

Kazimierz KURPISZ

OGÓLNE ROZWIĄZANIE RÓWNAŃ BILANSU ENERGII
W STANIE NIEUSTALONYM DLA WYMIENNIKÓW CIEPŁA

Streszczenie. W pracy przedstawiono metodę, umożliwiającą wyznaczenie rozkładów temperatur w stanie nieustalonym w wymiennikach ciepła, dla których uwzględnia się wpływ pojemności cieplnej przegrody. W tym celu układ równań różniczkowych sprowadza się do układu równań całkowych i poszukuje się ogólnego rozwiązania tego układu.

Wskaz oznaczeń:

$Bi = \frac{\alpha \delta}{\lambda}$ - liczba Biota,

$Fo = \frac{a}{\delta^2} \frac{L}{W}$ - liczba Fouriera,

$K = \frac{\alpha A}{W}$ - liczba kryterialna,

L - długość wymiennika,

T - zredukowana temperatura płynu,

w - prędkość płynu,

W - pojemność cieplna płynu,

$Z = \frac{z}{L}$ - zredukowany wymiar wzdłuż przepływu,

δ - grubość przegrody,

$\tau = \frac{a}{\delta^2} \bar{\tau}$ - bezwymiarowy czas

$\left. \begin{aligned} x_1 &= K_1 Bi_1 \\ x_2 &= K_1 Bi_2 \\ y_1 &= K_2 Bi_1 \\ y_2 &= K_2 Bi_2 \end{aligned} \right\} \text{ - pomocnicze oznaczenia}$

Funkcje opisujące pole temperatur w wymienniku ciepła w stanie nieustalonym otrzymuje się z rozwiązania układu równań cząstkowych, będących równaniami bilansu energii. Równania te wyprowadza się przy typowych założeniach upraszczających [1]. Układ taki, przy stałych strumieniach, można sprowadzić do układu równań całkowych (por. [1])

$$T_1(Z, \tau) = \sum_{j=1}^2 \int_{Z_0}^Z \int_0^{\tau} T_j[\eta, \psi - \nu_j Fo_j(Z - \eta)] d\eta d\tau \quad (1)$$

$$\cdot K_{1,j}(Z, \eta, \tau, \psi) d\eta d\tau + f_1(\tau - \nu_1 Fo_1 Z) e^{-\nu_1 K_1 Z} \quad i=1,2.$$

gdzie jądro

$$K_{1j} = \nu_1 B_{1j} \exp[-(B_{11} + B_{12})(\tau - \psi)] \exp[-\nu_1 K_1(Z - \eta)],$$

a $\nu = +1$ odnosi się do wymiennika współprądowego, $\nu = -1$ do przeciwprądowego, zaś Z_{01} oznacza współrzędną przekroju wlotowego do wymiennika. Równania powyższe zostały wyprowadzone przy założeniu, że zredukowane temperatury T_1 w chwili początkowej równają się zero oraz przy warunkach brzegowych

$$T_1(Z_{01}, \tau) = f_1(\tau), \quad i = 1, 2. \quad (1a)$$

Dotyczą one przypadku pomijania wpływu przewodzenia ciepła w przegrodzie, co, jak wykazały obliczenia, jest w pełni dopuszczalne.

Układ równań (1) jest układem równań całkowych typu Volterry II rodzaju, który rozwiązuje się metodą kolejnych przybliżeń [2]. Każde z równań jest w innym układzie współrzędnych, co uniemożliwia znalezienie rezolwenty. Dla każdej funkcji $f_1(\tau)$ należałoby zatem szukać kolejnych przybliżeń od początku. Niedogodność tę można jednak obejść, stosując twierdzenie o splocie i wykorzystując liniowość układu. Zakłada się najpierw, że

$$f_2(\tau) = 0$$

i wyznacza funkcje T_1^1 , a następnie przez symetryczną zamianę wskaźników i przyjęcie $f_1(\tau) = 0$, wyznacza funkcje T_1^2 . Rozwiązanie ujmujące wpływ obydwóch funkcji $f_1(\tau)$ uzyskuje się przez superpozycję rozwiązań dla każdej funkcji z osobna. W dalszej części przedmiotem rozważań będą tylko funkcje T_1^1 . Stosując twierdzenie o splocie, funkcje $T_1(Z, \tau)$ mogą być zapisane w postaci

$$T_1(Z, \tau) = \int_0^\tau f_1(\tau - \psi) w_1(Z, \psi) d\psi \quad i = 1, 2 \quad (2)$$

Funkcje $w_1(Z, \tau)$, zwane wagowymi albo impulsowymi, są rozwiązaniami układu (1) przy przyjęciu

$$f_1(\tau) = \delta(\tau)$$

gdzie: $\delta(\tau)$ jest funkcją (dystrybucją) Diraca. Spełniają one zatem układ równań

$$w_1(Z, \tau) = \sum_{i=1}^2 \int_{Z_{01}}^Z \int_0^\tau w_j[\eta, \psi - \nu_1 \rho_{01}(Z - \eta)]$$

$$K_{1,j}(Z, \eta, \tau, \phi) d\phi d\eta + \delta(\tau - \nu_1 F_{o_1} Z) \exp(-\nu_1 K_1 Z) \quad (3)$$

$$w_2(Z, \tau) = \sum_{j=1}^2 \int_{Z_{o_2}}^Z \int_0^{\tau} w_j[\eta, \phi - \nu_2 F_{o_2}(T - \eta)] \cdot K_{2,j}(Z, \eta, \tau, \phi) d\phi d\eta$$

Uzyskane w ten sposób przybliżenia funkcji wagowych mają charakter uniwersalny. Można dla nich wyznaczyć ogólną zależność na m -te przybliżenie.

Dalsze rozważania ograniczone zostaną do wymiennika współprądowego ($Z_{o_1} = Z_{o_2} = 0$, $\nu_1 = \nu_2 = +1$). Można je także z powodzeniem, po pewnych modyfikacjach, zastosować do wymiennika przeciwprądowego.

Układ równań (3) poddaje się dwukrotnej transformacji Laplace'a według czasu i współrzędnej przestrzennej, otrzymując

$$\begin{aligned} w_1(q, s) &= \frac{K_1 Bi_1}{(F_{o_1} s + K_1 + q)(s + Bi_1 + Bi_2)} \tilde{w}_1(q, s) + \\ &+ \frac{K_1 Bi_2}{(F_{o_1} s + K_1 + q)(s + Bi_1 + Bi_2)} \tilde{w}_2(q, s) + \frac{1}{F_{o_1} s + K_1 + q} \\ &\tilde{w}_2(q, s) = \frac{K_2 Bi_1}{(F_{o_2} s + K_2 + q)(s + Bi_1 + Bi_2)} \tilde{w}_1(q, s) + \\ &+ \frac{K_2 Bi_2}{(F_{o_2} s + K_2 + q)(s + Bi_1 + Bi_2)} \tilde{w}_2(q, s) \end{aligned} \quad (4)$$

Z układu (4) można wprost wyznaczyć \tilde{w}_1 i \tilde{w}_2 , ale analityczne znalezienie retransformaty dla nich jest niemożliwe, stąd ta droga jest mniej przydatna.

Dla uproszczenia zapisu wprowadźmy pomocnicze oznaczenia

$$\begin{aligned} x_1 &= K_1 Bi_1, & x_2 &= K_1 Bi_2, & y_1 &= K_2 Bi_1, & y_2 &= K_2 Bi_2 \\ x_3 &= Bi_1 + Bi_2 \end{aligned}$$

Rozwiązania układu (4) można poszukiwać drogą kolejnych przybliżeń otrzymując

$$\begin{aligned} \tilde{w}_1(q, s) &= \frac{1}{F_{o_1} s + K_1 + q} + \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{N}_{1,m}(q, s) \\ \tilde{w}_2(q, s) &= \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{N}_{2,m}(q, s) \end{aligned} \quad (5a)$$

lub

$$w_1(Z, \tau) = \delta(\tau - Fc_1 Z) e^{-K_1 Z} + \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{N}_{1,m}(Z, \tau) \quad (5)$$

$$w_2(Z, \tau) = \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{N}_{2,m}(Z, \tau)$$

Szeregi $\tilde{N}_{1,m}$ i $\tilde{N}_{2,m}$ są transformowaną postacią rezolwenty układu (3), a ich składniki wyrażają się następującymi wzorami rekurencyjnymi [2]

$$\tilde{N}_{1,m} = x_1 \tilde{N}_{1,m-1} + x_2 \tilde{N}_{2,m-1} \quad (6)$$

$$\tilde{N}_{2,m} = y_1 \tilde{N}_{1,m-1} + y_2 \tilde{N}_{2,m-1},$$

gdzie:

$$\tilde{N}_{1,0} = \frac{x_1}{(F_0_1 s + K_1 + q)^2 (s + x_3)},$$

$$\tilde{N}_{2,0} = \frac{y_1}{(F_0_1 s + K_1 + q)(F_0_2 s + K_2 + q)(s + x_3)}$$

Funkcje te są wielomianami, przy czym w każdym składniku pojawi się współczynnik liczbowy, odpowiednia kombinacja liczb x_1, x_2, y_1, y_2 oraz jakaś funkcja Z i τ .

Gdyby wprowadzić pewne funkcje $G_{i,j}(Z, \tau)$ takie, których transformata dana będzie wzorem

$$\tilde{G}_{i,j}(q, s) = \frac{1}{(F_0_1 s + K_1 + q)^i (F_0_2 s + K_2 + q)^j (s + x_3)^k} \quad (7)$$

gdzie k jest sumą wykładników występujących przy x_1, x_2, y_1, y_2 , to łatwo można przez indukcję wykazać, że $\tilde{N}_{1,m}$ i $\tilde{N}_{2,m}$ zapisać można w postaci

$$\tilde{N}_{1,0}(Z, \tau) = x_1 G_{2,0}(Z, \tau)$$

$$\tilde{N}_{2,0}(Z, \tau) = y_1 G_{1,1}(Z, \tau)$$

$$\tilde{N}_{1,m}(Z, \tau) = x_1^{m+1} G_{m+2,0} + \sum_{l=1}^{m1} \sum_{k=0}^{m-2l+1} \alpha_{m,l,k+1} \cdot \quad (8)$$

$$\cdot x_1^k x_2^l y_1^l y_2^{m-2l-k+1} G_{k+1+1, m-k-1+1}(Z, \tau)$$

$$N_{2,m}(Z, \tau) = \sum_{l=1}^{m2} \sum_{k=0}^{m-2l+2} \beta_{m,1,k+1} x_1^k x_2^{l-1} y_1^l y_2^{m-2l-k+2} \cdot G_{k+1, m-k-1+2}(Z, \tau),$$

gdzie:

$$m1 = \text{ent} \left(\frac{m+1}{2} \right), \quad m2 = \text{ent} \left(\frac{m+2}{2} \right),$$

zaś α , β są współczynnikami liczbowymi. Sposób ich wyznaczania podaje algorytm I.

W dalszej kolejności należy retransformować funkcje $\tilde{G}_{m,n}(q, s)$. W tym celu wprowadza się funkcje $\tilde{\varepsilon}_{1,j}(\tau)$, których transformata dana jest zależnością

$$\tilde{\varepsilon}_{1,j}(s) = \frac{1}{[(F_01 - F_02) s + K_1 - K_2]^j (s + x_2)^j} \quad (9)$$

Rozważany będzie przypadek $m \geq n$. Gdy $m < n$, to z uwagi na symetryczną postać $G_{m,n}(Z, \tau)$, przez zmianę oznaczeń otrzymuje się rozważany przypadek.

Jeżeli $n=0$, to, jak łatwo się przekonać

$$G_{m,0}(Z, \tau) = \frac{Z^{m-1}}{(m-1)!} \varepsilon_{m-1,0}(\tau - F_01 Z) e^{-K_1 Z} \quad (10)$$

Wskaźnik "m-1" przy funkcji $\varepsilon_{1,j}(\tau)$ uwzględnia już fakt, że przy $G_{m,0}$ w równaniu (8) występuje x_1 w potęgę "m-1", stąd i wykładnik przy "s+x₂" wynosi "m-1".

Kolejne wyrażenia na $G_{m,n}(Z, \tau)$ można uzyskać, wykorzystując fakt, że

$$\tilde{G}_{i,j+1}(Z, s) = \int_0^Z \tilde{G}_{i,j}(\eta, s) e^{-(F_02 s + K_2)(Z - \eta)} d\eta$$

$$\tilde{G}_{i+1,j}(Z, s) = \int_0^Z \tilde{G}_{i,j}(\eta, s) e^{-(F_01 s + K_1)(Z - \eta)} d\eta$$

Operacja ta polega zaś na wyznaczaniu całki typu

$$y = \int_0^Z x^n e^{-ax} dx.$$

Ponieważ znany jest wzór ogólny na powyższą całkę, można podać ogólny wzór na funkcję $G_{m,n}(Z, \tau)$

$$G_{m,n}(Z, \tau) = e^{-K_1 Z} \sum_{i=0}^{m-1} \gamma_{n,i+1} \xi_{m+n-1, m+n-i-1} (\tau - P_{01} Z) \frac{Z^i}{i!} +$$

$$+ e^{-K_2 Z} \sum_{k=0}^{n-1} \varkappa_{n,k+1} \xi_{m+n-1, m+n-k-1} (\tau - P_{02} Z) \frac{Z^k}{k!} \quad (11)$$

Sposób wyznaczania współczynników liczbowych γ i \varkappa podaje algorytm II.

Pozostało tylko wyznaczenie funkcji $\xi_{m,n}(\tau)$. Podobnie jak poprzednio rozważany jest przypadek $m \geq n$.

Jeżeli $n = 0$, to

$$\xi_{m,0}(\tau) = \frac{\tau^{m-1}}{(m-1)!} e^{-x_3 \tau} H(\tau) \quad (12)$$

gdzie $H(\tau)$ jest funkcją Heaviside'a.

Wyznaczenie funkcji $\xi_{m,n}(\tau)$ stanowi identyczny problem $G_{m,n}$. Stąd

$$\xi_{m,n}(\tau) = H(\tau) \left[e^{-K_3 \tau} \sum_{i=0}^{m-1} \gamma_{n,i+1} \frac{d^{m-i-1}}{x^{m+n-i-1}} \frac{\tau^i}{i!} + \right.$$

$$\left. + e^{-y \tau} \sum_{k=0}^{n-1} \varkappa_{n,k+1} \frac{d^{m-k-1}}{x^{m+n-k-1}} \frac{\tau^k}{k!} \right], \quad (13)$$

gdzie:

$$y = \frac{K_1 - K_2}{P_{01} - P_{02}}$$

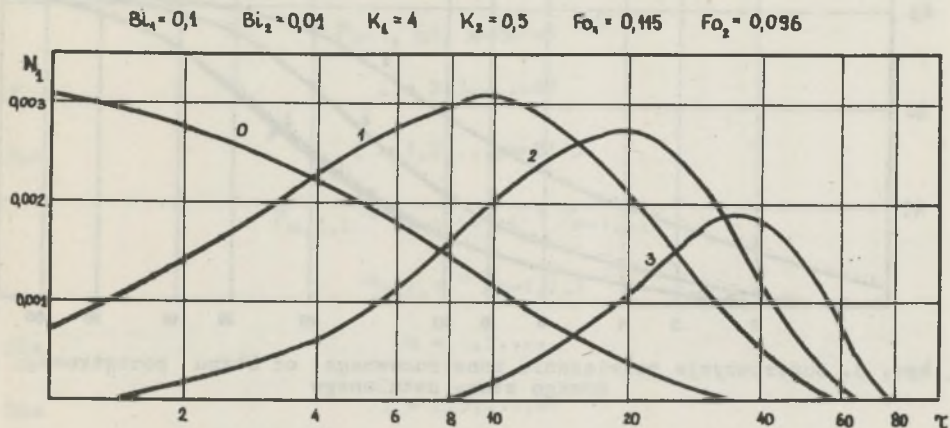
$$d = P_{01} - P_{02}$$

$$x = d x_3 - (K_1 - K_2)$$

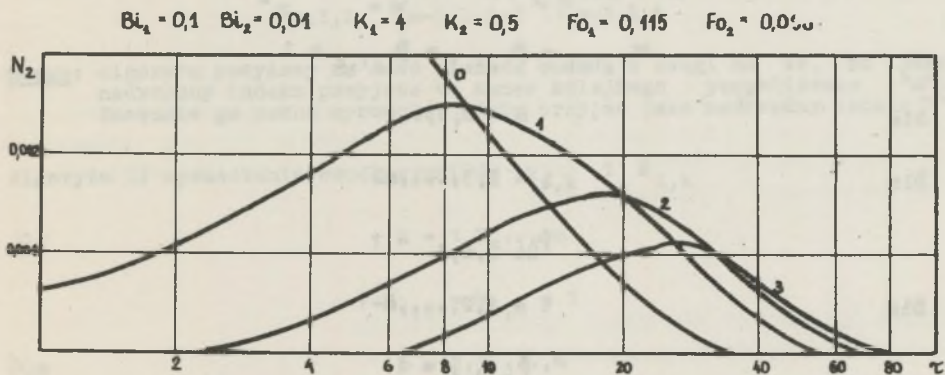
W ten sposób wszystkie elementy funkcji $w_1(Z, \tau)$ i $w_2(Z, \tau)$ zostały wyznaczone. Obliczenia całki (3) można przeprowadzić dwojako: albo wykorzystując fakt, że jedynie w funkcjach $\xi_{i,j}$ występuje czas, wprost je całkować (co np. jest szczególnie proste, gdy $f_1(\tau)$ jest funkcją skokową) albo numerycznie. Opracowanie procedur pozwalających na wyznaczanie współczynników α , β (wg algorytmu I), γ , \varkappa (wg algorytmu II), funkcji $G_{i,j}(Z, \tau)$ (wg (10), (11)), $\xi_{i,j}(\tau)$ (wg (12), (13)) oraz $N_{i,m}(Z, \tau)$ i

$N_{2,m}(Z, \tau)$ (wg wzoru (8)) nie przedstawia żadnych trudności, a czas obliczeń kolejnych przybliżeń na maszynie cyfrowej jest bardzo krótki.

Na wykresach 1 i 2 przedstawiono kolejne przybliżenie N_1 i N_2 .



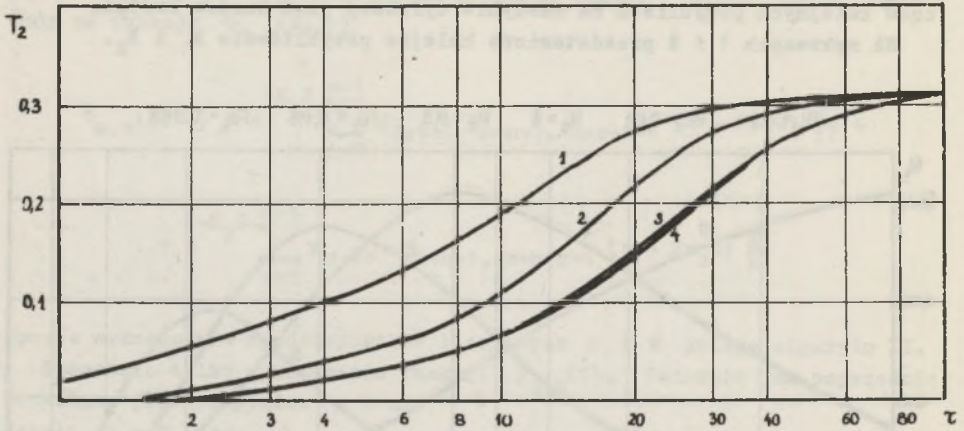
Rys. 1. Kolejne przybliżenie funkcji $N_{1,m}$



Rys. 2. Kolejne przybliżenie funkcji $N_{2,m}$

Jak widać, tworzą one szeregi dobrze zbieżne dla niezbyt dużych czasów. Dla czasów bardzo dużych zbieżność ta jest dość słaba, ale można w tym zakresie zastosować rozwiązanie asymptotyczne lub, w szczególnym przypadku np. skokowej zmiany temperatury na wlocie, rozwiązanie konstruowane z dwu stron, tzn. od stanu początkowego i cą nowego stanu ustalonego. Efekt takiego postępowania pokazano na rys. 3, gdzie dobrą zbieżność (dla skokowej zmiany temperatury na wlocie) osiąga się po 3-4 przybliżeniu. Z uwagi jednak na proste i szybkie wyznaczanie kolejnych przybliżeń postępowanie takie może okazać się niepotrzebne.

$$Bi_1 = 0,1 \quad Bi_2 = 0,01 \quad K_1 = 4 \quad K_2 = 0,5 \quad Fo_1 = 0,415 \quad Fo_2 = 0,096$$



Kys. 3. Superpozycja rozwiązania konstruowanego od stanu początkowego i nowego stanu ustalonego

Algorytm I wyznaczania współczynników $\alpha_{i,j,k}$ i $\beta_{i,j,k}$

$$m1 = \text{ent} \left(\frac{m+1}{2} \right), \quad m2 = \text{ent} \left(\frac{m+2}{2} \right)$$

$$\alpha_{1,1,1} = \beta_{1,1,1} = \beta_{1,1,2} = 1$$

Dla $m = 2, 3, \dots$

Dla $i = 2, 3, \dots, m2$

$$\beta_{2i-2,1,1} = 1$$

Dla $i = 1, 2, \dots, m-1$

$$\beta_{m,1,i} = 1$$

$$\alpha_{m,1,m} = m$$

$$\beta_{m,1,m} = 1$$

$$\beta_{m,1,m+1} = 1$$

$$\alpha_{m,1,1} = \beta_{m-1,1,1}$$

Dla $m = 3, 4, \dots$

Dla $i = 2, 3, \dots, m-1$

$$\alpha_{m,1,i} = \alpha_{m-1,1,i-1} + \beta_{m-1,1,i}$$

$$\beta_{m-1, m1, m-2m1+3} = 0$$

Dla $l = 2, 3, \dots, m1$

Dla $i = 1, 2, \dots, m-2l+3$

$$\beta_{m,l,i} = \alpha_{m-1,l-1,i} + \beta_{m-1,l,i}$$

$$\alpha_{m,l,1} = \beta_{m-1,l,1}$$

Dla $m = 4, 5, \dots$

Dla $l = 2, 3, \dots, m1$

Dla $i = 2, 3, \dots, m-2l+2$

$$\alpha_{m,l,i} = \alpha_{m-1,l,i-1} + \beta_{m-1,l,i}$$

Uwaga: algorytm powyższy ma dość złożoną budowę z uwagi na to, że jako nadrzędny indeks przyjęto tu numer kolejnego przybliżenia "m". Znacznie go można uprościć, gdyby przyjęć jako nadrzędny indeks "l"

Algorytm II wyznaczania współczynników $\gamma_{i,k}$ i $\mathcal{X}_{i,k}$

Dla $i = 1, 2, \dots, m$

$$\alpha_{1,i} = \alpha_{i,m} = 1$$

Dla $i = 2, 3, \dots, m$

Dla $j = m, m-1, \dots, 2$

$$\alpha_{1,j-1} = \alpha_{i-1,j-1} + \alpha_{i,j}$$

Dla $j = 1, 2, \dots, m$

$$\gamma_{n,j} = (-1)^n \alpha_{n,j}$$

Dla $i = 1, 2, \dots, m-1$

$$\mathcal{X}_{1,i+1} = 0$$

Dla $i = 1, 2, \dots, m$

$$\alpha_{i,1} = (-1)^{i+1} \alpha_{i,1}$$

Dla $i = 1, 2, \dots, m-1$

Dla $j = 1, 2, \dots, m-1$

$$\alpha_{i+1, j+1} = \alpha_{i, j}$$

LITERATURA

- [1] Gdula S.J., Kurpisz K.: Nieustalone pole temperatur w grubościennych wymiennikach ciepła, Ref. Symp. Wymiany Ciepła i Masy, Jabłonna 1974.
 [2] Pogorzelski W.: Równania całkowe i ich zastosowania, t. II PWN, Warszawa 1958.

ОБОЩЕННЫЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ БАЛАНСА ЭНЕРГИИ ДЛЯ ТЕПЛООБМЕННИКОВ В НЕСТАЦИОНАРНОМ СОСТОЯНИИ

Р е з ю м е

В работе описано метод для обозначения температур в теплообменниках с толстыми стенками в нестационарном состоянии. Для этого систему дифференциальных уравнений баланса энергии преобразовано в систему интегральных уравнений и решено в обобщенном виде.

GENERAL SOLUTION OF THE ENERGY BALANCE-EQUATIONS FOR HEAT EXCHANGERS IN NON-STEADY-STATE

S u m m a r y

In this paper a method for general solution of non-steady temperature field in heat exchangers with thick walls is considered. For this purpose the system of the differential equations is transformed to the system of the integral equations and the general solution of the latter is sought.