopnia, winno być scałkowane przy warunku brzegowym

$$Y(\xi = 0) = \frac{2}{A_5'} = \frac{c_p T_o}{w_o^2/2} \tag{9}$$

Obliczając całkę z równania (8)

$$\int \frac{\left[1 - \frac{A_4}{2}(2+Y)\right]}{A_1(1+Y)}\,dY = \int d\xi + C_o \tag{10}$$

uzyskuje się przy założeniu A_1 = idem

$$\frac{1}{A_1}\ln(1+Y) - \frac{A_4}{2A_1}\left[2\ln(1+Y) + Y - \ln(1+Y)\right] = \xi + C_o \tag{11}$$

zaś po uporządkowaniu

$$\frac{2 - A_4}{2A_1}\ \ln(1 + Y) - \frac{A_4}{2A_1}\ Y = \xi + C_o \qquad (12)$$

Wykorzystanie warunku brzegowego (9) daje

$$C_o = \frac{2 - A_4}{2A_1}\ \ln\left(1 + \frac{2}{A_5'}\right) - \frac{A_4}{A_1\ A_5'} \qquad (13)$$

Równania (12) i (13) określają jednoznacznie wartości funkcji $Y(\xi)$ w dowolnych miejscach układu.

Ponieważ ostatecznie chodzi o znalezienie wartości funkcji $\vartheta(\xi)$ oraz $\varphi(\xi)$, (względnie $\alpha(\xi)$), dlatego, aby to uzyskać, należy uwzględnić dodatkowo równanie bilansu energii czynnika płynącego w rurociągu, w obszarze od początku rurociągu ($\xi = 0$) do danego miejsca ξ, wtedy

$$\frac{A_5'}{2}\left[\alpha(\xi)\right]^2 + \vartheta(\xi) = \frac{A_5'}{2} + 1 \qquad (14)$$

lub po wprowadzeniu $\varphi(\xi)$

$$\varphi(\xi) + \vartheta(\xi) = \frac{A_5'}{2} + 1 \qquad (15)$$

oraz

$$Y(\xi) = \frac{1}{\varphi(\xi)}\left[\frac{A_5'}{2} + 1\right] - 1 \qquad (16)$$

Równania (12), (13), (14), (15), (16) pozwalają określić wszystkie funkcje w danym miejscu rurociągu.

3. Wykorzystanie uzyskanego rozwiązania

Wyznaczając z równania (12) wartość funkcji $Y(\xi)$ w danym miejscu rurociągu, można pozostałe funkcje określać z poniższych formuł (po wykorzystaniu równania (13) z [2])

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{Y(\xi) + 1}\left[\frac{A_5'}{2} + 1\right] \qquad (17)$$

$$\alpha(\xi) = \sqrt{\left(\frac{2}{A_5'} + 1\right)\frac{1}{Y(\xi) + 1}} \qquad (18)$$

$$\vartheta(\xi) = \left(\frac{2}{A_5'} + 1\right) \frac{Y(\xi)}{Y(\xi) + 1} \tag{19}$$

$$\eta(\xi) = \frac{A_5'}{2} Y(\xi) \sqrt{\left(\frac{2}{A_5'} + 1\right) \frac{1}{Y(\xi) + 1}} \tag{20}$$

Przestępne równanie (12) jest typu

$$\ln(1 + Y) = D_1 Y + D_2 \tag{21}$$

gdzie

$$D_1 = \frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1} \tag{22}$$

$$D_2 = \frac{2A_1}{2 - A_4} (\xi + C_o) \tag{23}$$

i rozwiązać je można metodą kolejnych przybliżeń.

4. Ograniczenia funkcji $Y(\xi)$

Funkcja $Y(\xi)$ jest funkcją malejącą. Podlega ona jednocześnie ograniczeniu

$$Y_{min} \leqslant Y(\xi) \leqslant Y_{max} \tag{24}$$

Jej wartość maksymalna jest określona przez (9)

$$Y_{max} = Y(\xi = 0) = \frac{2}{A_5'} = \frac{c_p T_o}{w_o^2/2} \tag{25}$$

zaś swoje minimum osiągnąć może ona w punkcie ekstremalnym linii Fanno. Ponieważ tam

$$\alpha^2_{max} = \frac{\varkappa - 1}{A_5} \vartheta_{min} \tag{26}$$

a ponadto z (19) i (18) uzyskuje się zależności

$$\vartheta_{min} = \left(\frac{A_5'}{2} + 1\right) \frac{Y_{min}}{Y_{min} + 1} \tag{27}$$

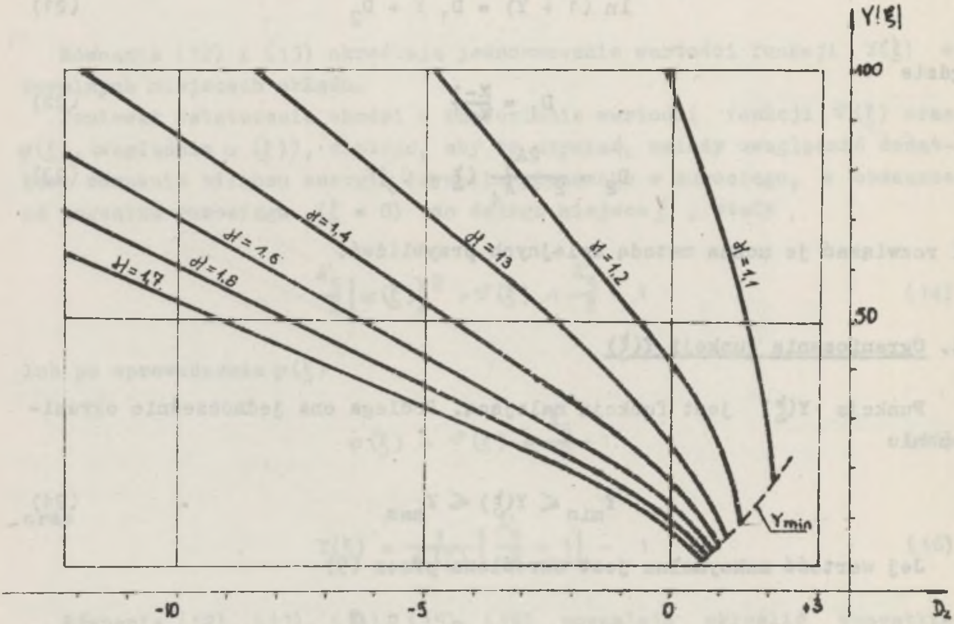
$$\alpha^2_{max} = \left(\frac{2}{A_5'} + 1\right) \frac{1}{Y_{min} + 1} \tag{28}$$

więc po wstawieniu (27) i (28) do (26)

$$Y_{min} = \frac{2}{\varkappa - 1} \tag{29}$$

i ostatecznie

$$\frac{2}{\varkappa-1} \leqslant Y(\xi) \leqslant \frac{c_p T_o}{w_o^2/2} \tag{30}$$



Rys. 1. Rozwiązanie równania przepływu

Wartości ekstremalne przybierać może funkcja $Y(\xi)$ tylko w punktach ekstremalnych współrzędnej ξ. Na rys. 1 przedstawiona jest zależność $Y(\xi)$ (równanie (21)), z uwzględnieniem ograniczenia (29). Warunek $\frac{c_p T_o}{w_o^2/2} > \frac{2}{\varkappa-1}$ wynikający z nierówności (30) jest warunkiem koniecznym lecz niewystarczającym.

5. Równanie warunkujące maksymalną przepustowość rurociągu adiatermicznego

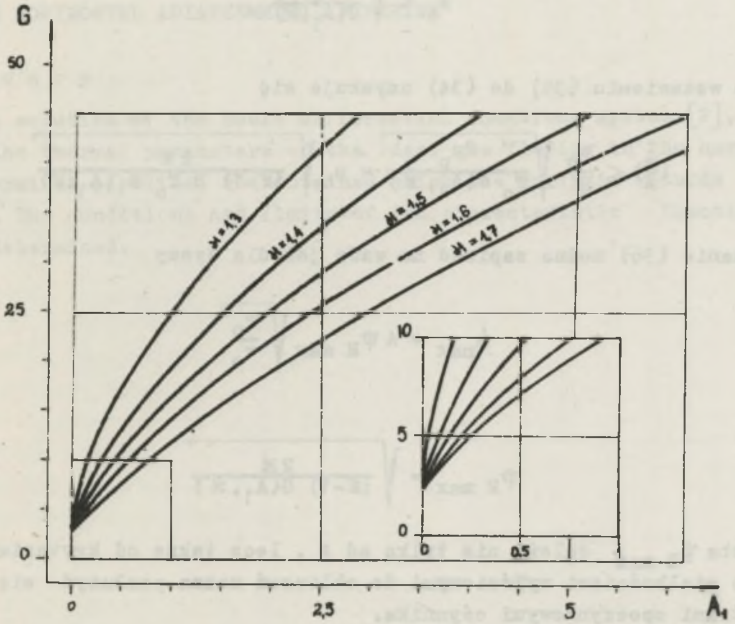
Uwzględniając równanie (29) oraz warunek $\xi = 1$ w równaniu (12) uzyskuje się po przekształceniach

$$(2 - A_4)\ \ln \frac{(\varkappa+1)}{(\varkappa-1)\left(1+\frac{2}{A_5'}\right)} + A_4 \frac{2}{A_5'} - 2A_1 - 2/\varkappa = 0 \qquad (31)$$

O ile spełnione jest równanie (31), wówczas można stwierdzić, że przepustowość rurociągu osiągnęła swoje maksimum.
Z równania (31) określić można zależność

$$G(A_1, \varkappa) \overset{df}{=} \frac{c_p T_o}{w_o^2/2} \qquad (32)$$

która pokazana jest na rys. 2.



Rys. 2. Funkcja graniczna przepływu

Ogólnie biorąc, funkcja $G(A_1, \varkappa)$ określa minimalną wartość stosunku $c_p T_o/(w_o^2/2)$, jaka jest dopuszczalna w rurociągu adiatermicznym o danej liczbie A_1 i stosunku $\varkappa$.
Ostatecznie więc

$$Y_{max} = \frac{c_p T_o}{w_o^2/2} > G(A_1, \varkappa) \qquad (33)$$

Zamiast więc mówić o maksymalnej przepustowości rurociągu, należy raczej określać minimalną wartość stosunku $\frac{c_p T_o}{w_o^2/2}$ czynnika na wlocie do kanału.

Skoro

$$\dot{m} = A \frac{w_o p_o}{R T_o} \tag{34}$$

gdzie

$$A = \frac{\pi D^2}{4}$$

a z (33) wynika, że

$$w_o \leqslant \sqrt{\frac{2 c_p T_o}{G(A_1, \varkappa)}} \tag{35}$$

więc po wstawieniu (35) do (34) uzyskuje się

$$\left(\frac{\dot{m}}{A}\right) \leqslant \frac{p_o}{R} \sqrt{\frac{2c_p}{T_o G(A_1, \varkappa)}} = p_o \sqrt{\frac{2\varkappa}{(\varkappa-1) R T_o G(A_1, \varkappa)}} \tag{36}$$

Równanie (36) można zapisać na wzór jak dla dyszy

$$\dot{m}_{max} = A \psi_{R\ max} \sqrt{\frac{p_o}{v_o}} \tag{37}$$

gdzie:

$$\psi_{R\ max} = \sqrt{\frac{2\varkappa}{(\varkappa-1) G(A_1, \varkappa)}} \tag{38}$$

Liczba $\psi_{R\ max}$ zależy nie tylko od $\varkappa$, lecz także od kryterium $A_1 = \lambda_f \frac{L}{D}$.

Jako wielkościami wyjściowymi do obliczeń można posłużyć się również parametrami spoczynkowymi czynnika.

LITERATURA

[1] Ochęduszko St.: Termodynamika stosowana, WNT, 1970.
[2] Postrzednik S.: Analiza parametrów gazu doskonałego przepływającego w rurociągu diatermicznym, Zesz. Nauk. Pol. Śl. (w druku).
[3] Szargut J.: Teoria procesów cieplnych, PWN, 1973.

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИНТЕГРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ
ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ ПАРАМЕТРЫ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА
ТЕКУЩЕГО В ГОРИЗОНТАЛЬНОМ АДИАТЕРМИЧЕСКОМ ТРУБОПРОВОДЕ

Р е з ю м е

Представлено аналитическое решение системы уравнений определяющих параметры идеального газа текущего в горизонтальном адиабатическом трубопровоге Определено условия и ограничения функции полученого решения.

THE ANALYTICAL INTEGRATION OF THE DIFFERENTIAL EQUATIONS
OF THE IDEAL GAS PARAMETERS, FLOWING
IN THE HORIZONTAL ADIATHERMYCAL PIPELINE

S u m m a r y

The solution of the basic differential equations system [2], determining the thermal parameters of the ideal gas flowing in the horizontal adiathermical pipeline, and obtained using the analytic methods has been given. The conditions and limits of the characteristic functions have been determined.