

**ZESZYTY
NAUKOWE
POLITECHNIKI
ŚLĄSKIEJ**

ENERGETYKA

**Z. 64
GLIWICE
1978**

POLITECHNIKA ŚLĄSKA

ZESZYTY NAUKOWE

Nr 542

WŁODZIMIERZ BURZYŃSKI

MECHANIKA UKŁADÓW
ODKSZTAŁCALNYCH

PL ISSN 0372-9796

Wydano w XX-lecie PTMTS

GLIWICE

1978

DO DRUKU PRZYGOTOWAŁ
Doc. dr inż. Józef Wojnarowski

REDAKTOR NACZELNY WYDAWNICTW UCZELNIANYCH
POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

Jan Bandrowski

REDAKTOR DZIAŁU

Gerard Kosman

SEKRETARZ REDAKCJI

Jan Znamirowski

OPRACOWANIE REDAKCYJNE

Kazimiera Rymarz

Wydano za zgodą
Rektora Politechniki Śląskiej

Dział Wydawnictw Politechniki Śląskiej
Gliwice, ul. Kujawska 2

Nakł. 500+55 Ark. wyd 20,1 Ark. druk. 18,12 Papier offset kl. III. 70x100, 90 g
Oddano do druku 7. 12 '77 Podpis. do druku 14. 03. 78 Druk ukończ. w czerwcu 1978
Zam. 1894/77 Cena zł 50,-

Skład, fotokopie, druk i oprawę
wykonano w Zakładzie Graficznym Politechniki Śląskiej w Gliwicach

SPIS TREŚCI

	Str.
Przedmowa	5
Prof. dr Włodzimierz Burzyński - sylwetka wybitnego współczesnego inżyniera-badacza	9
Włodzimierz Burzyński - wspomnienie pośmiertne	11
 Rozdział I	
OGÓLNE WIADOMOŚCI Z MECHANIKI UKŁADÓW ODKSZTAŁCALNYCH	15
Wstęp	17
1. Przemieszczenie i odkształcenie	19
2. Siła i naprężenie	40
3. Prawo wiązaca i energia odkształcenia	69
4. Wyężenie i bezpieczeństwo	97
 Rozdział II	
PRĘT PROSTY W PRZYPADKACH PODSTAWOWYCH	129
5. Opis geometryczny i uwagi wstępne	131
6. Równomierne rozciąganie lub ściskania	137
7. Proste równomierne zginanie	145
8. Ukośna równomierne zginanie	157
9. Mimośrodkowe rozciąganie lub ściskania	180
10. Równomierne skręcanie	190
11. Liniowo zmienne zginanie	226
12. Superpozycja przypadków podstawowych	281
 Wykaz ważniejszych prac naukowych Prof. dr inż. Włodzimierza Burzyń- skiego	 285
 Streszczenia	 287

PRZEDMOWA

Oddajemy w ręce specjalistów z dziedziny mechaniki pozycję o wyjątkowym znaczeniu.

Praca ta, poza niewątpliwymi walorami naukowo-dydaktycznymi, uzasadniającymi wydanie jej w naszych zeszytach, należy do pośmiertnej spuścizny prof. dr inż. Włodzimierza BURZYŃSKIEGO. Nieoczekiwana choroba i śmierć uniemożliwiły prof. Włodzimierzowi Burzyńskiemu wydanie Mechaniki układów odkształcalnych - efektu swojej długoletniej pracy naukowo-dydaktycznej, przeprowadzonej na Politechnikach Lwowskiej i Śląskiej.

Publikację wydajemy w wersji oryginalnej, opracowanej przez prof. Włodzimierza Burzyńskiego. W związku z tym w pracy nie jest stosowany układ jednostek SI.

Wydanie tej pracy nieprzypadkowo zbiega się z dwudziestolecie Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej. Pragniemy w ten sposób złożyć hołd pamięci wielkiemu Uczonemu i Człowiekowi, który od 1966 roku był Członkiem Honorowym PTMTSu.

Przypuszczamy, że poprzedzenie pracy "Sylwetką" skreśloną onegdaj przez prof. dr inż. M.T. Hubera i wspomnieniem pośmiertnym napisanym przez prof. dr inż. Mariana Janusza przybliży współczesnemu czytelnikowi osobowość tego wielkiego Uczonego.

Równocześnie serdecznie dziękuję Pani Irenie Burzyńskiej za zaufanie i udostępnienie materiałów, które złożyły się na niniejszą edycję.

Doc. dr inż. Józef Wojnarowski

Przewodniczący Gliwickiego Oddziału PTMTS

Gliwice, sierpień 1977 r.



Prof. dr WŁODZIMIERZ BURZYŃSKI

Sylwetka wybitnego współczesnego inżyniera-badacza

Spośród wielu setek studentów wydziału Inżynierii Politechniki Lwowskiej w okresie mej działalności na katedrach Mechaniki w tej uczelni Włodzimierz Burzyński wyróżniał się szczególnie wybitnym uzdolnieniem i zamiłowaniem do pracy badawczej w dziedzinie zagadnień Mechaniki Technicznej jako głównej podstawy naukowej wielu działów techniki. Jego walory naukowe rozwijały się szybko i pięknie w latach kiedy pracował jako mój asystent. Widowym dowodem tego była Jego praca doktorska nt. "Studium nad hipotezami wyężenia", której temat był jednym z kilku obmyślonych przezeń samodzielnie i przedłożonych mi do wyboru. Już w tej pracy mieści się idea uogólnienia hipotezy energetycznej z r. 1904, ogłoszonej przeze mnie i uznanej obecnie prawie powszechnie, z zastrzeżeniem stosowalności tylko do metali elastoplastycznych - uogólnienia takiego, które by było stosowane do innych materiałów technicznych makroizotropowych, jak kamienie, beton itp. Burzyński uprzedził tą pracą ogłoszenie niemal identycznego pomysłu naukowego przez przodującego obecnie badacza - prof. F. Schleichera.

Jego zmysł krytyczny, wyostrzony później studiami specjalnymi za granicą jako stypendysty i gruntownym przygotowaniem matematyczno-przyrodniczym, przebija z kilku publikacji naukowych, jak np. "O wyboczeniu posprężystym" (1930), "O ograniczeniach twierdzenia Castigliano'a", "W sprawie naprężeń w przegrodach" (1931) i innych.

Należy zwrócić uwagę na wysokie walory Jego pracy habilitacyjnej nt. "O rozwinięciu potencjału sprężystości", chociaż teorii tam przedstawionej nie wyzyskał później technicznie, jak można się było spodziewać; niewątpliwie z powodu nawału tematów konkretnych, jakie Mu nastroczała praktyka inżynierska w wielkim stylu. Tak powstała "Nowa metoda obliczenia i wykonania łuku betonowego i żelbetowego" (1936) oraz szereg innych gruntownych i twórczych prac, których nie mogę wymienić, pisząc ten artykuł na wczasach wakacyjnych.

Prof. W. Burzyński zdradzał często swą rozległą i gruntowną wiedzę w recenzjach, książkach i pracach z różnych dziedzin mechaniki technicznej, ogłoszonych w kraju i za granicą. Po mistrzowsku wyławiał przy tym usterki nieraz nie dostrzegane przez wielu specjalistów.

Zdaniem moim prof. W. Burzyński należy do grona - niestety bardzo uszczuplonego przez wojnę - najwybitniejszych naszych inżynierów-badaczy starszej generacji. Jego znaczenie dla współczesnego gospodarstwa pań-

stwowego polega nie tylko na wartościach często naukowych, jakie wykazał, ale także na wieloletnim doświadczeniu jako wybitnego twórczego konstruktora, tj. inżyniera, który podstawy naukowe techniki umie wyzyskać znakomicie w zaprojektowaniu i wykonaniu budowli inżynierskich.

/-/ Prof. dr inż. M.T. Huber

Zakopane, 25 lipca 1950 r.

"Anna - Maria"

WŁODZIMIERZ BURZYŃSKI - WSPOMNIENIE POŚMIERTNE^{x)}

Profesor zwyczajny mechaniki technicznej, docent habilitowany mechaniki kontinów, doktor nauk technicznych, inżynier dróg i mostów - Włodzimierz BURZYŃSKI - urodził się w Przemyślu 29 kwietnia 1900 r. Do szkoły średniej uczęszczał w Przemyślu, gdzie w 1918 r. złożył egzamin dojrzałości. Studia wyższe odbył na Wydziale Inżynierii Lądowej i Wodnej Politechniki Lwowskiej; dyplom inżyniera dróg i mostów uzyskał w 1925 r. Odbył ponadto dodatkowe studia w latach 1928/29 na Uniwersytecie w Getyndze i na Politechnice w Zurichu jako stypendysta ówczesnego Funduszu Kultury Narodowej.

Prof. dr inż. Włodzimierz BURZYŃSKI od roku 1922 do roku 1939 pracował bez przerwy na Politechnice Lwowskiej, przechodząc kolejne stopnie naukowe w Katedrze Mechaniki. Samodzielne wykłady rozpoczął prof. BURZYŃSKI w 1927 r., prowadząc je w zakresie różnych gałęzi mechaniki na Wydziale Mechanicznym oraz Wydziale Inżynierii Lądowej i Wodnej Politechniki Lwowskiej.

Prof. W. BURZYŃSKI posiadał wszystkie stopnie akademickie w polskim szkolnictwie wyższym. Na doktora nauk technicznych promował się w Politechnice Lwowskiej 5 maja 1928 r., na docenta mechaniki kontinów habilitował się również w tej uczelni 8 listopada 1933 r. Na profesora nadzwyczajnego Katedry Mechaniki Technicznej na Wydziale Mechanicznym Politechniki Lwowskiej powołany został 29 września 1934 r.

Okres wojny i początek okresu powojennego, tj. czas od września 1939 r. do lipca 1946 r. spędził prof. BURZYŃSKI we Lwowie, sprawując obowiązki profesora Katedry Mechaniki Technicznej, ponadto dziekana Wydziału Mechanicznego, a także dyrektora względnie zastępcy dyrektora Lwowskiego Instytutu Politechnicznego, na który zamieniona została Politechnika Lwowska po objęciu jej przez władzę radziecką.

W połowie lipca 1946 r. przybył prof. W. BURZYŃSKI do Gliwic, gdzie objął stanowisko profesora zwyczajnego i kierownika Katedry Mechaniki Technicznej na Wydziale Mechanicznym Politechniki Śląskiej, którą to katedrę zorganizował, stawiając ją na bardzo wysokim poziomie naukowym i dydaktycznym, łącznie z nowoczesnym laboratorium wytrzymałościowym. Przygotował tutaj do pracy naukowej i dydaktycznej w zakresie mechaniki technicznej cały zastęp pracowników, a między nimi dzisiejszych docentów i

^{x)} Wygłoszone na posiedzeniu Oddziału PTMTS dnia 5.X.1970 r. przez prof. dr inż. M. Janusza i opublikowane w zeszytach Mech. Teoret. i Stos. 2,9 (1971) s. 227-229.

profesorów. Był również dyrektorem Zakładu Badania Materiałów Politechniki Śląskiej, ponadto współorganizatorem Poradni Racjonalizatorskiej przy tym zakładzie.

Od roku 1936 był prof. BURZYŃSKI stałym członkiem Polskiego Komitetu Normalizacyjnego i przewodniczył jednej z Podkomisji Komitetu. W 1928 r. został zaproszony do współpracy z wydawnictwem "Zentralblatt für Mechanik". W 1938 r. został mianowany członkiem korespondentem ówczesnej Akademii Nauk Technicznych oraz współpracownikiem Komisji Technicznej Polskiej Akademii Umiejętności. Był członkiem czynnym Śląsko-Dąbrowskiego Towarzystwa Naukowego i członkiem założycielem Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej. W dniu 28 maja 1966 r. na wniosek Oddziału Gliwickiego tego Towarzystwa prof. dr inż. Włodzimierz BURZYŃSKI został obrany członkiem honorowym Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej.

Prof. BURZYŃSKI wydał drukiem ponad 30 oryginalnych prac naukowych w zakresie mechaniki ośrodków ciągłych. Rezultatami swoich prac przyczynił się bardzo poważnie do rozwoju nauki polskiej w danej dziedzinie, rozszerzył jej imię w skali ogólnokrajowej oraz poza granicami kraju.

Jako badacz naukowy najwyższego stylu ujawnia się Włodzimierz BURZYŃSKI przede wszystkim w swoich pracach traktujących o wyciężeniu. Prace te kwalifikują ich autora do grona najpoważniejszych znawców tej gałęzi wiedzy i zapewniają mu najbardziej poczesne miejsca w literaturze przedmiotu. Można z całą pewnością twierdzić, że w pracach swoich nad wyciężeniem podążał BURZYŃSKI po linii wytyczonej przez swojego mistrza Maksymiliana Tytusa Hubera, a prowadzącej do ustalenia hipotezy wyciężenia możliwie najbardziej zgodnej z wynikami doświadczalnymi. Ideę hipotez wyciężenia usiłował W. BURZYŃSKI skutecznie rozszerzyć w kierunku postawienia hipotezy uniwersalnej, nadającej się równocześnie do materiałów plastycznych i kruchych. Ukoronowaniem tych prac było "Studium nad hipotezami wyciężenia", (Akademia Nauk Technicznych, Lwów 1929). W ślad za tą pracą poszły dalsze o podobnej tematyce, jak np. "Teoretyczne podstawy hipotez wyciężenia" ("Czasopismo Techniczne", Lwów 1929) oraz "Über die Anstrengungshypothesen", "Schweizerische Bauzeitung" (1930 r.).

Drugą grupę prac naukowo-badawczych prof. BURZYŃSKIEGO stanowią prace z zakresu sprężystości. Są to prace pionierskie jak na czasy, w jakich powstały, nie zatracającą jednak swojej wartości i obecnie.

Odnaczają się one szczególnie precyzyjną analizą matematyczną, wynikającą z głębokiego merytorycznego ujęcia treści rozwiązanych zagadnień. Interesuje się BURZYŃSKI w tej grupie swoich prac specjalnie metodami energetycznymi, a wśród nich dwoma twierdzeniami minimalnymi teorii sprężystości i zastosowaniem ich do rozwiązań przybliżonych. Można tu wyróżnić następujące pozycje: "O ograniczeniach twierdzenia Castigliano" (Czasopismo Techniczne, Lwów 1931 r.), "O rozwinięciu potencjału sprężystości" (Akademia Nauk Technicznych, Lwów 1932 r.), "O dwóch twierdzeniach

minimalnych teorii sprężystości i zastosowaniu ich do rozwiązań przybliżonych" (Czasopismo Techniczne, Lwów 1933 r.), "Przybliżone metody teorii sprężystości" (Życie Techniczne, Lwów 1934 r.). Po wojnie pojawiła się jedna z najważniejszych prac prof. BURZYŃSKIEGO pod tytułem "O niektórych niedomaganiach i koniecznych uzupełnieniach de Saint-Venantowskiej teorii prętów prostych" (Wrocławskie Towarzystwo Naukowe, Wrocław 1951 r.).

Poza pracami wymienionymi pojawił się cały szereg innych prac teoretycznych i praktycznych. Niezależnie bowiem od pracy czysto naukowej i dydaktycznej prof. BURZYŃSKI miał rozległą praktykę zawodową w dziedzinie budownictwa lądowego i wodnego, jak budowy dróg, tuneli, mostów, przegród dolin itp. Był autorem kilkunastu poważnych projektów budowlanych, między innymi był posiadaczem rekordu rozpiętości w budownictwie żelbetowym w Polsce z tytułu wykonywania projektu mostu łukowego na Sole w Tresnej-Czernichowie i kierownictwa budowy tego mostu. Występował często jako rzeczoznawca przy budowie wielkich obiektów, np. przegród dolin w Porębcie i Rożnowie.

W powiązaniu z działalnością inżyniersko-konstrukcyjną prof. BURZYŃSKIEGO można wymienić dla przykładu następujące publikacje: "Z teorii łuków bezprzegubowych. Księga pamiątkowa ku uczczeniu prof. dra inż. M. Thulliego" (Lwów 1931), "Nowa metoda obliczania i wykonania łuku betonowego i żelbetowego", Referat na II Zjazd Inżynierów Budowlanych w Katowicach - 1935 r., "W sprawie naprężeń w przegrodach" (Czasopismo Techniczne, Lwów 1931 r.).

Wśród publikacji naukowych prof. BURZYŃSKIEGO znajdują się ponadto pozycje z zakresu wyboczenia także posprężonego, z dziedziny zagadnień pływających, teorii powłok cienkościennych i inne.

Prof. BURZYŃSKI był świetnym wykładowcą i wychowawcą wielu pokoleń studentekich oraz inżynierskich. Był autorem dwóch skryptów z Mechaniki Ogólnej i z Wytrzymałości Materiałów.

Należy jeszcze na zakończenie zauważyć, że po przybyciu w 1946 r. do Gliwic i objęciu stanowiska profesora zwyczajnego i kierownika Katedry Mechaniki Technicznej na dawnym Wydziale Mechanicznym Politechniki Śląskiej, prof. BURZYŃSKI był bardzo aktywny naukowo, dydaktycznie i zawodowo aż do unieruchomienia go przez obłożną i nieuleczalną niestety chorobę w 1949 r. Opublikował w tym czasie 5 prac naukowych, w tym jedną nader poważną na temat "De Saint-Venantowskiej teorii prętów prostych".

Równolegle do swoich zajęć naukowo-dydaktycznych współpracował prof. Burzyński bardzo intensywnie z odbudowującym się powojennym przemysłem polskim, wydając dużo orzeczeń naukowych i ekspertyz, przeprowadzając wiele obliczeń, jak dźwigów portowych dla Gdyni i Szczecina, fundamentów pod maszyny, kominów itp.

Z powodu trwałego i ciężkiego schorzenia przestał prof. BURZYŃSKI pracować pod koniec 1949 r. i 17 lipca 1970 r. zmarł ku wielkiemu żalowi nas wszystkich, Jego dawnych studentów, uczniów i współpracowników, ku wiel-

kiej stracie nauki polskiej. Jednakowoż dawni studenci i współpracownicy prof. BURZYŃSKIEGO są dzisiaj w niemałej ilości doktorami nauk technicznych oraz samodzielnymi pracownikami nauki i kształcą dalsze pokolenia studenckie oraz dalsze pokolenia pracowników naukowo-badawczych. W ten sposób powstała szkoła BURZYŃSKIEGO jako kontynuacja szkoły HUBERA, którego BURZYŃSKI był uczniem.

Prof. zw. dr inż. Włodzimierz BURZYŃSKI dobrze przyełużył się nauce polskiej w zakresie mechaniki stosowanej i chociaż odszedł od nas na zawsze, żyć będzie zawsze wśród nas.

Cześć Jego Pamięci.

POLSKIE TOWARZYSTWO
MECHANIKI TEORETYCZNEJ
I STOSOWANEJ

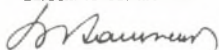
ZGODNIE Z UCHWAŁĄ VIII – GO
ZJAZDU DELEGATÓW P.T.M.T.S.
ODBYTEGO DNIA 28 MAJA 1966 R.,
NADAJE

PANU PROFESOROWI DOKTOROWI
WŁODZIMIERZOWI
♦ BURZYŃSKIEMU ♦

W UZNANIU JEGO POWAŻNEGO
WKŁADU DO NAUKI POLSKIEJ NA
POLU MECHANIKI ORAZ ZASŁUG
POŁOŻONYCH DLA TOWARZYSTWA
GODNOŚĆ

CZŁONKA HONOROWEGO
POLSKIEGO TOWARZYSTWA
MECHANIKI TEORETYCZNEJ
I STOSOWANEJ

SEKRETARZ GENERALNY



/PROF. DR. BOGUMIŁ STANISZEŃSKI/

PRZEWODNICZĄCY



/PROF. DR. JERZY MUTERNI/



DYPLOM PTMTS

R o z d z i a ł I

OGÓLNE WIADOMOŚCI Z MECHANIKI
UKŁADÓW ODKSZTAŁCALNYCH

W s t ę p

Mechanika układów sztywnych pozwala nam rozwiązać wiele interesujących i ważnych zagadnień. Niemniej nie jest ona nauką zupełną, albowiem pozostawia nierozstrzygniętą wielką grupę zagadnień niewyznaczalnych, ponadto zaś jest technicznie niewystarczającą, albowiem z natury rzeczy nie liczy się z osłabieniem mechanicznych własności materii, spowodowanych obciążeniem.

Tym samym na gruncie tej nauki nierozwiązalne jest najważniejsze i ostateczne zagadnienie mechaniki technicznej, jakie sformułować możemy następująco: układ materialny rzeczywisty danej postaci geometrycznej podparto i obciążono w określony sposób; ile razy należy zwiększyć obciążenia, aby zniweczyć całkowicie nośność tego układu? Odnośny współczynnik zwiększający nazywamy stopniem bezpieczeństwa danego układu. Cały szereg innych zagadnień stanowi albo fragment poprzedniego albo jego odmienną formę.

Tak tedy najogólniejszym celem mechaniki technicznej jest wyznaczenie współczynnika pewności rzeczywistych układów materialnych. Sprawie tej poświęcimy niniejszy kurs.

1. PRZEMIESZCZENIE I ODKSZTAŁCENIE

Założenie idealnej sztywności materii prowadzi do rezultatu, że najogólniejszy ruch ciała sztywnego da rozbić się w nieskończenie wiele sposobów na przesunięcie i obrót. W szczególności drobny (w mechanice teoretycznej w nieco innym znaczeniu - chwilowy) ruch takiego ciała określają równania:

$$u = u_0 - \psi_y + \chi_z,$$

$$v = v_0 - \varphi_z + \psi_x,$$

$$w = w_0 - \chi_x + \varphi_y,$$

w których u_0, v_0, w_0 oznaczają składowe przesunięcia ciała, zaś φ, χ, ψ składowe drobnego obrotu ciała w kierunku względnie dokoła osi prostokątnego układu współrzędnych x, y, z . W ten sposób na przemieszczenia u, v, w punktu (x, y, z) układu w kierunku osi x, y, z składają się przemieszczenia wynikające z przesunięcia ciała układu i przemieszczenia wynikające z obrotu układu. W szczególności przemieszczenia punktu $(0, 0, 0)$ wynoszą u_0, v_0, w_0 , to znaczy że są równe składowym przesunięciom, z czego wynika, że oś obrotu ustalono w tych równaniach przez początek układu współrzędnych.

Odrzucając założenie o sztywności materii, jako mało wprawdzie, ale zanadto odbiegające od rzeczywistości doświadczalnej, musimy je zastąpić innym, bardziej do tej rzeczywistości zbliżonym. Zakładamy w tym celu, że ciała materialne są jednolite, to znaczy, że wypełniają zajęętą przez siebie przestrzeń w sposób ciągły, tworząc tzw. kontinuum materialne, ponadto rozszerzamy stosownie równania określające drobne przemieszczenia tego rodzaju układu. Bardzo ważne jest przy tym, aby pamiętać, że w każdym wypadku należy tego rozszerzenia dokonać tak, by zachować warunki nierozdzielności poszczególnych, drobnych cząstek ciała lub też skończonych części układu złożonego.

Przyjrząwszy się ostatnim równaniom widzimy, że w prostocie swej nie są one nawet najogólniej liniowe. Najprostsze przeto ich rozszerzenie otrzymamy, jeśli przyjmiemy, że punkty układu materialnego przemieszczają się tak, że proste pozostają prostymi, równoległe równoległymi, tj., że przemieszczenia są dowolnie liniowymi funkcjami współrzędnych. Gdy stare

równania zawierają sześć stałych, równania rozszerzone mogą ich zawierać dwanaście. Obojętne jest, jak te stałe oznaczymy; z uwagi na dotychczasowe i przyszłe nadajemy nowym równaniom następującą postać:

$$\begin{aligned} u &= u_0 + \varepsilon_x x + \left(\frac{1}{2} \gamma_z - \psi\right) y + \left(\frac{1}{2} \gamma_y + \chi\right) z, \\ v &= v_0 + \left(\frac{1}{2} \gamma_z + \psi\right) x + \varepsilon_y y + \left(\frac{1}{2} \gamma_x - \varphi\right) z, \\ w &= w_0 + \left(\frac{1}{2} \gamma_y - \chi\right) x + \left(\frac{1}{2} \gamma_x + \varphi\right) y + \varepsilon_z z \end{aligned} \quad (1.1)$$

W równaniach (1.1) poznajemy od razu dawne dodajniki i dostrzegamy nowe. Część nową nazywamy przemieszczeniami wynikającymi z odkształcenia układu. Sześć wielkości niemianowanych - $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$ - nazywamy składowymi stanem odkształcenia. Muszą one być małe w tym sensie, w jakim małe są: φ, χ, ψ .

Powyżej przyjęliśmy, że składowe ε, γ są wielkościami stałymi to znaczy aktualnymi dla wszystkich punktów układu. Tego rodzaju odkształcenie nazywamy jednorodnym. W takim szczególnym wypadku, podobnie jak mówimy o przesunięciu ciała, czy o obrocie ciała, możemy równie ogólnie mówić o odkształceniu ciała jako całości, tj. bez wyszczególnienia tego czy innego jego miejsca.

Rozważmy, czym charakteryzuje się odkształcenie jednorodne. Odrzućmy z równań (1.1) część określającą ruch układu sztywnego i zbadajmy pozostałą resztę, tj.:

$$\begin{aligned} u &= \varepsilon_x + \frac{1}{2} \gamma_z y + \frac{1}{2} \gamma_y z, \\ v &= \frac{1}{2} \gamma_z x + \varepsilon_y y + \frac{1}{2} \gamma_x z, \\ w &= \frac{1}{2} \gamma_y x + \frac{1}{2} \gamma_x y + \varepsilon_z z. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Pierwotny, dowolnie wybrany punkt (x, y, z) , przejdzie w punkt $(x + u, y + v, z + w)$. Z liniowej budowy równań (2.1) wynika, że istotnie płaszczyzna jako utwór również analitycznie liniowy przejdzie w płaszczyznę, zatem prosta jako krawędź dwóch płaszczyzn przekształci się nadal w prostą. Ponieważ współczynniki ε, γ są stałe, przeto płaszczyzny równoległe przejdą znowu w takie, a proste równoległe przekształcą się ponownie w takie proste. W rezultacie układ odkształcony wypełniony będzie w dalszym ciągu bez luk, tak, że warunki nierozdzielności będą w zupełności zachowane. Dowolne powierzchnie przejdą przy tej sposobności w spowino-

wacone, tj. zachowają swój stopień analityczny. Tak np. kula odkształci się w elipsoidę trójosiową.

Znaczenie wielkości ε_x wyjdzie na jaw, gdy do równań (2.1) zastosujemy zasadę superpozycji. Weźmy tedy pod uwagę wypadek, w którym wszystkie składowe z wyjątkiem ε_x są zerami, tak, że przemieszczenia określają równania:

$$u = \varepsilon_x x, \quad v = 0, \quad w = 0.$$

Odcinek równoległy do osi x -ów, ograniczony odcięzami a i b , czyli o długości: $b - a$, po odkształceniu ograniczony będzie odcięzami $a + \varepsilon_x a$, tudzież $b + \varepsilon_x b$, tj. będzie dłuży:

$$(b + \varepsilon_x b) - (a + \varepsilon_x a) = (b - a)(1 + \varepsilon_x),$$

to znaczy, że każda jednostka jego pierwotnej długości przyrośnie o ε_x . Przeto wielkość ε_x jest wydłużeniem jednostkowym w kierunku osi x -ów; analogiczne znaczenia mają ε_y i ε_z . Będziemy ε nazywać *z d ł u ż e m*; ujemny zdłuż jest *s k r ó t e m*.

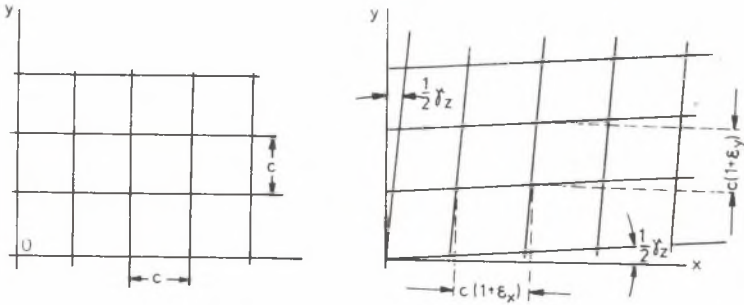
Weźmy z kolei pod uwagę wypadek, w którym wszystkie wielkości z wyjątkiem γ_z są zerami, a przemieszczenia określają wobec tego równania:

$$u = \frac{1}{2} \gamma_z y, \quad v = \frac{1}{2} \gamma_z x, \quad w = 0.$$

Widzimy, że przekroje ciała płaszczyznami prostopadłymi do osi z -ów przemieszczają się same w sobie. Umieścimy się wobec tego w którejkolwiek z nich. Proste równoległe do osi x -ów przemieszczają się w proste nachylone względem tej osi pod kątem $\frac{1}{2} \gamma_z$; tak samo nachylą się pod kątem $\frac{1}{2} \gamma_z$ proste równoległe pierwotnie do osi y -ów. W rezultacie pierwotnie prosty kąt zawarty między kierunkami $+x$ i $+y$ lub też $-x$ i $-y$ zmniejszy się o γ_z ; na odwrót, kąt prosty zawarty między osiami $+x$ i $-y$ lub $-x$ i $+y$ zwiększy się o γ_z . Tak zdefiniowane γ_z uważać będziemy za dodatnie. Analogiczne umowy dotyczą wielkości γ_x i γ_y . Składową typu γ będziemy nazywać *s k o s e m*.

Widzimy ostatecznie, na czym polega odkształcenie jednorodne. Wyobraźmy sobie, że w myśli podzieliliśmy układ trzema zbiorami płaszczyzn na sześciiany wspólnej wielkości. Składowe ε powodują, że sześciiany te przechodzą w prostopadłościany, składowe zaś γ sprawiają, iż prostopadłościany odkształcają się w równoległościany. Rys. 1.1 ilustruje sytuację przed i po odkształceniu w przekroju płaszczyzną $z = 0$.

Nie należy przy tym zapominać, że podany rysunek jest obrazem równań (2.1). W istocie zaś, zgodnie z równaniami (1.1), do przemieszczeń wynikłych z odkształcenia układu dołączyć jeszcze należy ruch wynikły z prze-



Rys. 1.1

sunięcia i obrotu ciała jako sztywnej całości. Wielkości określające ten dodatkowy ruch, tj. u_0, v_0, w_0 tudzież φ, χ, ψ są z reguły zawsze dane. Są one mianowicie określone tzw. warunkami brzegowymi zagadnienia. Należy to rozumieć w ten sposób, iż położenia niektórych punktów ciała po mających się dokonać całkowitych przemieszczeniach (1.1) są z góry ustalone tekstem zadania. Po prostu owe punkty układu są w określony sposób prowadzone lub podparte. Z tego to powodu te rodzaje warunków brzegowych nazywamy warunkami podporowymi. Jak z powyższego wynika, warunki podporowe mają charakter geometryczny.

Wyżej przeprowadzona operacja nakładania względnie rozbijania w dowolnym porządku skutków poszczególnych przyczyn jest - jak wiadomo - stosowaniem tzw. zasady superpozycji. Zastanówmy się dodatkowo, czy zasada ta była tu stosowalna. Weźmy pod uwagę prosty wypadek następujący: układ doznaje kolejno dwóch odkształceń ϵ' i ϵ'' w tym samym kierunku. Pierwotna długość c przybiera wskutek przyczyny ϵ' długość: $c(1 + \epsilon')$. Z kolei ta znów uważana za pierwotną, zmienia się na nową $c(1 + \epsilon')(1 + \epsilon'') = c(1 + \epsilon' + \epsilon'' + \epsilon'\epsilon'')$. Z drugiej strony z zastosowania zasady superpozycji wynika, że rzecz należy traktować tak, jak gdyby układ doznał w rezultacie odkształcenia $\epsilon' + \epsilon''$ czyli, że jego zdeformowana długość powinna wynosić $c(1 + \epsilon' + \epsilon'')$. Oba wyniki będą zgodne, jeśli w pierwszym skreślimy dodatek $\epsilon' + \epsilon''$ do tego zaś konieczne jest, by ϵ' i ϵ'' były w wielkościach małych w porównaniu do jednostki, wtedy bowiem ich kwadraty, sześciiany i odnośne iloczyny są pomijalne. Pod wyjaśnionym przeto warunkiem wolno stosować zasadę superpozycji do stanu odkształcenia. Powyższe uwagi dotyczą również wielkości φ, χ, ψ ; nie stosują się one jednak do wielkości u_0, v_0, w_0 jako dymensyjnie różnych od poprzednich, nadto jako figurujących w równaniach w postaci niezależnych dodajników.

W obrębie rozważań mechaniki technicznej zajęć mogą odnośnie deformacji układu dwa wypadki. W tej jej części, którą obejmuje tzw. teoria sprężystości i teoria plastyczności odkształcenia są małe; wielkości ϵ, γ nie

przekraczają w pierwszej z tych nauk 0,001, w drugiej 0,025. W części skrajnej, obejmującej tzw. wytrzymałość, odkształcenia są duże i mogą przekroczyć nawet wartość 0,25. W wykładzie naszym interesować nas będą wszystkie powyższe części mechaniki ciał rzeczywistych. Jednakże teoretycznie będziemy usiłowali ująć tylko zagadnienia małych odkształceń; pozostałe będą nas interesowały ze względów czysto praktycznych. Dodać przy tym trzeba, że zagadnienia wytrzymałościowe doznały wielostronnego zbadania laboratoryjnego, ale do dziś nie doczekały się należytego ujęcia teoretycznego. Możemy przeto poprzestać na znajomości teorii małych deformacji.

Z założenia małych odkształceń nie wynikają bynajmniej małe przemieszczenia układu. Te bowiem zależą ponadto od współrzędnych x, y, z , to znaczy od rozmiarów geometrycznych układu. Przemieszczenia nazywamy małymi, gdy wykładnik stosunku przemieszczenia do aktualnego wymiaru liniowego układu jest liczbą małą w porównaniu do jedności. W zagadnieniach technicznych przeważają te z małymi przemieszczeniami; spotykamy również i inne z przemieszczeniami dużymi.

Odkształcenie jednorodne spotykamy wyjątkowo. Z reguły ciała doznają odkształcenia *n i e j e d n o r o d n e g o*; wtedy szóstka ϵ, γ nie jest stała, lecz zmienia się wraz z miejscem (x, y, z) . Model tego typu deformacji sprowadzamy do poprzedniego, postępując następująco. Rozwińmy przemieszczenia u, v, w punktu (x, y, z) , wychodząc z przemieszczeń u_0, v_0, w_0 punktu $(0, 0, 0)$. Stosując szereg potęgowy Taylora, znajdziemy:

$$\begin{aligned} u &= u_0 + \frac{\partial u}{\partial x} x + \frac{\partial u}{\partial y} y + \frac{\partial u}{\partial z} z + \dots, \\ v &= v_0 + \frac{\partial v}{\partial x} x + \frac{\partial v}{\partial y} y + \frac{\partial v}{\partial z} z + \dots, \\ w &= w_0 + \frac{\partial w}{\partial x} x + \frac{\partial w}{\partial y} y + \frac{\partial w}{\partial z} z + \dots. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Figurujące w tym rozwinięciu pochodne mają wartości lokalne przynależne miejscu $(0, 0, 0)$; nie wypisane dodajniki są typu $\frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} x^2$, względnie wyższego. Możemy zależnie od wartości lokalnych tych pochodnych wyższego rzędu tak ograniczyć zasięg x, y, z dokoła punktu wyjściowego, że dodajniki tu nie wypisane można będzie pominąć. Tak właśnie postępujemy, zyskując w ten sposób w tym małym obszarze obraz odkształcenia zgodny z jednorodnym. W obrębie przeto dostatecznie małego obszaru możemy odkształcenie niejednorodne traktować jako jednorodne.

Porównując obecnie równania (3.1) z (1.1) znajdziemy określenia składowych stanu odkształcenia niejednorodnego w następującej postaci matematycznej:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad (4.1)$$

$$\gamma_x = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \gamma_y = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \gamma_z = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Przy tej sposobności znajdziemy też:

$$2\varphi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad 2\chi = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad 2\psi = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (5.1)$$

Ponieważ rozwinięcia można było dokonać, wychodząc z dowolnego punktu układu, przeto powyższe określenia są ważne w każdym punkcie układu.

Znajomość przemieszczeń u, v, w jako ciągłopochodnych funkcji miejsca (x, y, z) pozwala z łatwością wyznaczyć według (4.1) składowe ε, γ stanu odkształcenia.

Możemy przeto przyjąć dowolne funkcje u, v, w , np. z obserwacji jakiegoś konkretnego wypadku i z nich otrzymać obraz odkształcenia w każdym punkcie układu. Równie dowolne postępowanie odwrotne jest niemożliwe lub wysoce utrudnione. Trzeba tu bowiem pamiętać, że składowe ε, γ stanów niejednorodnych są również funkcjami miejsca. Gdybyśmy przeto przyjęli owych sześć funkcji zbyt dowolnie, to wprawdzie w obrębie każdego, niedawno wyjaśnionego obszaru zyskalibyśmy zrozumiałe przedstawienia deformacji, jednakże poszczególne obszary nie przylegałyby po odkształceniu ściśle do siebie, bo powstałyby między nimi większe lub mniejsze luki. Innymi słowy dobór sześciu wielkości ε, γ jako dowolnych funkcji miejsca z góry skazuje na zagładę nierozdzielności elementów, z których składa się układ. Tymczasem ten postulat geometryczny powinien być zgodnie z namacalną rzeczywistością w każdym prawidłowym rozwiązaniu spełniony.

W ściśle matematycznym kursie kinematyki odkształceń podaje się, jakim to relacjom muszą czynić zadość funkcje ε, γ . Okazuje się, że warunki nierozdzielności mają postać sześciu równań różniczkowych cząstkowych drugiego rzędu. Rzecz nie mieści się w ramach niniejszego wykładu. Dla dośladniejszego jednak podkreślenia istoty rzeczy zademonstrujemy je jeszcze na prostym przykładzie. Wyobraźmy sobie mianowicie, że chcemy zdjęcie terenowe umieścić w mapie katastralnej. Zdjęcie to niestety leży w obrębie kilku lub kilkunastu oddzielnych arkuszy sekcyjnych. Papier, podlegając wpływom atmosferycznym, deformuje się nierównomiernie, kurcząc się. Przypinając tedy owe arkusze sekcyjne obok siebie stwierdzimy, że krawędzie ich różnią się widocznie między sobą co do długości i kształtu, ponadto, iż suma czterech przyległych kątów nie daje kąta pełnego. Tak więc arkusze, tj. elementy naszego układu, odkształcając się samodzielnie, więc dowolnie, nie czynią w rezultacie zadość warunkom nierozdzielności.

Zadanie 1.1. Płytką prostokątną została równomiernie ogrzana. Jaki powstał stan odkształcenia?

Odpowiedź 1.1. W każdym kierunku jednostka długości przyrosła o αt , gdzie α jest współczynnikiem rozszerzalności termicznej, t zaś oznacza podwyższenie temperatury. Odkształcenie jest tu jednorodne.

Zadanie 2.1. Wszystkie składowe stanu odkształcenia są zerami. Wyznaczyć przemieszczenia.

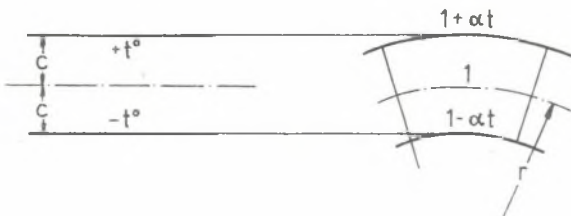
Odpowiedź 2.1. Z równości $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$ wynika, że każde z przemieszczeń jest funkcją tylko dwóch zmiennych, a więc: $u = f(y, z)$, $v = g(z, x)$, $w = h(x, y)$.

Uwzględniając powyższe kolejno w warunkach $\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ widzimy, że każda z funkcji f, g, h może przynależnie jej zmienne zawierać co najwyżej w pierwszej potędze. Abstrahując przeto od wzajemnych związków między stałymi współczynnikami moglibyśmy napisać: $u = u_0 + ayz - \psi_1 y + \chi_1 z$, $v = v_0 + bzx - \varphi_2 z + \psi_2 \chi$, $w = w_0 + cxy - \chi_3 x + \varphi_3 y$. Weryfikując współczynniki wstawmy te wyrażenia w ostatnie trzy warunki; znajdziemy $a = b = c = 0$, $\varphi_2 = \varphi_3 = \varphi$, $\chi_3 = \chi_1 = \chi$, $\psi_1 = -\psi_2 = \psi$. W rezultacie przeto znajdziemy przemieszczenia jak dla układu sztywnego.

Zadanie 3.1. Wszystkie składowe stanu odkształcenia są liczbami stałymi. Znaleźć przemieszczenia.

Odpowiedź 3.1. Postępując w nieznacznie zmodyfikowany sposób znajdziemy grupę wzorów 1.1.

Zadanie 4.1. Cienka płytką prostokątną doznała w kierunku swej szerokości nierównomiernej zmiany temperatury; zmienia się ona liniowo od $-t^\circ\text{C}$ wzdłuż jednego brzegu do $+t^\circ\text{C}$ wzdłuż drugiego brzegu. Określić kształt płytki po deformacji.



Rys. 2.1

Odpowiedź 4.1. Ponieważ w kierunku długości płytki warunki są równe, przeto w tym kierunku możemy wziąć pod uwagę część płytki dowolnej długości, np. równej jednostki. W kierunku szerokości płytki zmiana

temperatury przebiega liniowo, zatem prostolinijne ograniczenia pomyślonej części pozostaną prostolinijne. Na krawędziach ograniczających długość 1 przejdzie w : $1 + \alpha t$ i w : $1 - \alpha t$. Skoro tak samo musi być dla każdej części płytki, przeto każdy element prostokątny przejdzie w wycinek pierścienia jak na rysunku 2.1.

Z równania:

$$\frac{1 + \alpha t}{1 - \alpha t} = \frac{r + c}{r - c}$$

znajdziemy promień zakrzywienia osi płytki $r = \frac{c}{\alpha t}$. Stan odkształcenia jest niejednorodny.

Zadanie 5.1. Składowe stanu odkształcenia są funkcjami tylko dwóch zmiennych, np. x i y . Wyznaczyć ogólną postać przemieszczeń.

Odpowiedź 5.1. Zgodnie z powyższym napiszemy na razie:

$$\gamma_x = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = F(x, y), \quad \gamma_y = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = G(x, y), \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = H(x, y).$$

Całkując trzecie równanie, znajdziemy: $w = h(x, y) + zH(x, y)$. Wstawiając ten rezultat w dwa pierwsze równania i całkując otrzymamy:

$$u = f(x, y) + z(G - \frac{\partial h}{\partial x}) - \frac{z^2}{2} \cdot \frac{\partial H}{\partial x}, \quad v = g(x, y) + z(F - \frac{\partial h}{\partial y}) - \frac{z^2}{2} \cdot \frac{\partial H}{\partial y}.$$

Przy pomocy powyższych u, v, w wyrażmy obecnie pozostałe trzy składowe, pamiętając, że są one według założenia również funkcjami tylko x i y .

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + z(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}) - \frac{z^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = \text{funkcja } (x, y),$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial y} + z(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}) - \frac{z^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = \text{funkcja } (x, y),$$

$$\gamma_z = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + z(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} - 2 \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}) - z^2 \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} = \text{funkcja } (x, y).$$

Znajdujemy stąd związki dla funkcji F, G, H . Z równości: $\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = 0$ wynika $H(x, y) = 2ax + 2by + 2\psi$ gdzie a, b, ψ są stałymi.

Z warunków zaś: $\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0$ otrzymujemy:

$$G - \frac{\partial h}{\partial x} = n(y), \quad F - \frac{\partial h}{\partial y} = m(x), \quad \text{co wstawione w warunek:}$$

$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} - 2 \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} = 0$ daje $n'(y) + m'(x) = 0$, zatem $m(x) = -kx - \varphi$, $n(y) = k \cdot y + \chi$, gdzie φ, χ, k są stałymi.

Ostateczny przeto rezultat brzmi:

$$u = f(x, y) - az^2 + kyz + \chi z,$$

$$v = g(x, y) - bz^2 - kxz - \varphi z,$$

$$w = h(x, y) + 2axz + 2byz + \psi z.$$

Weźmy pod uwagę dowolny stan odkształcenia, określony sześciu składowymi ε, γ . W obszarze niedawno wyjaśnionym możemy ε, γ uważać za wielkości stałe. Odejmijmy z punktu $O(0,0,0)$ w dowolnym kierunku odcinek $n = OA$ w obrębie wyjaśnionego obszaru i obliczmy, jakie odkształcenia przynależą do tego kierunku. Ważne to zagadnienie nazywamy przekształceniem stanu odkształcenia.

Dostawy kierunkowe odcinka n , tj. $\frac{x}{n}, \frac{y}{n}, \frac{z}{n}$, oznaczmy krótko przez n_x, n_y, n_z . Przemieszczenia punktu O są u_0, v_0, w_0 , przemieszczenia punktu sąsiedniego $A(x, y, z)$ możemy wyznaczyć równaniami (3.1). Wprowadziwszy oznaczenia:

$$f_x = \frac{u - u_0}{n}, \quad f_y = \frac{v - v_0}{n}, \quad f_z = \frac{w - w_0}{n}$$

możemy tym równaniom nadać postać:

$$f_x = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot n_x + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot n_y + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot n_z,$$

$$f_y = \frac{\partial v}{\partial x} \cdot n_x + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot n_y + \frac{\partial v}{\partial z} \cdot n_z, \quad (6.1)$$

$$f_z = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot n_x + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot n_y + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot n_z.$$

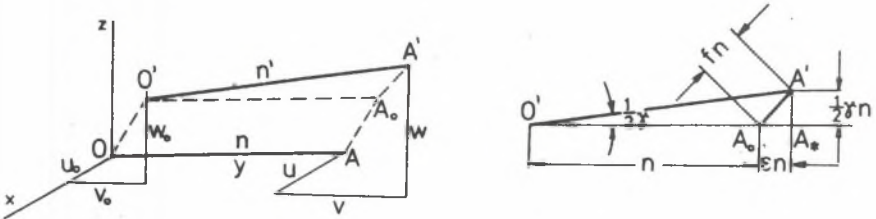
Znaczenie wielkości f jest jasne. Tak np. $u - u_0$ oznacza nadwyżkę przemieszczenia punktu A w porównaniu z przemieszczeniem punktu O a to w kierunku x . Przeto f_x jest składową x -ową przemieszczenia względniego, odniesioną do jednostki długości odcinka n . Analogiczne uwagi dotyczą wielkości f_y i f_z . Całkowity zdłuż kierunku n wynosi więc:

$$\varepsilon = f_x \cdot n_x + f_y \cdot n_y + f_z \cdot n_z, \quad (7.1)$$

czyli po podstawieniu relacji (6.1) i uwzględnieniu określeń (4.1):

$$\varepsilon = \varepsilon_x n_x^2 + \varepsilon_y n_y^2 + \varepsilon_z n_z^2 + \gamma_x n_y n_z + \gamma_y n_x n_z + \gamma_z n_x n_y. \quad (8.1)$$

Znając przeto sześć składowych ε, γ dla kierunków x, y, z możemy przy pomocy (8.1) obliczyć zdłuż ε w dowolnym kierunku n .



Rys. 3.1

Rys. 3.1 ilustruje następującą sytuację: Punkty O i A przemieściły się w położenie O' i A' , tak iż odcinek n przeszedł w n' nierównoległy do n . Operacji tworzenia różnic: $u - u_0$, $v - v_0$, $w - w_0$ odpowiada przesunięcie w myśli odcinka OA w położenie równoległe $O'A_0$. Względne przemieszczenie punktu A wynosi $A_0A' = f \cdot n$, jeżeli:

$$f^2 = f_x^2 + f_y^2 + f_z^2. \quad (9.1)$$

W płaszczyźnie trójkąta $O'A_0A'$ rzut A' na $O'A_0$ daje punkt A_* . Obliczone przed chwilą ε określa wydłużenie O_0A_* = $n \cdot \varepsilon$ odcinka n w jego kierunku. Wielkość $n \cdot \varepsilon$ jest jego całkowitym wydłużeniem, albowiem z tytułu uwag dotyczących rzędu wielkości ε, γ różnica między $O'A'$ i $O'A_*$ jest pomijalna. Wielkość ε odnosi się do jednostki długości kierunku n , jest więc zgodnie z definicją zdłużeniem tego kierunku. Na podkreślenie zasługuje fakt, iż ε wyraża się tylko przy pomocy sześciu składowych stanu odkształcenia, tj., że na obliczenie tej wielkości nie wpływają składowe obroty φ, χ, ψ , które tkwią w sześciu pochodnych cząstkowych typu $\frac{\partial u}{\partial y}$ itp. Jest to zrozumiałe, albowiem składowe te są również licznie małe i spowodowane nimi kątowe odchylenie n' względem n jest pomijalne.

Inaczej się rzecz ma, gdy chcemy obliczyć właśnie owo odchylenie, co pozostało nam jeszcze wykonać. Na odchylenie to wpływa i obrót, i skos wywołany deformacją. Ponieważ przy danych φ, χ, ψ obrót składowy w dowolnym kierunku jest nam znany, przeto ograniczymy się do wyznaczenia tylko skosu. W tym celu musimy sobie wyobrazić, że w równaniach (6.1) odrzucamy składowe obroty, co nadaje im postać:

$$\begin{aligned}f_x &= \varepsilon_x n_x + \frac{1}{2} \gamma_z n_y + \frac{1}{2} \gamma_y n_z, \\f_y &= \frac{1}{2} \gamma_z n_x + \varepsilon_y n_y + \frac{1}{2} \gamma_x n_z, \\f_z &= \frac{1}{2} \gamma_y n_x + \frac{1}{2} \gamma_x n_y + \varepsilon_z n_z.\end{aligned}\tag{10.1}$$

W tych warunkach kąt zawarty między $O'A_*$ i $O'A'$ jest według definicji połówką całkowitego skosu, czyli powinien mieć oznaczenie $\frac{1}{2} \gamma$. Z trójkęta prostokątnego $A_0 A_* A'$ znajdziemy:

$$\left(\frac{1}{2} \gamma\right)^2 = f^2 - \varepsilon^2,\tag{11.1}$$

co rozwiązuje sprawę wielkości skosu. Możemy też przy użyciu (8.1) i (9.1) napisać:

$$\left(\frac{1}{2} \gamma\right)^2 = (f_y n_z - f_z n_y)^2 + (f_z n_x - f_x n_z)^2 + (f_x n_y - f_y n_x)^2.\tag{12.1}$$

Dla zupełności należy określić kierunek posunięcia $A_* A'$ przez podanie jego dostaw kierunkowych m_x, m_y, m_z . Znajdziemy je, zważywszy, że rzuty wektora $A_0 A'$ możemy określić jako sumy rzutów wektorów dodajników $A_0 A_*$ i $A_* A'$. Zatem:

$$f_x = \varepsilon n_x + \frac{1}{2} \gamma m_x, \quad f_y = \varepsilon n_y + \frac{1}{2} \gamma m_y, \quad f_z = \varepsilon n_z + \frac{1}{2} \gamma m_z.$$

skąd wyznaczyć można m_x, m_y, m_z np. w postaci:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \gamma m_x &= (\varepsilon_x - \varepsilon) n_x + \frac{1}{2} \gamma_z n_y + \frac{1}{2} \gamma_y n_z, \\ \frac{1}{2} \gamma m_y &= \frac{1}{2} \gamma_z n_x + (\varepsilon_y - \varepsilon) n_y + \frac{1}{2} \gamma_x n_z, \\ \frac{1}{2} \gamma m_z &= \frac{1}{2} \gamma_y n_x + \frac{1}{2} \gamma_x n_y + (\varepsilon_z - \varepsilon) n_z.\end{aligned}\tag{13.1}$$

Wyznaczenie zdłuzu ε dla dowolnie obranego kierunku n z określeniem przynależnego skosu $\frac{1}{2} \gamma$ i jego orientacji m wyczerpuje sprawę p r z e k s z t a ł c e n i a d o w o l n e g o.

Wróćmy jeszcze na chwilę do równań (10.1). Widzieliśmy, że wielkości f_x, f_y, f_z wystarczają do wyznaczenia składowych odniesionych do dowolnego kierunku n . Ułożenie dodajników w równaniach tych wskazuje na pewną szczególną symetrię tak z uwagi na dostawy n_x, n_y, n_z jak i składowe ε, γ .

Utwór symetryczny, przekształcający się w przestrzeni w powyższy liniowo-symetryczny sposób, nazywamy tensorem. Możemy przeto powiedzieć, że stan odkształcenia w dowolnym punkcie ciała określony jest tensorem odkształcenia.

Chcąc przez dany punkt umieścić w przestrzeni prostą, musimy podać dwie jej niezależne dostawy kierunkowe, albowiem wszystkie trzy związane są relacją: $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$. Dla drugiej, do poprzedniej prostopadłej, wystarczy podać tylko jeden warunek, albowiem dostawy obu kierunków n' i n'' związane są warunkiem prostopadłości: $n'_x n''_x + n'_y n''_y + n'_z n''_z = 0$. Wreszcie trzecia prosta, do obu tamtych prostopadła, wymaga co najwyżej zorientowania przestrzeni, tj. założenia prawego lub lewego układu osi. W sumie więc umieszczenie trzech wzajemnie prostopadłych osi przez określony punkt wymaga podania trzech niezależnych postulatów.

Powyższa uwaga posłuży nam do przeprowadzenia szczytowego przekształcenia składowych stanu odkształcenia. Przyjrząwszy się równaniom (1.1) widzimy, że prosta pokrywająca się pierwotnie np. z osią z-ów odchyła się od niej wskutek deformacji o kąt $\frac{1}{2}\gamma = \sqrt{\gamma_x^2 + \gamma_y^2}$. Odchylenie nie istniałoby, gdyby było: $\gamma = 0$. Ten postulat przedstawia dwa niezależne warunki, a mianowicie: $\gamma_x = 0$, $\gamma_y = 0$. Gdyby tak istotnie było, to oś z-ów nazwalibyśmy główną osią odkształcenia w punkcie O, względnie płaszczyznę xy główną płaszczyzną bezwładności w punkcie O. Podkreślanie punktu O w stanach jednorodnych jest oczywiście bez znaczenia, w stanach niejednorodnych musi się jednak pamiętać o tym, że od punktu do punktu kierunki główne zmieniają się. Gdyby również było: $\gamma_z = 0$, to warunki: $\gamma_y = \gamma_z = 0$ określałyby oś x-ów jako oś główną, warunki zaś: $\gamma_z = \gamma_x = 0$ oś y-ów jako taką. Mimo tego jednak, że każdą oś oddzielnie określają dwa warunki w sumie trzy główne osie wyznaczone są trzema postulatami. Wynika to z tego powodu, że są one wzajemnie do siebie prostopadłe.

Załóżmy ogólnie, że γ_x , γ_y , γ_z są różnymi od zera skosami niejednorodnego stanu napięcia i postawmy sobie za zadanie wyznaczyć kierunki główne w dowolnie ustalonym punkcie układu. Musimy najwidoczniej znaleźć na razie przynajmniej jeden taki kierunek n, dla którego całkowity skos znika. Wtedy jednak zerują się relacje (13.1), dając jednorodny układ równań z uwagi na niewiadome n_x , n_y , n_z . Jak wiadomo, układ taki posiada pierwiastki, jeśli znika wyznacznik utworzony z odnośnych współczynników, tj. jeśli spełnia się wymóg:

$$\begin{vmatrix} \epsilon_x - \epsilon & \frac{1}{2} \gamma_z & \frac{1}{2} \gamma_y \\ \frac{1}{2} \gamma_z & \epsilon_y - \epsilon & \frac{1}{2} \gamma_x \\ \frac{1}{2} \gamma_y & \frac{1}{2} \gamma_x & \epsilon_z - \epsilon \end{vmatrix} = 0.$$

Rozwinąwszy powyższy wyznacznik otrzymujemy równanie:

$$\varepsilon^3 - e\varepsilon^2 + e'\varepsilon - e'' = 0, \quad (14.1)$$

gdzie dla krótkości położono:

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z,$$

$$e' = \varepsilon_y \varepsilon_z + \varepsilon_z \varepsilon_x + \varepsilon_x \varepsilon_y - \frac{1}{4} \gamma_x^2 - \frac{1}{4} \gamma_y^2 - \frac{1}{4} \gamma_z^2, \quad (15.1)$$

$$e'' = \varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z + \frac{1}{4} \gamma_x \gamma_y \gamma_z - \frac{1}{4} \varepsilon_x \gamma_x^2 - \frac{1}{4} \varepsilon_y \gamma_y^2 - \frac{1}{4} \varepsilon_z \gamma_z^2.$$

W algebrze poświęca się oddzielną uwagę równaniu sekularnemu (14.1); między innymi dowodzi się tam, że trzy jego pierwiastki $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ są zawsze rzeczywiste. Będziemy je nazywać z d ł u z a m i g ł ó w n y m i.

Każdemu ze znalezionych ε przynależy kierunek główny. Aby wyznaczyć którykolwiek z nich wróćmy do zzerowanych równań (13.1) i przekształćmy je w trzy inne, pozostawiając wyrazy zawierające ε na jednej stronie, a zawierające γ na drugiej. Z kolei wymóżmy je stronami po dwa. Otrzymamy np. z dwóch ostatnich:

$$(\varepsilon_y - \varepsilon)(\varepsilon_z - \varepsilon)n_y n_z = \frac{1}{4} \gamma_x^2 n_y n_z + \frac{1}{4} (\gamma_y \gamma_z n_x + \gamma_z \gamma_x n_y + \gamma_x \gamma_y n_z) n_x.$$

W powyższym równaniu przerzucmy pierwszy dodatek prawej strony na lewą, podzielmy stronami przez $n_x^2 n_y n_z$ i odwróćmy stronami. Analogiczne operacje zastosujemy do cyklicznie podobnych dwóch równań pozostałych. Otrzymamy w rezultacie:

$$\frac{n_x^2}{(\varepsilon_y - \varepsilon)(\varepsilon_z - \varepsilon) - \frac{1}{4} \gamma_x^2} = \frac{n_y^2}{(\varepsilon_z - \varepsilon)(\varepsilon_x - \varepsilon) - \frac{1}{4} \gamma_y^2} = \frac{n_z^2}{(\varepsilon_x - \varepsilon)(\varepsilon_y - \varepsilon) - \frac{1}{4} \gamma_z^2} =$$

$$= \frac{n_x n_y n_z}{\frac{1}{4} (\gamma_y \gamma_z n_x + \gamma_z \gamma_x n_y + \gamma_x \gamma_y n_z)}$$

lub inaczej: $n_x^2 : n_y^2 : n_z^2 = a_x : a_y : a_z$, gdzie a_x, a_y, a_z oznaczają mianowniki pod n_x^2, n_y^2, n_z^2 w poprzedniej proporcji. Ostatnia proporcja w połączeniu z relacją $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$ daje poszukiwane rozwiązanie, a to:

$$n_x = \sqrt{\frac{a_x}{a}}, \quad n_y = \sqrt{\frac{a_y}{a}}, \quad n_z = \sqrt{\frac{a_z}{a}}, \quad (16.1)$$

$$a = a_x + a_y + a_z.$$

Kładąc w a_x, a_y, a_z kolejno w miejsce ε wartości główne $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, znajdziemy ze wzorów (16.1) przynależne kierunki główne n, n', n'' .

Interesujące zakończenie przeprowadzonego obliczenia może stanowić następująca uwaga: Z matematycznego punktu widzenia ciekawe może być znalezienie ekstremum wielkości określonej formułą (8.1) jako funkcji kierunku n . Odnosny rachunek prowadzi znowu do wartości głównych. Po prostu z trzech zdłuży głównych jeden stanowi analityczne maximum, drugi minimum i trzeci tzw. wartość siodełkową.

Stan odkształcenia jest trójosiowy, gdy wszystkie trzy główne zdłuże są różne od zera; do tego wystarcza i konieczne jest by było $e'' \neq 0$. Jest to najogólniejszy, przestronny stan odkształcenia.

Gdy $e'' = 0, e' = 0$ stan odkształcenia jest dwuosiowy czyli płaski; wtedy jeden z pierwiastków równania (14.1) znika, więc np. $\varepsilon_3 = 0$. Pozostałe dwa zdłuże główne znajdziemy z równania (14.1), skróconego do postaci kwadratowej: $\varepsilon^2 - e\varepsilon + e = 0$, kierunki główne zaś ze wzorów (16.1).

Najczęściej jednak wypadek $e'' = 0$ zachodzi z tytułu nieobecności niektórych składowych. Wtedy wzory (16.1) są nieprzydatne. Tak np. w zagadnieniach technicznych rozpatrujemy niekiedy wydłużone układy pryzmatyczne o unieruchomionych końcach i poddane tego rodzaju wpływom zewnętrznym, że dowolne przekroje tego ciała, prostopadłe do jego długości, nie doznają przemieszczeń w tym kierunku. Przyjawszy oś z w kierunku długości układu, osie zaś x i y w płaszczyźnie dowolnego przekroju widzimy, że przy powyższych założeniach jest $e'' = 0$, albowiem $\gamma_x = \gamma_y = 0$, nadto $\varepsilon_z = \varepsilon_3 = 0$. Zatem stan odkształcenia jest tu istotnie dwuosiowy, ponieważ zaś fakt ten ma miejsce w każdym punkcie układu, przeto mówimy tu o płaskim zagadnieniu odkształcenia.

Gdy $e'' = 0, e' = 0$ równanie (14.1) przybiera postać $\varepsilon = e$, tzn. określa jedyne różne od zera odkształcenie główne. Tego rodzaju, rzadko pojawiający się stan odkształcenia nazywamy jednoosiowy czyli liniowy.

Zadanie 6.1. Płaski stan odkształcenia określony jest różnymi od zera składowymi $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_z$. Stransformować ten stan w płaszczyźnie x, y , nadto określić kierunki i zdłuże główne, upraszczając dotychczasowe formuły.

Odpowiedź 6.1. W dotychczasowych wzorach należy położyć $\varepsilon_z = \gamma_x = \gamma_y = 0$, nadto $n_x = \cos\alpha, n_y = \sin\alpha, n_z = 0$, jeśli α oznacza kąt mierzony w

płaszczyźnie xy od osi x -ów. Celowe jest wprowadzić obecnie funkcje trygonometryczne podwójnego kąta. Formuła (8.1) przyjmie postać:

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) + \frac{1}{2}(\varepsilon_x - \varepsilon_y)\cos 2\alpha + \frac{1}{2}\gamma_z \sin 2\alpha. \quad (17.1)$$

Po użyciu skróconych formuł (10.1) otrzymamy z (12.1):

$$\frac{1}{2}\gamma = -\frac{1}{2}(\varepsilon_x - \varepsilon_y)\sin 2\alpha + \frac{1}{2}\gamma_z \cos 2\alpha, \quad (18.1)$$

przy czym dwuznaczność znaku wynikłą z pierwiastkowania usuwamy, zważywszy, że dla $\alpha = 0$ winno być $\gamma = +\gamma_z$. Kładąc powyżej $\gamma = 0$ znajdziemy:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{\gamma_z}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} \quad (19.1)$$

dla oznaczenia kierunków głównych. Zważywszy, że okresem funkcji tg jest π , widzimy, że powyższy wzór określa dwa wzajemnie prostopadłe kierunki $\alpha_1 = \alpha_0$ i $\alpha_2 = \alpha_0 + \pi/2$. Jeśli wreszcie z tymi szczególnymi wartościami kątów wrócimy do formuły (17.1), otrzymamy zdłuże główne:

$$\varepsilon_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \gamma_z^2}. \quad (20.1)$$

Identyczne rezultaty da rozwiązanie skróconego równania (14.1).

Znajomość kierunków i wartości głównych upraszcza znakomicie wszelkie obliczenia, możemy bowiem kierunki te przyjąć za osie odniesienia prostokątnego układu współrzędnych 1, 2, 3, a zdłuże $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ za wartości wyjściowe. W ten sposób np. wzory (10.1) przyjmą postać: $f_1 = \varepsilon_1 n_1$, $f_2 = \varepsilon_2 n_2$, $f_3 = \varepsilon_3 n_3$. Formuły zaś (8.1), (12.1) i (13.1) skrócą się do postaci:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon &= \varepsilon_1 n_1^2 + \varepsilon_2 n_2^2 + \varepsilon_3 n_3^2, \\ \left(\frac{1}{2}\gamma\right)^2 &= (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 n_2^2 n_3^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2 n_3^2 n_1^2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 n_1^2 n_2^2, \\ \frac{1}{2}\gamma m_1 &= (\varepsilon_1 - \varepsilon) n_1, \quad \frac{1}{2}\gamma m_2 = (\varepsilon_2 - \varepsilon) n_2, \quad \frac{1}{2}\gamma m_3 = (\varepsilon_3 - \varepsilon) n_3. \end{aligned} \right\} \quad (21.1)$$

Tutaj n_1, n_2, n_3 oraz m_1, m_2, m_3 oznaczają dostawy kątów mierzonych od osi 1, 2, 3.

Wzory (21.1) jak i (17.1) wraz z (18.1) można w interesujący sposób przedstawić wykreślnie. Nie robimy tego, bo znajdziemy na to analogiczną sposobność gdzie indziej.

Zadanie 7.1. Przeprowadzić transformację płaskiego stanu odkształcenia wychodząc z kierunków i wartości głównych.

Odpowiedź 7.1. Postępując jak w zadaniu (6.1) otrzymamy:

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\cos 2\alpha, \quad \frac{1}{2}\gamma = -\frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\sin 2\alpha. \quad (22.1)$$

Oddzielną uwagę należy poświęcić wielkościom (15.1). Wielkości te stanowią współczynniki równania sekularnego (14.1). Określa ono trzy wartości główne i w konsekwencji dalszej trzy kierunki główne. Zechcemy przyjąć, że punktem wyjścia dla przeprowadzonej transformacji była nie szóstka $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$, związana z układem x, y, z , lecz inna szóstka $\varepsilon_\xi, \varepsilon_\eta, \varepsilon_\zeta, \gamma_\xi, \gamma_\eta, \gamma_\zeta$ wynikła z odniesienia stanu odkształcenia do układu prostokątnego osi ξ, η, ζ . Fakt ten nie może oczywiście wpłynąć ani na wartości główne $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, ani na położenie kierunków głównych. Są to wielkości naturalne, związane w każdym punkcie z układem materialnym, a nie z układem współrzędnych, który odgrywa tu tylko rolę pomocniczą. Wielkości e, e', e'' w układzie ξ, η, ζ będą tak samo symetrycznie zbudowane jak w układzie x, y, z . Poszczególne dodajniki zmieniają się, ale sumy ich nie ulegają zmianie, bo nie ulegną zmianie pierwiastki równania (14.1). Wielkościom tak zachowującym się nadaje się w matematyce nazwę niezmienników. Zatem e, e', e'' są niezależnymi niezmiennikami tensora odkształcenia. Ich wartości najszybciej obliczymy, obracając układ w położenie główne. Otrzymamy:

$$e = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \quad e' = \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1 + \varepsilon_1\varepsilon_2, \quad e'' = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3.$$

Zauważmy wreszcie, że z niezmienników (15.1) możemy tworzyć inne nowe. Będą one jednak niezmiennikami zależnymi.

Zmiany liniowe pociągają za sobą również zmiany powierzchniowe i objętościowe. Chcemy obliczyć ile wynosi zmiana objętości pierwotnej jednostki objętości wyciętej w dowolnym miejscu odkształconego układu. Wartość ta nie może zależeć od orientacji układu współrzędnych; najprościej tedy postąpimy, wycinając w obszarze odkształcenia pseudo-jednorodnego prostopadłościan o krawędziach a_1, a_2, a_3 , równoległych do kierunków głównych. Przy takim obiorze kierunków krawędzi zmieni się on znów na prostopadłościan; jego odkształcone krawędzie będą wynosić: $a_1(1+\varepsilon_1), a_2(1+\varepsilon_2), a_3(1+\varepsilon_3)$. Objętość odkształcona wyniesie przeto: $a_1 a_2 a_3 (1 + \varepsilon_1) \cdot (1 + \varepsilon_2) \cdot (1 + \varepsilon_3)$, czyli po uzasadnionych pominięciach: $a_1 a_2 a_3 (1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)$, gdy objętość pierwotna wynosiła: $a_1 a_2 a_3$. Odejmując, znaj-

dziemy całkowitą zmianę objętości. Dzieląc ją przez objętość pierwotną, znajdziemy wreszcie zmianę objętości jednostkowej, a to: $\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3$. Powyższe - jak się można było spodziewać - symetryczne, wyrażenie jest jednak wartością pierwszego niezmiennika. Przeto również w dowolnym układzie odniesienia $z m i a n a j e d n o s t k o w a o b j ę t o ś c i$ określona jest wartością:

$$e = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z. \quad (23.1)$$

Interesujące jest, że zmiana ta nie zależy od skosów γ . Analogicznie dowodzi się, że $z m i a n a j e d n o s t k o w a p o l a$ jest sumą zdłuzi dwóch wzajemnie prostopadłych kierunków, umieszczonych w płaszczyźnie pola pierwotnego.

Wiadomo już nam jest, że istoty deformacji dopatrujemy się w powstawaniu zdłuzi i skosów. W niektórych wypadkach można jednak rzecz zdefiniować inaczej. Możemy mianowicie odkształcenia układu dopatrywać się w tym, iż zmienia się jego objętość i jego postać. Odkształcenie nazywamy odkształceniem $o b j ę t o ś c i o w y m$, gdy wyraża się ono tylko zmianą objętości bez zmiany postaci. Z geometrycznego podobieństwa układu pierwotnego i zdeformowanego wynikają dla tego rodzaju odkształcenia następujące warunki:

$$\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z, \quad \gamma_x = \gamma_y = \gamma_z = 0.$$

Odkształcenie nazywamy odkształceniem $p o s t a c i o w y m$, gdy wyraża się ono tylko zmianą postaci bez zmiany objętości, to znaczy, gdy jest ono uwarunkowane relacją:

$$\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = 0.$$

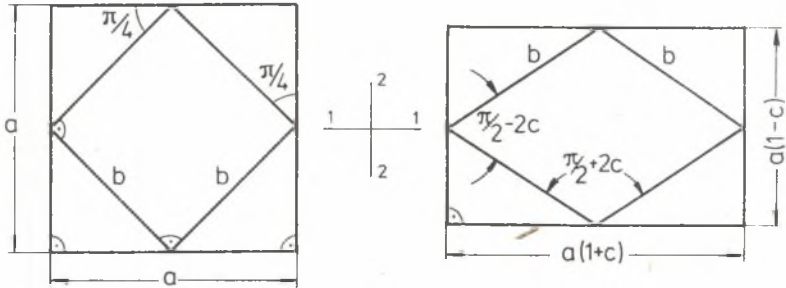
Szczególnie prosty wypadek odkształcenia objętościowego przedstawia równomierna przestrzenna zmiana objętości, tj. wypadek $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 = \frac{e}{3}$. Wzory (21.1) pouczają nas, że w stanie takim w każdym kierunku jest $\epsilon = \frac{e}{3}$ nadto $\gamma = 0$.

Odpowiednikiem dwuosiowym tego zjawiska jest równomierne płaskie odkształcenie, tj. wypadek $\epsilon_1 = \epsilon_2, \epsilon_3 = 0$.

Wzory (22.1) informują nas, że w płaszczyźnie zagadnienia w każdym kierunku jest $\epsilon = \epsilon_1 = \epsilon_2$, nadto $\gamma = 0$.

Najprostszym wypadkiem drugiej kategorii jest szczególnie ważne, tzw. $p r o s t e$ odkształcenie postaciowe. Tutaj jest: $\epsilon_1 + \epsilon_2 = \epsilon_3 = 0$. Znacząc $\epsilon_1 = c, \epsilon_2 = -c$, znajdziemy z formuł (22.1): $\epsilon = c \cos 2\alpha, \frac{1}{2}\gamma = -c \sin 2\alpha$. Jeśli przeto położymy: $\alpha = \pi/4$, otrzymamy: $\epsilon = 0, \frac{1}{2}\gamma = -c = -\epsilon_1 = \epsilon_2$. Istotę tego rodzaju odkształcenia możemy przeto zde-

finiować prosto w dwojaki sposób. Kwadrat o bokach usytuowanych równoległe do kierunków głównych przechodzi w prostokąt o niezmienionym polu. Kwadrat obrócony o $\pi/4$ względem położenia poprzedniego przechodzi w romb o równym polu i niezmienionych bokach. Rys. 4.1 ilustruje powyższy wypadek.



Rys. 4.1

Zadanie 8.1. Stosując zasadę superpozycji rozbić składowe ε , γ dowolnego stanu odkształcenia na składowe ε' , γ' odkształcenia objętościowego i składowe ε'' , γ'' odkształcenia postaciowego.

Odpowiedź 8.1. Należy położyć: $\varepsilon = \varepsilon' + \varepsilon''$, $\gamma = \gamma' + \gamma''$ i do składowych częściowych zastosować ostatnio podane określenia. Otrzymamy z łańcuchowością: $\varepsilon'_x = \varepsilon'_y = \varepsilon'_z = \frac{1}{3}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$, $\gamma'_x = \gamma'_y = \gamma'_z = 0$;

$$\varepsilon''_x = \frac{1}{3}(2\varepsilon_x - \varepsilon_y - \varepsilon_z), \quad \varepsilon''_y = \frac{1}{3}(2\varepsilon_y - \varepsilon_z - \varepsilon_x);$$

$$\varepsilon''_z = \frac{1}{3}(2\varepsilon_z - \varepsilon_x - \varepsilon_y), \quad \gamma''_x = \gamma''_y = \gamma''_z = 0.$$

W wypadkach dynamicznych przemieszczenia u, v, w są nie tylko funkcjami miejsca, lecz również czasu. Wtedy prędkości i przyspieszenia wynikłe z obecności przemieszczeń znajdziemy tworząc ich pierwsze i drugie pochodne czasowe. Tak np.:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt}.$$

Różniczkując drugi raz otrzymamy stąd $\frac{d^2u}{dt^2}$. Gdy przemieszczenia układu są małe w wyjaśnionym już raz sensie, możemy dodajniki iloczynowe pominąć i krótko napisać: $\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t}$ i podobnie $\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{\partial^2u}{\partial t^2}$.

Używaliśmy we wszystkich naszych rozważaniach prostokątnego układu współrzędnych. Analogiczne obliczenia przeprowadzić również można w innych systemach, np. w układzie współrzędnych walcowych lub kulistych.

Istnieją pomysłowe przyrządy do pomiaru względnie rejestracji przemieszczeń i odkształceń statycznych lub dynamicznych. Oczywiście pomiaru tego dokonać można tylko w punktach powierzchni ograniczającej układ. Czujniki do pomiaru przemieszczeń mają budowę zależną najczęściej od postaci układu. Bardzo chętnie do pomiaru odkształceń posługujemy się tzw. t e n s o m e t r a m i . Ponieważ instrumentem tym zmierzyć możemy tylko składowe typu ϵ , przeto nieznaną skosów γ likwidujemy pomiarem dodatkowych zdłuży. Zastosowanie tensometrów jest szczególnie użyteczne przy dwuosłowych stanach odkształcenia.

Rys. 5.1 wyjaśnia nam schematycznie zasadę budowy takiego przyrządu. Gdy długość pomiarowa l zmienia się, następuje obrót dźwigni, który przenosi się na również dźwigniową wskazówkę. Powiększenie wydłużenia $l \cdot \epsilon$ wynosi $\frac{b}{a} \cdot \frac{d}{c}$ i w istniejących tensometrach waha się zależnie od konstrukcji od 500 do 2000. Długość pomiarowa wynosi normalnie 1 cm lub 2 cm; można ją przy małych odkształceniach dość dowolnie zwiększyć, np. nawet do 1 m.

Gdy długość pomiarowa musi być bardzo mała z racji zakrzywienia obiektu pomiarowego czy wybitnie zmiennego wydłużenia, stosujemy tensometry budowane na innej zasadzie. Tak np. powojenny francuski Solux daje powiększenie 200 000-krotne.

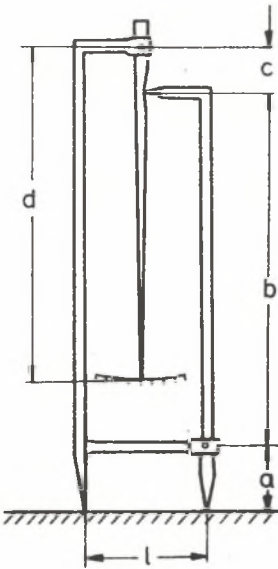
Tensometr staje się bezużyteczny, gdy obiekt pomiarowy doznaje znacznych przyspieszeń, jak np. samolot. W tym wypadku bowiem odnośnych sił bezwładności doznaje również przyrząd pomiarowy. Należy wówczas konstruować instrumenty kierując się inną zasadą.

Tak np. w ciągu ostatniej wojny nader rozpowszechnił się w Ameryce następujący prosty sposób eksperymentalnego wyznaczania zdłuży. Do badanego układu przyklepamy specjalny drucik¹⁾, tak że odkształca się on wraz z odnośnym miejscem tegoż układu. Pomiar zmiany oporu

elektrycznego, wywołany odkształceniem drucika, służy wprost do wyznaczenia ϵ w przyjętym kierunku. Pomiaru dokonać można od razu na trzech drucikach zorientowanych rozetowo lub trójkątnie w trzech różnych kierunkach²⁾.

1) Autor miał na myśli tensometr oporowy, por. np.: Z. Roliński: Zarys elektrycznej tensometrii oporowej, WNT, Warszawa 1963 - przyp. J.W.

2) Czyli za pomocą rozety tensometrycznej - przyp. J.W.



Rys. 5.1

Zadanie 9.1. W zagadnieniu płaskim pomierzono zdłużę w rozecie dwóch kierunków wzajemnie prostopadłych i trzecim połowiacym kąt zawarty między tymi dwoma. Obliczyć kierunki i zdłużę główne.

Odpowiedź 9.1. Znamy przeto ϵ_x , ϵ_y oraz ϵ_n , tj. ϵ dla $\alpha = \frac{5\pi}{4}$ lub - co na jedno wychodzi - $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Rzecz redukuje się do wyznaczenia γ_z . Ze wzoru (17.1) mamy:

$$\epsilon_n = \frac{1}{2}(\epsilon_x + \epsilon_y) + \frac{1}{2}\gamma_z, \text{ czyli: } \gamma_z = 2\epsilon_n - \epsilon_x - \epsilon_y.$$

Wstawiając powyższe do formuł (19.1) i (20.1) otrzymamy:

$$\operatorname{tg}2\alpha_0 = \frac{2\epsilon_n - \epsilon_x - \epsilon_y}{\epsilon_x - \epsilon_y}, \quad \epsilon_1 = \frac{1}{2}(\epsilon_x + \epsilon_y) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\epsilon_x - \epsilon_y)^2 + (2\epsilon_n - \epsilon_x - \epsilon_y)^2}.$$

Zadanie 10.1. Rozetę pomiarową stanowią trzy kierunki - a, b, c - wzajemnie nachylone pod kątem $\frac{2}{3}\pi$. Znaleźć kierunki i zdłużę główne.

Odpowiedź 10.1. Znamy ϵ_a , ϵ_b , ϵ_c . Jeśli kierunek a przyjmiemy zgodnie z osią x, to dla kierunku b jest $\alpha = \frac{2\pi}{3}$, dla kierunku zaś c jest $\alpha = \frac{4\pi}{3}$. Stosując zatem wzór (17.1), mamy: $\epsilon_x = \epsilon_a$, nadto:

$$\epsilon_b = \frac{1}{2}(\epsilon_x + \epsilon_y) - \frac{1}{4}(\epsilon_x - \epsilon_y) - \frac{\sqrt{3}}{4}\gamma_z,$$

$$\epsilon_c = \frac{1}{2}(\epsilon_x + \epsilon_y) - \frac{1}{4}(\epsilon_x - \epsilon_y) + \frac{\sqrt{3}}{4}\gamma_z.$$

Równania te dają: $\epsilon_y = \frac{1}{3}(2\epsilon_c + 2\epsilon_b - \epsilon_a)$, $\gamma_z = \frac{2}{\sqrt{3}}(\epsilon_c - \epsilon_b)$. Podstawiając ϵ_x , ϵ_y , γ_z do wzorów (19.1) i (20.1) znajdziemy

$$\operatorname{tg}2\alpha_0 = \frac{\epsilon_c - \epsilon_b}{2 \cdot \epsilon_a - \epsilon_b - \epsilon_c} \sqrt{3},$$

$$\epsilon_1 = \frac{1}{3}(\epsilon_a + \epsilon_b + \epsilon_c) \pm \frac{2}{3}\sqrt{\epsilon_a^2 + \epsilon_b^2 + \epsilon_c^2 - \epsilon_b\epsilon_c - \epsilon_c\epsilon_a - \epsilon_a\epsilon_b}.$$

Ostatni rezultat jest nader piękny; jego - oczywista zresztą - symetria jest uderzająca.

Wyrażenie podpierwiastkowe można też przedstawić inaczej, np. w postaci:

$$\frac{1}{2}(\epsilon_b - \epsilon_c)^2 + (\epsilon_c - \epsilon_a)^2 + (\epsilon_a - \epsilon_b)^2$$

lub też w postaci: $(\varepsilon_a + \varepsilon_b + \varepsilon_c)^2 - 3(\varepsilon_b\varepsilon_c + \varepsilon_c\varepsilon_a + \varepsilon_a\varepsilon_b)$. Widzimy przeto, że zdłuże główne wyrażają się płaskimi niezmiennikami: $\varepsilon_a + \varepsilon_b + \varepsilon_c$ tudzież $\varepsilon_b\varepsilon_c + \varepsilon_c\varepsilon_a + \varepsilon_a\varepsilon_b$, łądżąc podobnymi do odnośnych przestrzennych.

Temat 1.1. Opracować konstrukcję dwuramiennego i trójramiennego tensometru.

Temat 2.1. Opracować teorię wyrównania pomiaru tensometrem dwuramiennym w dwóch różnych położeniach.

Temat 3.1. Opracować teorię pomiaru wybitnie wzdłuż prostej zmiennego zdłużu przez przesuwanie zwykłego tensometru o ułamek rozstawu jego ostrzy.

2. SIŁA I NAPRĘŻENIE

Wpływy, jakim podlegają ciała rzeczywiste, podzielić możemy na dwie grupy. Do jednej należą przyczyny natury mechanicznej, do drugiej przyczyny natury niemechanicznej. Wpływami mechanicznymi są siły. Przyczyny pochodzenia niemechanicznego są rozmaitej natury, a więc chemicznej, jak np. skurcz betonu, termicznej, jak np. podgrzanie stali, montażowej, np. rozmyślne uchybienia podporowe itp. Wpływy mechaniczne określone są wprost danymi obciążeniami, niemechaniczne uwarunkowane bywają z reguły jakimś postulatem natury geometrycznej. Te ostatnie interesują nas w mechanice w wypadkach hyperstatycznych, wtedy bowiem są one znów przyczyną powstawania sił. W ten sposób w obu wypadkach rzecz sprowadza się do rozpatrywania działania sił. Niemniej podział na dwie grupy charakterystyczne jest istotny dla zagadnień mechaniki technicznej z powodu odmiennego w obu przypadkach schematu rozwiązywania.

Siły zewnętrzne, jakim podlega układ, dzielimy na obciążenia i odpory. Odpory są siłami powierzchniowymi, obciążenia stanowią siły powierzchniowe i objętościowe (masowe). Zaliczyć też do nich możemy siły bezwładności, uwarunkowane przyspieszeniami części układu.

Weźmy pod uwagę w otoczeniu dowolnego punktu O powierzchni ograniczającej układ jakieś obciążone pole ΔA . Wiadomo nam jest, że siły działające na to pole redukują się w najogólniejszym wypadku do jakiejś siły ΔP i jakiegoś momentu (pary sił) ΔK . Zakładamy, że natura sił powierzchniowych jest tego rodzaju, że różna od zera jest tylko jedna z granic stosunków $\frac{\Delta P}{\Delta A}$ i $\frac{\Delta K}{\Delta A}$, a mianowicie, że jest:

$$\lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta A} = p \neq 0, \text{ natomiast } \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta K}{\Delta A} = 0.$$

Wielkość p nazywamy natężeniem siły powierzchniowej w uważanym miejscu O lub też siłą odniesioną do (pomyślanej) jednostki pola w tymże miejscu. Siła powierzchniowa jest w powyższym sensie siłą rozłożoną; na elementarne pole dA przypada siła $p \cdot dA$. Znajomość wielkości p pozwala na odwrót zredukować obciążenie skończonej powierzchni do siły i momentu. Gdy odnośne pole jest małe w porównaniu z polem ograniczającym cały układ, a p znika poza tym polem, rezultatem redukcji jest tzw. po-

wierzchniowa siła lub powierzchniowy moment s k u p i o n y. Ta, w mechanice układów sztywnych, nader pożyteczna abstrakcja jest w mechanice układów odkształcalnych osobliwością przysparzającą wiele kłopotów. Wyznaczenie prawdziwego pola jej działania wymaga rozpatrzenia problemu styku dwóch ciał rzeczywistych; obecność jej powoduje wybitne lokalne osłabienie materiału układu.

Weźmy z kolei pod uwagę w otoczeniu dowolnego punktu O , położonego we wnętrzu układu, jakąś objętość ΔV . Siły działające na przynależną tej objętości masę redukują się do jakiejś siły ΔQ i jakiegoś momentu ΔL . Tu również zakłada się, że tylko jeden ze stosunków ma granicę różną od zera, a to, że:

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V} = q \neq 0 \text{ i w przeciwieństwie do tego, że:}$$

$$\lim_{\Delta Q \rightarrow 0} \frac{\Delta L}{\Delta Q} = 0.$$

Będziemy respektować tego rodzaju rozpowszechnione w nauce mechaniki zapatrywanie, jakkolwiek nie jest ono zawsze słuszne. Wiadomo jest bowiem że działania elektromagnetyczne prowadzą do pojęcia natężenia momentu masowego; w ten sposób zagadnienie np. równowagi igiełki magnetycznej uchyla się od naszych badań. Wielkość q nazywamy n a t ę ż e n i e m s i ł y o b j ę t o ś c i o w e j w rozpatrywanym punkcie O lub też s i ł ą o d n i e s i o n ą d o (pomyślanej) j e d n o s t k i o b j ę t o ś c i w tym miejscu. Znajomość wielkości q pozwala zredukować siły objętościowe skończonej części układu do siły i momentu. Gdy objętość rozważana jest mała w porównaniu z objętością całego układu, a q znika poza tym małym obszarem, rezultatem redukcji jest objętościowa siła lub objętościowy moment s k u p i o n y.

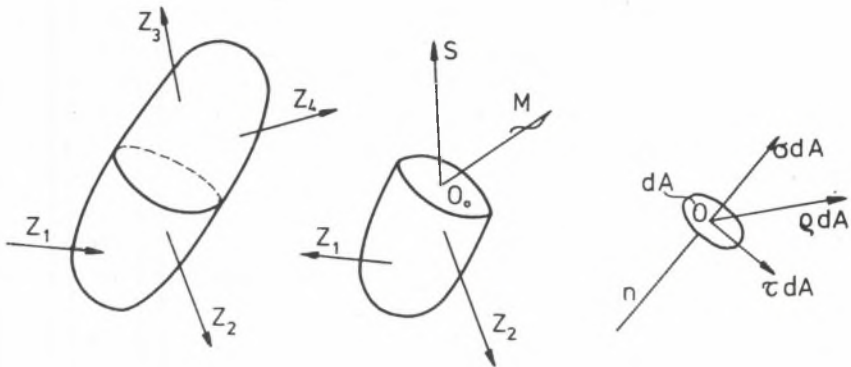
Siły objętościowe są proporcjonalne do objętości cząstek układu. Niekiedy celowe jest rozumieć pod nimi tylko te z sił, które pochodzą od obecności p o l a, jak np. ciężar własny. W tym wypadku siły objętościowe, pochodzące od czasowych zmian przemieszczeń, a więc od przyspieszeń typu $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ itp., wydzielaemy w osobną grupę jako s i ł y b e z w ł a d n o ś c i.

Siły zewnętrzne wywołują wzmożone działanie sił międzycząsteczkowych. Interesującą nas tu nadwyżkę obejmujemy mianem s i ł w e w n ę t r z n y c h.

Cząsteczki, z których zbudowana jest materia, mają wymiary liniowe rzędu tysięcznej części mikronu. Tego samego rzędu jest też wzajemny odstęp molekułów. Zasięg ich wzajemnego działania wynosi około setnej części mikronu. Jeśli więc przez układ materialny wykonamy myślowy przekrój, to za siedzibę sił, jakimi jedna część układu działa na drugą, należy przyjąć warstwękę wymienionej ostatnio grubości. Jeśli za element powierzchni prze-

kroju przyjmujemy kwadrat o boku jednej tysięcznej milimetra, to i tak grubość płytki działania będzie mała w porównaniu do boku elementu. Powyższe względy pozwalają nam, podobnie jak w teorii stanu odkształcenia, przyjąć użyteczne założenie, że materia jest jednolita, a nadto przypisać siłom wewnętrznym również naturę ciążłą i powierzchniową.

Wewnętrzną siłę powierzchniową będziemy nazywać krótko naprężeniem. Aby sobie owo naprężenie wyobrazić, przeprowadzamy następującą operację myślową: Niech siły zewnętrzne Z_1 , działające na układ, pozostają w równowadze również w sensie ogólniejszym, wyrażonym zasadą bezwładności. Wtedy w równowadze pozostaje także układ materialny. Ponieważ jest to układ stały, przeto każda dowolnie odcięta jego część trwa również w równowadze. Gdy tak jest, to siły działające na tę część pozostają również w równowadze. Do sił tych zaliczamy siły zewnętrzne, przynależne odciętej części układu, ponadto te siły, które zastępują działanie odrzuconej części układu. Te ostatnie są dla całości siłami wewnętrznymi; dla odciętej części przybrały charakter sił zewnętrznych. Ich ogólna suma S i ogólny moment M dadzą się wyznaczyć z równań równowagi wypisanych dla odciętej części układu. Otóż uważamy, zgodnie z założeniem, że wielkości S i M pochodzą z redukcji sił elementarnych $q \cdot dA$ rozłożonych na powierzchnię wykonanego przekroju. Wyrazem przeprowadzonej tu kalkulacji jest rys. 1.2.



Rys. 1.2

Siłą elementarną w otoczeniu miejsca O jest $q \cdot dA$. Siłę tę rozkładamy na część $\sigma \cdot dA$ - normalną do pola elementarnego dA i na część τdA - styczną do tegoż elementu.

Wielkość q nazywamy naprężeniem całkowitym, wielkość σ naprężeniem normalnym, wielkość τ naprężeniem stycznym. Są to naprężenia w punkcie

0, przynależnej orientacji. Prawie cały nasz wysiłek zmierza w mechanice układów rzeczywistych do tego, by w dowolnym punkcie dla dowolnej orientacji wyznaczyć właśnie owe naprężenia σ , τ . Zbadamy obecnie, jakim warunkom muszą one czynić zadość w poprawnym rozwiązaniu i jak się one przekształcają.

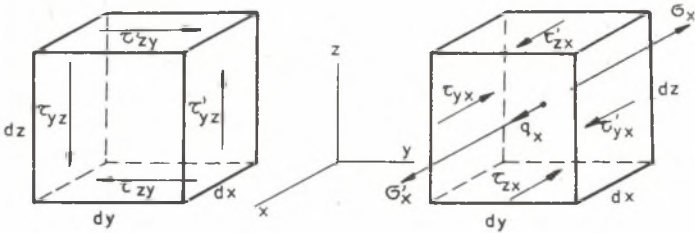
Zajmiemy się prostopadłościennym elementem wyodrębnionym z układu materialnego. Siłę objętościową jednostkową rozłożymy na składowe q_x , q_y , q_z ; siły bezwładności odniesione do jednostki objętości wynoszą $\delta \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, $\delta \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$, $\delta \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$, gdzie δ jest gęstością materiału. Mnożąc te siły jednostkowe przez objętość elementu $dx dy dz$, otrzymamy siły składowe, działające na zawartość elementu w kierunku osi prostokątnego układu x , y , z . Naprężenia normalne, działające na ograniczenia elementu, otrzymają rozmaite oznaczenia σ_x , σ_y , σ_z . Naprężenia styczne natomiast otrzymać muszą z konieczności - przynajmniej na razie - podwójny wskaźnik; pierwszy oznacza orientację przynależnego pola, tj. indeksa odnośnej normalnej, drugi zaś określa równoległość do właściwej osi przyjętego układu współrzędnych. Mamy przeto dla naprężeń stycznych oznaczenia τ_{yz} i τ_{zy} , τ_{zx} i τ_{xz} , τ_{xy} i τ_{yx} . Jeśli naprężenia σ , τ pomnożymy przez przynależne im pola, więc $dydz$, $dzdx$ lub $dxdy$, otrzymamy siły powierzchniowe elementu. Na dwóch ścianach przeciwległych o normalnej, np. x , naprężenia różnią się o przynależną różniczkę cząstkową, więc o $\frac{\partial \sigma}{\partial x} dx$, $\frac{\partial \tau}{\partial x} dx$. Analogicznie jest w kierunkach y i z .

Musimy koniecznie przyjąć jakąś zasadę regulującą sprawę a l g e b r a i c z n y c h z n a k ó w naprężeń. Naprężenia normalne możemy uważać za dodatnie, gdy ich zwroty są skierowane na zewnątrz elementu, tzn. od ścian ograniczających go. Ta reguła jest niewystarczająca dla naprężeń stycznych. Przyjmiemy wobec tego taką, która jednolicie służyć może dla jednych i drugich.

Naprężenie uważamy za dodatnie, gdy na ścianie dodatniej normalnej zewnętrznej ma kierunek dodatniej osi układu lub gdy na ścianie ujemnej normalnej zewnętrznej ma kierunek ujemnej osi układu; w każdym przeciwnym wypadku jest naprężenie ujemne.

Dla ilustracji na rys. 2.2 zaznaczone dwa niepełne warianty wprowadzonych tu wielkości i oznaczeń. We wszystkie wielkości zaznaczono jak dodatnie. Dla uproszczenia oznaczono

$$\sigma'_x = \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx, \quad \tau'_{yz} = \tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dy, \quad \tau'_{zy} = \tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} dz,$$
$$\tau'_{zx} = \tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz, \quad \tau'_{yx} = \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy.$$



Rys. 2.2

Dla przejrzystości zaś nie zaznaczono przy naprężeniach jako mnożników przynależnych im pól dydz, dzdx, dxdy, a przy q_x mnożnika dxdydz.

Siły działające na element muszą czynić zadość sześciu warunkom równowagi. Z trzech równań momentów wypiszemy tu to względem prostej równoległej do osi x i przechodzącej przez środek elementu. Zważywszy, że siły równoległe i przecinające się z tą osią dają zerowe momenty, skorzystamy z lewej części rys. 2.2 i napiszemy:

$$(\tau'_{yz} + \tau_{yz}) \cdot dx dz \cdot \frac{dy}{2} - (\tau'_{zy} + \tau_{zy}) dx dy \cdot \frac{dz}{2} = 0.$$

Analogiczne równania można napisać dla dwóch pozostałych osi. Po uzasadnionych pominięciach otrzymujemy stąd rezultat:

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \tau_x', \quad \tau_{zx} = \tau_{xz} = \tau_y', \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau_z' \quad (1.2)$$

redukujący liczbę niezależnych naprężeń stycznych do trzech. Okazało się bowiem, że naprężenia styczne, różniące się tylko порядkiem wskaźników, są wzajemnie równe. Możemy to **t w i e r d z i e n i e o r ó w n o w a r t o ś c i o d p o w i a d a j ą c y c h n a p r ę ż e ń s t y c z n y c h** wyrazić następująco. Naprężenia styczne, w dwóch prostopadłych przekrojach, skierowane prostopadle do ich krawędzi przecięcia, są wzajemnie równe. W związku z powyższym zrezygnowaliśmy w (1.2) z podwójnych wskaźników, zastępując je indeksem uzupełniającym pojedynczym.

Warto zaznaczyć, że powyższy prosty rezultat zawdzięczamy założeniu nieobecności objętościowego momentu, na który to szczególnie zwróciliśmy już raz uwagę. Przy takim założeniu **s t a n n a p i ę c i a** w dowolnym punkcie ciała oznaczony jest sześciu niezależnymi składowymi, a mianowicie trzema naprężeniami normalnymi i trzema stycznymi.

Zadanie 1.2. W pewnym, symetrycznym względem płaszczyzny $z = 0$ układzie, w symetrycznie względem tejże płaszczyzny położonych przekrojach o symetrycznie dobranych normalnych naprężeniach są również względem tej płaszczyzny symetryczne. Jak się zachowują funkcje określające σ, τ względem zmiennej z .

Odpowiedź 1.2. Funkcje określające naprężenia $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_z$ są parzyste, określające zaś naprężenia τ_x, τ_y - nieparzyste w zmiennej z .

Z trzech równań sił napiszemy tutaj to dla osi x . Zważywszy, że siły prostopadłe do niej dają zerowe rzuty, skorzystamy z prawej części rys. 2.2 i napiszemy:

$$(\sigma'_x - \sigma_x)dydz + (\tau'_z - \tau_z)dzdx + (\sigma'_y - \tau_y)dx dy + q_x dx dy dz = 0.$$

Analogiczne równania można wypisać dla kierunków y i z . Po uproszczeniu znajdziemy:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_z}{\partial y} + \frac{\partial \tau_y}{\partial z} + q_x = 0,$$

$$\frac{\partial \tau_z}{\partial x} + \frac{\partial \tau_y}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial z} + q_y = 0, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \tau_y}{\partial x} + \frac{\partial \tau_x}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + q_z = 0.$$

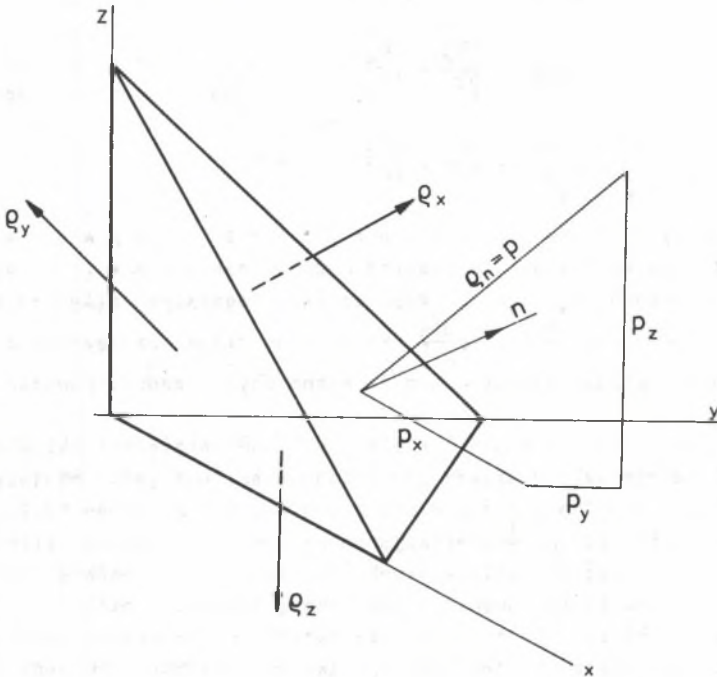
Powyższe trzy równania są równaniami równowagi elementarnej cząstki układu. Są one też równaniami ruchu jeśli w wielkościach q_x, q_y, q_z zawarte są jednostkowe siły bezwładności, tj.: $-\delta \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, -\delta \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, -\delta \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$. Każde prawidłowe rozwiązanie z dziedziny mechaniki układów odkształcalnych winno czynić zadość powyższym równaniom.

Stan napięcia jest jednorodny, gdy wszystkie składowe σ, τ są w obrębie całego układu stałe; gdy składowe są funkcjami miejsca, nazywamy stan napięcia nieliniowy. Z równań (2.2) wynika, że koniecznym, lecz niewystarczającym warunkiem istnienia stanu jednorodnego jest nieobecność sił masowych q . Wiele myśli poświęcili badacze laboratoryjnemu konstruowaniu stanów jednorodnych. Z nich tylko można wysnuć należyte wnioski o zachowaniu się materii w procesach mechanicznych. Niestety dają się one realizować tylko w nielicznych wypadkach; w przyrodzie prawie nie istnieją.

Kierunkowi x przynależą naprężenie normalne σ_x i styczne $\tau = \sqrt{\tau_y^2 + \tau_z^2}$ czyli całkowite $q_x = \sqrt{\sigma_x^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2}$. Oznacza to - jak już wiemy - że jeśli w badanym punkcie O napiętego układu wykonamy w myśli przekrój o normalnej x , to stwierdzimy w nim takie właśnie naprężenia. Analogicznie jest z kierunkami y i z . Stan napięcia w punkcie O jest określony, gdy dana tam jest szóstka składowych $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_x, \tau_y, \tau_z$. Rozumiemy to tak, że znajomość tej szóstki pozwala nam obliczyć naprężenia σ, τ

dowolnej orientacji n w punkcie O . Obliczanie zmierzające do tego celu nazywamy **przekształceniem** składowych stanu napięcia.

Ażeby dokonać tej transformacji, przeprowadzamy następującą spekulację myślową: W jakimkolwiek innym przekroju równoległym do poprzedniego znajdziemy te same σ , τ , jeśli stan napięcia jest jednorodny. Wtedy jednak trzeba konsekwentnie przyjąć, że siły masowe nie istnieją. Przy takiej koncepcji zagadnienie przekształcenia zamieniamy na zagadnienie równowagi dowolnego elementu skończonego pod działaniem jedynie sił powierzchniowych, a mianowicie pochodzących od naprężeń. Rozważanie przeto rzędu owych ewentualnych sił masowych - które tak często spotykamy u wielu autorów - jest w powyższym oświetleniu nie tylko zbędne, ale w ogóle fałszywe, w istocie swej bowiem zagadnienie transformacji jest czymś zgoła **różnym** od zagadnienia równowagi.



Rys. 3.2

Rozważmy tedy równowagę sił działających na czworościan jak na rys.3.2. Możemy dla prostoty przyjąć, że pole trójkątne przynależne normalnej n wynosi 1. Wtedy pola trójkątne odcięte na płaszczyznach układu odniesienia x , y , z wynoszą po prostu: n_x , n_y , n_z , czyli są liczebnie równe odnośnym dostawom kierunkowym. Z pomnożenia naprężeń całkowitych przez przynależne

poła otrzymamy siły. Warunek równowagi w postaci wektorialnej daje:

$$\bar{Q}_n = \bar{Q}_x n_x + \bar{Q}_y n_y + \bar{Q}_z \cdot n_z.$$

Niektórzy autorzy nazywają utwór, powstały z przyporządkowania kierunkom przestrzeni skalarów jednorodnie - liniowo zależnych od dostaw kierunkowych, wektorem. Ci sami wtedy nazywają utwór, powstały z przyporządkowania kierunkom przestrzeni wektorów jednorodnie - liniowo zależnych od dostaw kierunkowych, tensorem. Z tym drugim wypadkiem właśnie się tu spotkaliśmy - jak na to wskazuje ostatni rezultat.

Zyskamy na wyrazistości, jeśli powyższe równanie wektorowe rozbijemy na trzy skalarowe. Zważmy, że \bar{Q}_x nie jest równoległe do x , Q_n nie jest równoległe do n . Wprowadzenie składowych równoległych do osi układu z zachowaniem oznaczenia Q wymagałoby wprowadzenia podwójnych znaczków. Unikniemy ich, wprowadzając z powrotem oznaczenia σ , τ , nadto $p = Q_n$.

Znajdziemy:

$$\begin{aligned} p_x &= \sigma_x n_x = \tau_z n_y + \tau_y n_z \\ p_y &= \tau_z n_x + \sigma_y n_y + \tau_x n_z \\ p_z &= \tau_y n_x + \tau_x n_y + \sigma_z n_z \end{aligned} \tag{3.2}$$

Równania (3.2) są dokładnie tak samo zbudowane jak równania (10.1) w teorii odkształcenia. Istotnie, wtedy stan napięcia w dowolnym punkcie ciała określony jest **t e n s o r e m n a p i ę c i a**.

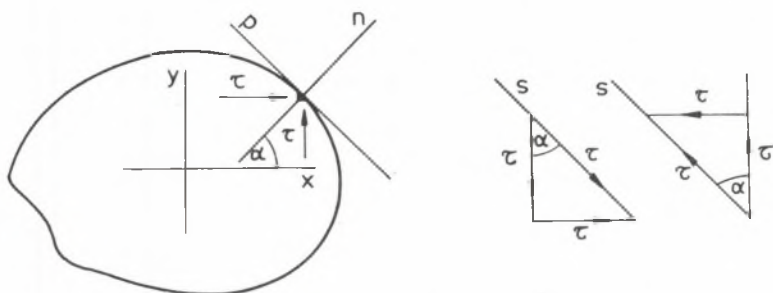
Wiadomo już nam jest, że składowe σ , τ muszą wewnątrz układu czynić zadość równaniom różniczkowym (2.2). Dodajmy, że na powierzchni ograniczającej układ muszą one czynić zadość **w a r u n k o m b r z e g o w y m**, to znaczy - muszą być one tam zgodne z danymi tematem zagadnienia obciążeniami, a więc pewnymi siłami powierzchniowymi. W warstewce przybrzeżnej nie mogą przeto naprężenia σ , τ przyjmować dowolnych wartości, lecz na zasadzie równości działania i oddziaływania obliczone z ich brzegowych wartości wyrażenia p_x , p_y , p_z muszą być równe składowym obciążeniom powierzchniowym. Tego rodzaju warunki brzegowe nazywamy **w a r u n k a m i o b c i ą ż e n i a**. Jeśli zatem n_x , n_y , n_z oznaczają dostawy kierunkowe normalnej zewnętrznej brzegu, to równania (3.2) są warunkami obciążenia.

Zadanie 2.2. Układ pryzmatyczny, o tworzących równoległych do osi z i ograniczony przekrojami prostokątnymi do tej osi, obciążony jest tylko na owych przekrojach końcowych. Podać warunki brzegowe.

Odpowiedź 2.2. Na pobocznicy jest $n_z = 0$, $p_x = p_y = p_z = 0$, czyli $\sigma_x n_x + \tau_z n_y = 0$, $\tau_z n_x + \sigma_y n_y = 0$, $\tau_y n_x + \tau_x n_x = 0$. Na ograniczeniach końcowych jest $n_x = n_y = 0$, $n_z = 1$, czyli $\tau_y = p_x$, $\tau_x = p_y$, $\sigma_z = p_z$.

Zadanie 3.2. Podać mechaniczną i geometryczną interpretację warunku $\tau_y n_x + \tau_x n_y = 0$ z zadania 2.2.

Odpowiedź 3.2. Mechaniczna interpretacja wymienionego warunku brzmi: W kierunku osi z pobocznica układu nie jest obciążona. Dla znalezienia wyjaśnienia geometrycznego zważmy na twierdzenie o równoważności odpowiadających naprężeń stycznych i nakreślmy τ_x i τ_y przy brzegu dowolnego przekroju $z = \text{stała}$ jak na rys. 4.2. Niech normalna w dowolnym punkcie konturu zawiera z osią x kąt α . Wtedy składowa całkowitego naprę-



Rys. 4.2

żenia stycznego $\tau = \sqrt{\tau_x^2 + \tau_y^2}$ w kierunku n wynosi $\tau_y \cos \alpha + \tau_x \sin \alpha$, czyli właśnie $\tau_y n_x + \tau_x n_y$. Według założenia ma ona wynosić zero. Zatem interpretacja geometryczna brzmi: Całkowite naprężenie styczne τ w każdym punkcie brzegu musi mieć kierunek s styczny do niego. Zwroty dodatnie dla τ_x i τ_y w miejscu wskazanym na lewej części rys. 4.2 nie są tam możliwe. Naprężenia te są tam odmiennych znaków, jak w prawej części rys. 4.2.

Zgodność formalna równań (10.1) i (3.2) pozwala wszelkie inne rozważania znakomicie uprościć. W tym celu należy tylko w odnośnych wzorach teorii odkształcenia wstawić w miejsce litery ε literę σ tudzież zamiast wielkości $\frac{1}{2} \gamma$ wielkość τ ; wskaźniki należy zatrzymać bez zmiany. Streszczamy się przeto, w zamian celowo rzecz uzupełniając innymi szczegółami.

Naprężenie całkowite p orientacji n określone jest relacją:

$$p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2. \quad (4.2)$$

Jego składową normalną dają wzory (5.2) lub (6.2):

$$\sigma = p_x n_x + p_y n_y + p_z n_z, \quad (5.2)$$

$$\sigma = \sigma_x n_x^2 + \sigma_y n_y^2 + \sigma_z n_z^2 + 2\tau_{xy} n_x n_y + 2\tau_{yz} n_y n_z + 2\tau_{zx} n_z n_x. \quad (6.2)$$

Składową styczną wyznaczyć można z (7.2) lub (8.2), a to:

$$\tau^2 = p^2 - \sigma^2, \quad (7.2)$$

$$\tau^2 = (p_y n_z - p_z n_y)^2 + (p_z n_x - p_x n_z)^2 + (p_x n_y - p_y n_x)^2. \quad (8.2)$$

Jej orientację m określają dostawy kierunkowe m_x, m_y, m_z , a to:

$$\tau m_x = (\sigma_x - \sigma) n_x + \tau_z n_y + \tau_y n_z,$$

$$\tau m_y = \tau_z m_x + (\sigma_y - \sigma) n_y + \tau_x n_z, \quad (9.2)$$

$$\tau m_z = \tau_y m_x + \tau_x m_y + (\sigma_z - \sigma) n_z.$$

Naprężenia normalne głównie $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ są pierwiastkami równania kubicznego:

$$\sigma^3 - s\sigma^2 + s'\sigma - s'' = 0, \quad (10.2)$$

gdzie niezmienniki s, s', s'' tensora naprężeń wynoszą:

$$s' = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z,$$

$$s' = \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x + \sigma_x \sigma_y - \tau_x^2 - \tau_y^2 - \tau_z^2, \quad (11.2)$$

$$s'' = \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_x \tau_y \tau_z - \sigma_x \tau_x^2 - \sigma_y \tau_y^2 - \sigma_z \tau_z^2.$$

Z niezmienników tych tworzyć możemy też inne, jak np. zawsze dodatni: $s^2 - 2s'$, bardzo często pojawiający się również stale dodatni: $s^2 - 3s'$, wreszcie: $s^2 - 4s'$ przy $s'' = 0$ również dodatni. Niezmiennik s'' odgrywa małą rolę. Przynależne trzy wzajemnie prostopadłe kierunki głównie stanu napięcia podają formuły:

$$n_x = \sqrt{\frac{b_x}{b}}, \quad n_y = \sqrt{\frac{b_y}{b}}, \quad n_z = \sqrt{\frac{b_z}{b}},$$

$$b = b_x + b_y + b_z, \quad (12.2)$$

$$b_x = (\sigma_y - \sigma)(\sigma_z - \sigma) - \tau_x^2, \quad b_y = (\sigma_z - \sigma)(\sigma_x - \sigma) - \tau_y^2, \quad b_z = (\sigma_x - \sigma)(\sigma_y - \sigma) - \tau_z^2,$$

w których kolejno w miejsce σ należy wstawić $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Naprężenia główne są ekstremami funkcji σ określonej wzorem (6.2).

W każdym punkcie układu, w którym istnieje niejednorodny stan naprężenia, wyznaczyć możemy trzy kierunki główne w sposób ostatnio wskazany. Wyobraźmy sobie, że operację tę wykonaliśmy w pewnym, zresztą dowolnie wybranym punkcie P . Przejdźmy od punktu P , posuwając się o krótki odcinek Δs w jednym z kierunków głównych do punktu sąsiedniego P' . W punkcie P' stwierdzimy inny stan naprężenia, a zatem inne również kierunki główne. Przejdźmy tedy od punktu P' do sąsiedniego P'' , posuwając się o mały odcinek $\Delta s'$ w nowym, najmniej od poprzedniego odchylonym, kierunku głównym. Operację powyższą kontynuujemy dalej. Granicę otrzymanego wieloboku stanowi krzywa, zwana trajektorią naprężenia głównego lub według propozycji Lamego izostatą. Zatem izostata posiada tę własność, iż styczna, narysowana w dowolnym jej punkcie, wskazuje kierunek naprężenia głównego w tymże punkcie. Widoczne jest, że przez każdy punkt układu przechodzą trzy ortogonalnie przecinające się trajektorie.

Zadanie 4.2. Kiedy trajektorie naprężeń głównych są liniami prostymi?

Odpowiedź 4.2. Z pewnością wtedy, gdy stan naprężenia jest jednorodny. Ogólnie zaś wtedy, gdy składowe stanu naprężenia są tego rodzaju funkcjami miejsca, iż dostawy kierunkowe określone wzorami (12.2) nie zależą od miejsca.

Gdy $s'' \neq 0$, wszystkie trzy naprężenia główne są różne od zera, a stan naprężenia jest trójosiowy, czyli przestrzenny. Gdy $s'' = 0, s' \neq 0$ jedno z naprężeń głównych jest zerem, a stan naprężenia jest dwuosiowy czyli płaski. Gdy $s'' = 0, s' = 0, s \neq 0$ jedno tylko naprężenie główne jest różne od zera, a stan naprężenia jest jednoosiowy czyli liniowy.

Warto przy tej sposobności zwrócić uwagę na pewien znany z algebry fakt. Gdy wszystkie trzy pierwiastki równania stopnia trzeciego są liczbami rzeczywistymi, nie dadzą się one bezpośrednio wyrazić przy pomocy współczynników tego równania. Zatem w wypadku ogólnym $s'' \neq 0$, aby znaleźć naprężenia główne $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, musimy znać wprost liczebne wartości niezmienników s, s', s'' . Jest to przyczyną pewnych kłopotów.

Zadanie 5.2. Dane są nieliczebne wartości niezmienników s, s' ; ponadto wiadoma jest wartość σ_0 jednego naprężenia głównego. Wyznaczyć pozostałe dwa σ_1, σ_2 i uporządkować wszystkie trzy według wielkości.

Odpowiedź 5.2. Czworomian lewej strony równania (10.2) jest podzielny przez dwumian: $\sigma - \sigma_0$ albowiem zgodnie z tekstem zachodzi równość $\sigma_0^3 - s \cdot \sigma_0^2 + s' \sigma_0 - s'' = 0$. Po podzieleniu i przyrównaniu do zera otrzymujemy równanie drugiego stopnia: $\sigma^2 - (s - \sigma_0)\sigma + (s' - s\sigma_0 + \sigma_0^2) = 0$, a stąd pozostałe naprężenia główne:

$$\sigma_{1,2} = \frac{1}{2}(s - \sigma_0) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(s + \sigma_0)^2 - 4(s' + \sigma_0^2)},$$

dla których widocznie jest $\sigma_1 > \sigma_2$. Zadanie sprowadza się obecnie do umiejscowienia w tej nierówności wielkości σ_0 . Rozwiązujący powinien dojść do następującego rezultatu: Gdy $s' - 2s\sigma_0 + 3\sigma_0^2 \geq 0$ nadto $s < 3\sigma_0$; jest $\sigma_0 \geq \sigma_1 > \sigma_2$; gdy $s' - 2s\sigma_0 + 3\sigma_0^2 \geq 0$, nadto $s < 3\sigma_0$ jest $\sigma_1 > \sigma_2 \geq \sigma_0$; gdy wreszcie $s' - 2s\sigma_0 + 3\sigma_0^2 < 0$, to niezależnie od $s \approx 3\sigma_0$ jest $\sigma_1 > \sigma_0 > \sigma_2$. Przypadek $s = 3\sigma_0$ należy do nierówności $s' - 2s\sigma_0 + 3\sigma_0^2 < 0$, czyli $\sigma_1 > \sigma_0 > \sigma_2$, gdy jednocześnie $s' - 2s\sigma_0 + 3\sigma_0^2 = 0$, nadto $s = 3\sigma_0$, jest $\sigma_1 = \sigma_0 = \sigma_2$.

Zadanie 6.2. Stan napięcia jest dwuosiowy. Rozstrzygnąć znaki algebraiczne naprężeń głównych.

Odpowiedź 6.2. Odpowiedź zawarta jest w poprzednim zadaniu; należy tam położyć $\sigma_0 = 0$. Naprężenia główne wynoszą:

$$\sigma_{1,2} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \pm \frac{1}{2}\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2(\sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x + \sigma_x\sigma_y) + 4(\tau_x^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2)}.$$

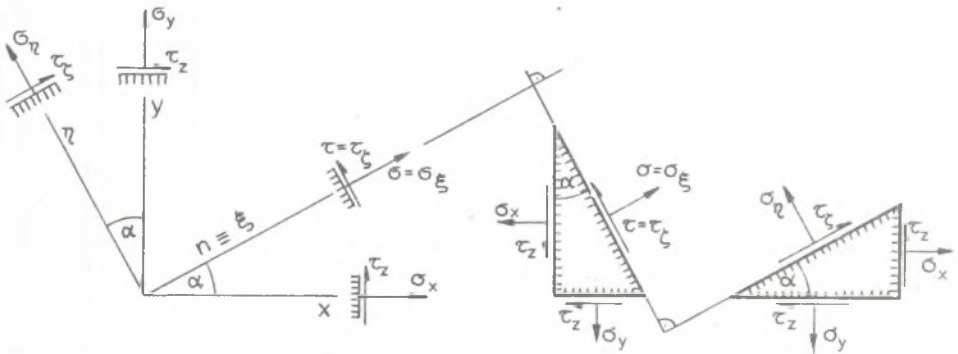
Dla $s' > 0$, nadto $s < 0$, jest $0 \geq \sigma_1 > \sigma_2$; dla $s' \geq 0$, nadto $s > 0$, jest $\sigma_1 > \sigma_2 \geq 0$; dla $s' < 0$ niezależnie od $s \approx 0$ jest $\sigma_1 > 0 > \sigma_2$. Nie należy zapominać, że $s'' = 0$, dzięki czemu wyrażenie podpierwiastkowe jest dodatnie.

Zdarza się, że stan napięcia jest dwuosiowy w obrębie całego układu. Tak jest np. w często pojawiającym się w technice wypadku, gdy układ ograniczony jest dwiema równoległymi płaszczyznami, których oddalenie jest małe w porównaniu do innych wymiarów tak powstałej tarczy, obciążenia zaś leżą w płaszczyźnie tej tarczy, czyli $q_z = 1, p_z = 0$. W każdym punkcie płaszczyzn ograniczających jest $\tau_x = \tau_y = \sigma_z = 0$, tj. $s = 0$, czyli w każdym punkcie układu istnieje dwuosiowy stan napięcia. W takim wypadku mówimy o płaskim zagadnieniu napięcia.

Ponieważ płaskie stany odgrywają ważną rolę, rozpatrzmy je tu szczególnie, mimo iż zawarte są one w teorii ogólnej, już przedstawionej. Zgo-

dnie z powyższym określeniem jedynymi różnymi od zera składowymi są: σ_x , σ_y , τ_z . Równania równowagi (2.2) i warunki brzegowe (3.2) redukują do dwóch. Naprężenia σ , τ dowolnej orientacji n otrzymamy ze wzorów (6.2) i (8.2), kładąc w nich $n_x = \cos\alpha$, $n_y = \sin\alpha$, $n_z = 0$.

Wolimy jednak rzecz jeszcze raz powtórzyć metodycznie. W lewej części rys. 5.2 zaznaczono kierunek n w układzie xy i przynależne mu przez nas poszukiwane składowe σ , τ . Wszystkie wielkości uważamy za algebraiczne; chcemy je zaznaczyć na rysunku jak dodatnie. Respektując naszą umowę odnośnie znaków naprężeń zaopatrzyliśmy σ_x , σ_y , τ_z w zaznaczone na rysunku zwroty. Wobec tego σ orientacji n otrzymało również strzałkę od przekroju. Widzimy, że przy nakreślonym jedynie kierunku n znak przynależnego mu τ pozostaje nieoznaczony. Chcąc go ustalić, musimy określić dodatni kierunek jakiejś pomocniczej osi, prostopadłej do n . Wobec tego przyjęliśmy, że układ xy został obrócony w położenie nowe ξ , η i oś ξ zidentyfikowaliśmy z kierunkiem n . W ten sposób uczyniliśmy



Rys. 5.2

$\sigma = \sigma_\xi$, nadto $\tau = \tau_\xi$, przy czym dla τ_ξ możemy już obecnie ustalić dodatni zwrot. Rzecz można rozszerzyć naprężeniem σ_η kierunku η ; przynależne mu naprężenie styczne wynosi znów τ_ξ , a to zgodnie z twierdzeniem o równowartości odpowiadających naprężeń stycznych. W ten więc sposób trójkę σ_x , σ_y , τ_z mamy przekształcić w trójkę σ_ξ , σ_η , τ_ξ .

Zagadnienie transformacji zamienimy - o czym już była mowa - na zagadnienie równowagi jednorodnego stanu. Grubość trójkątnego elementu wyciętego z tarczy jest stała. Gdy przeto długość przekątnej przyjmijemy tak, że pole przeciwprostokątne wyniesie 1, to pola przyprostokątne będą równe $\cos\alpha$ i $\sin\alpha$. Mnożąc pola przez przynależne naprężenia składowe otrzymamy siły składowe. Za osie rzucania przyjmijemy kierunki σ_ξ i τ_ξ . Otrzymamy w tej chwili równania:

$$\sigma = \sigma_\xi = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + 2\tau_z \sin\alpha \cos\alpha$$

$$\tau = \tau_{\xi} = -(\sigma_x - \sigma_y) \sin \alpha \cos \alpha + \tau_z (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha),$$

zgodnie ze skróconymi formułami (6.2), (8.2). Jeśli w formule na σ w miejsce α wstawimy $\alpha + \pi/2$, otrzymamy wyrażenie dla σ_{η} .

Zadanie 7.2. Wyznaczyć $\sigma_{\eta}, \tau_{\xi}$ rozpatrując równowagę dotychczas nieużytkowanego drugiego elementu trójkątnego na rys. 5.2.

Odpowiedź 7.2. Postępując w sposób podany przy wyznaczaniu σ_{ξ}, τ_{ξ} znajdziemy: $\sigma_{\eta} = \sigma_x \sin^2 \alpha + \sigma_y \cos^2 \alpha - 2\tau_z \sin \alpha \cos \alpha$, nadto τ_{ξ} jak wyżej bez zmiany. Stwierdzamy przy tej sposobności: $\sigma_{\xi} + \sigma_{\eta} = \sigma_x + \sigma_y$.

Wzory dla $\sigma_{\xi}, \sigma_{\eta}, \tau_{\xi}$ przekształcimy celowo wprowadzając podwójny kąt transformacji. Rezultaty brzmią:

$$\sigma_{\xi} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \pm \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\alpha \pm \tau_z \sin 2\alpha, \quad (13.3)$$

$$\tau_{\xi} = -\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\alpha + \tau_z \cos 2\alpha,$$

przy czym we wzorze pierwszym górny znak odnosi się do górnego wskaźnika i przeciwnie. Widoczny jest związek $\frac{\partial \sigma}{\partial \alpha} = 2\tau$; poszukiwanie przeto kierunków głównych $\tau = 0$ jest identyczne z poszukiwaniem ekstremów naprężenia σ . Powyższy związek pozwala nam też zaopiniować zachowanie się funkcji $\sigma = \sigma_{\xi}$, a tym samym i pozostałej σ_{η} . Mianowicie dla $\alpha = 0$ jest $\tau = \tau_z$; gdy przeto jest $\tau_z > 0$, to w okolicy $\alpha = 0$ naprężenie rośnie i przeciwnie, gdy $\tau_z < 0$, to w okolicy $\alpha = 0$ naprężenie σ maleje.

Wyznamy kierunki i naprężenia główne. Kładąc $\tau = \tau_{\xi} = 0$, otrzymamy dla poszukiwanych szczególnych kierunków relację:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2\tau_z}{\sigma_x - \sigma_y}. \quad (14.2)$$

Ponieważ okresem funkcji tg jest π , przeto formuła powyższa określa dwa wzajemnie prostopadłe kierunki główne $\alpha = \alpha_0$ oraz $\alpha_2 = \alpha_1 + \pi/2$. Możemy, wracając do funkcji pojedynczego kąta, wyznaczyć z (14.2):

$$\operatorname{tg} \alpha_{\frac{1}{2}} = \frac{-(\sigma_x - \sigma_y) \pm \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_z^2}}{2\tau_z}. \quad (15.2)$$

Widzimy, że przy $\tau_z > 0$ jest α_1 kątem ostrym, czyli α_2 rozwartym i na odwrót, przy $\tau_z < 0$ jest α_1 kątem rozwartym, czyli α_2 kątem ostrym. Znak różnicy: $\sigma_x - \sigma_y$ decyduje dodatkowo o położeniu kierunków głównych względem dwusiecznych układu xy .

Wstawiając w σ_{ξ} względnie σ_{η} za 2α szczególną wartość $2\alpha_0$, wyznaczoną z (14.2), otrzymamy naprężenia główne, a to:

$$\sigma_{1/2} = \sigma_w = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_z^2}. \quad (16.2)$$

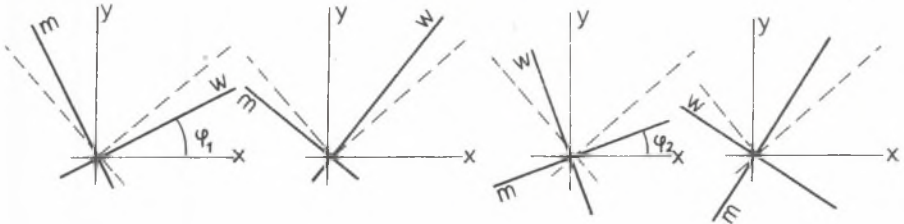
Wiemy już, że są one ekstremami analitycznymi w płaszczyźnie xy . Nie chcemy ich jednak - jak to robią inni autorzy - oznaczać przez σ_{\max} i σ_{\min} , albowiem pamiętamy o tym, że w zagadnieniu naszym istnieje jeszcze trzecie naprężenie główne, wynoszące zero; przy równych znakach wyznaczonych tu naprężeń σ_1 i σ_2 owo trzecie jest przeto zależnie od znaku tamtych maksymalne lub minimalne. Wyróżniamy wobec tego wyznaczone naprężenie większe i mniejsze znakami w i m .

Streszczając nasze uwagi dotyczące roli naprężenia τ_z podajemy rezultat ostateczny. Przy $\tau_z > 0$ naprężenie σ_w przynależy ostremu kątowi normalnej zewnętrznej przekroju, czyli σ_m kątowi rozwartemu; odwrotnie jest przy $\tau_z < 0$. Inaczej mówiąc, wskaźnikowi 1 formuły (15.2) odpowiada wskaźnik 1 formuły (16.2); więc indeksowi 2 w jednym wzorze odpowiada również indeks 2 w drugim.

Zadanie 8.2. Przedstawić rezultaty powyższej dyskusji szkicem, biorąc pod uwagę znaki naprężenia τ_z oraz różnicy $\sigma_x - \sigma_y$.

Odpowiedź 8.2. Rezultaty przedstawia rys. 6.2, na którym linie przerywane oznaczają symetralne kątów (xy).

$$\tau_z > 0, \sigma_x - \sigma_y > 0 \quad \tau_z > 0, \sigma_x - \sigma_y < 0 \quad \tau_z < 0, \sigma_x - \sigma_y < 0 \quad \tau_z < 0, \sigma_x - \sigma_y > 0$$



Rys. 6.2

Zadanie 9.2. Podać równania obu trajektorii w płaskim zagadnieniu napięcia. Podać ich położenie na brzegu prostopadłe obciążonym lub też nieobciążonym.

Odpowiedź 9.2. Równania te mają charakter różniczkowy; należy w formułach (15.2) w miejsce $\operatorname{tg} \alpha_1$ napisać $(\frac{dy}{dx})_1$. W stanach niejednorodnych są σ_x , σ_y , τ_z funkcjami miejsca. Rzecz sprowadza się więc do całkowania

dwoch równań postaci $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$. Niech normalna w pewnym miejscu brzegu zawiera kąt β z osią x , to warunki brzegowe (3.2) brzmią $p_x = \sigma_x \cos \beta + \tau_z \sin \beta$, $p_y = \tau_z \cos \beta + \sigma_y \sin \beta$. Założenie prostopadłości obciążenia wyraża się warunkiem $p_x \sin \beta = p_y \cos \beta$, czyli $(\sigma_x - \sigma_y) \sin \beta \cos \beta = \tau_z \cdot (\cos^2 \beta - \sin^2 \beta)$. Gdy $\beta = 0$ lub $\beta = \pi/2$ znajdujemy stąd $\tau_z = 0$, czyli $\tan 2\alpha_0 = 0$, tj. $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \pi/2$, chyba że $\sigma_x - \sigma_y = 0$, co prowadzi do nieoznaczonych α_1 , α_2 . Przy β dowolnym i $\tau_z \neq 0$ znajdujemy z powyższego równania $\tan 2\beta = \frac{2\tau_z}{\sigma_x - \sigma_y}$, czyli $2\beta = 2\alpha_0$, co oznacza, że jedna z trajektorii przebiega stycznie, druga prostopadle do brzegu. Skoro jednak przy dowolnym β jest $\tau_z = 0$, to znajdujemy z równania wyjściowego $\sigma_x - \sigma_y = 0$, co prowadzi do nieoznaczonych kierunków obu trajektorii na brzegu. Rzecz się powtarza w wypadku brzegu nieobciążonego. Przy $\tau_z \neq 0$ jedna trajektoria przebiega stycznie, druga prostopadle do brzegu; przy $\tau_z = 0$ ich kierunki na brzegu są nieoznaczone, bo również jest $\sigma_x = \sigma_y = 0$.

Obliczenie związane z użyciem równań (13.2) zastąpić możemy konstrukcją wykreślną, podaną na rys. 7.2. W prostokątnym układzie osi σ, τ odcinamy od początku O odcinki $OA = \sigma_x$ i $OB = \sigma_y$ i uzupełniamy rzędnymi prostopadłymi $AC' = \tau_z = BC''$, dając im zaznaczone położenie, gdy $\tau_z > 0$, względnie odwracając położenie, gdy $\tau_z < 0$. Odcinek $C'C''$ jest średnicą koła napięcia. Gdy kąt transformacji wynosi α , odcinamy w zaznaczonym kierunku od prostej $C'C''$ kąt 2α , znajdując w ten sposób punkty F' i F'' tudzież ich rzuty D i E . W ten sposób określamy $\sigma_\xi = OD$, $\sigma_\eta = OE$, $\tau_\xi = DF' = EF''$. Celem zweryfikowania konstrukcji oznaczmy promień koła literą ρ i wprowadźmy kąt $2\alpha_0$ jak na rysunku. Znajdziemy:

$$OD \text{ wzgl. } OE = OS \pm \rho \cos(2\alpha_0 - 2\alpha) = OS \pm \rho \cos 2\alpha_0 \cos 2\alpha \pm \rho \sin 2\alpha_0 \sin 2\alpha,$$

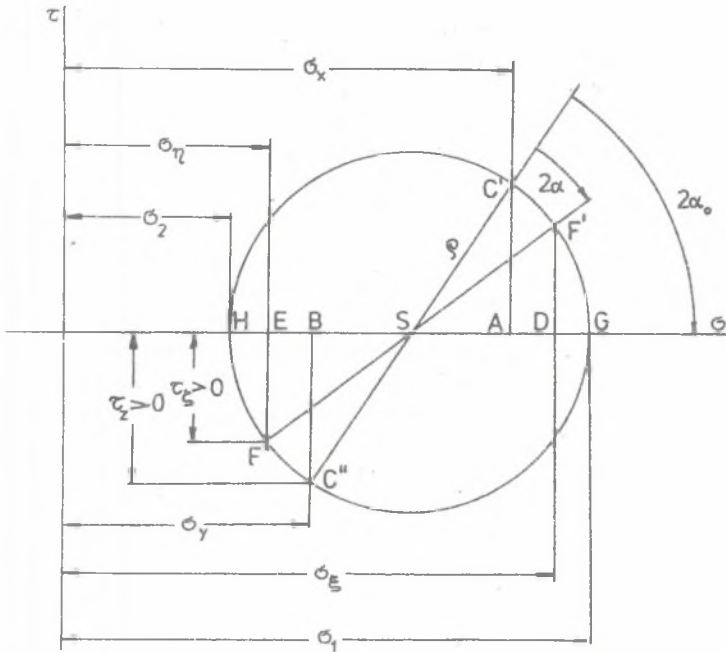
$$DF' \text{ lub } EF'' = \rho \sin(2\alpha_0 - 2\alpha) = -\rho \cos 2\alpha_0 \sin 2\alpha + \rho \sin 2\alpha_0 \cos 2\alpha,$$

$$\text{Lecz: } OS = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y), \text{ nadto } \rho \cos 2\alpha_0 = \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y), \rho \sin 2\alpha_0 = \tau_z,$$

z czego wynika całkowita zgodność konstrukcji ze wzorami (13.2).

W konstrukcji opisanej mieszczą się również wzory (14.2) i (16.2), co usprawiedliwia użycie dla kąta $C'SA$ oznaczenia $2\alpha_0$. Istotnie \tan tego kąta wynosi $AC'/SA = \frac{2\tau_z}{\sigma_x - \sigma_y}$. Poza tym transformacja o kąt α_0 prowadzi do punktów G i H , tj. do $\tau = 0$ oraz OG wzgl. $OH = OS \pm \rho$; lecz $\rho = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_z^2}$, czyli $OG = \sigma_1$, $OH = \sigma_2$. Przy konstruowaniu koła napięcia należy pamiętać, że $\tau_z > 0$ odcinamy ponad końcem σ_x lub $\tau_z < 0$ pod końcem σ_x , niezależnie od nierówności $\sigma_x \geq \sigma_y$.

Jeżeli kierunki główne i przynależne wartości naprężeń głównych są znane, to najprościej użyć je jako podstawy do operacji przekształcenia.



Rys. 7.2

Formuły (3.2) przyjmą postać: $p_1 = \sigma_1 n_1$, $p_2 = \sigma_2 n_2$, $p_3 = \sigma_3 n_3$, a wzory (6.2), (8.2) i (9.2) skrócą się do formy:

$$\sigma = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2,$$

$$\tau^2 = (\sigma_2 - \sigma_3)^2 n_2^2 n_3^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 n_3^2 n_1^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2 n_1^2 n_2^2, \quad (17.2)$$

$$\tau m_1 = (\sigma_1 - \sigma) n_1, \quad \tau m_2 = (\sigma_2 - \sigma) n_2, \quad \tau m_3 = (\sigma_3 - \sigma) n_3.$$

Zadanie 10.2. Wykazać, że składowe σ, τ przynależne kierunkowi $n_1 = n_2 = n_3$, wyrażają się wartościami niezmienników stanu napięcia.

Odpowiedź 10.2. Istotnie, skoro: $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$, jest: $n_1^2 = n_2^2 = n_3^2 = \frac{1}{3}$, czyli naprężenie normalne tej orientacji wynosi: $\sigma = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$, a naprężenie zaś styczne wyznaczone jest przez: $9\tau^2 = (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 - 6(\sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 + \sigma_1\sigma_2)$. Lecz oba trójmiany przedstawiają wartość niezmienników stanu napięcia. Przeto: $9\tau^2 = 2s^2 - 6s'$, czyli

$$\tau = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \sqrt{s^2 - 3s}$$

Kierunek m naprężenia τ podają dostawy: $m_i = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{3\sigma_1 - s}{\sqrt{s^2 - 3s}}$ ($i=1,2,3$).

Ponieważ s i s' są niezmiennikami, więc własność tę posiada również: $s^2 - 3s$; tak napisany niezmiennik drugiego rzędu odgrywa ważną rolę w mechanice.

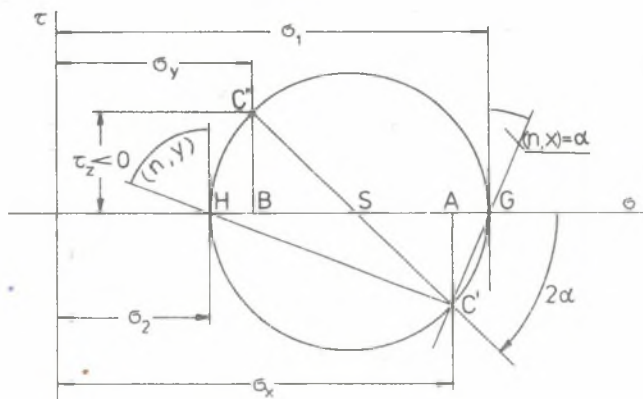
Odpowiednio skracą się również wzory dla transformacji płaskiej (13.2) z położenia 1, 2 w położenie xy . Otrzymamy tu:

$$\sigma_x = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \pm \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)\cos 2\alpha, \quad (18.2)$$

$$\tau_z = -\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)\sin 2\alpha,$$

przy czym α mierzone jest od kierunku głównego 1.

Konstrukcja koła naprężenia dla formuł (18.2) również skraca się, jak to ilustruje rys. 8.2. Odcinamy $\sigma_1 = OG$, $\sigma_2 = OH$ i na średnicy HG otrzymujemy poszukiwane koło. Nakreśliwszy kąt 2α w podanym kierunku znajdujemy C' względnie C'' a stąd $OA = \sigma_x$, $OB = \sigma_y$ i $AC' = BC'' = \tau_z$. W sytuacji na rys. 8.2 jest $\tau_z < 0$. Promień koła wynosi $\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$. Jest to jednocześnie największa w stanie płaskim wartość naprężenia stycznego. Przynależne mu naprężenie normalne wynosi $\frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)$. Naprężenia te istnieją w przekrojach połowiących kąt między przekrojami głównymi. Konstrukcję koła z danych naprężeń głównych podał po raz pierwszy wybitny badacz niemiecki O. Mohr.



Rys. 8.2

W tekście oryginalnym punkt C' znajdujemy, kresząc kąty $(n, x) = \alpha$ względnie $(n, y) = \pi/2 - \alpha$ jak na rysunku.

Gdy punktem wyjścia są składowe główne, to również wzory (17.2), wynikłe z transformacji trójosiowego stanu napięcia, można przedstawić w prosty sposób wykreslinnie. Dołączmy w tym celu do formuł na σ i τ^2 warunek: $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$ i rozwiążmy je z uwagi na n_1^2, n_2^2, n_3^2 . Po prostych rachunkach znajdziemy:

$$(\sigma_2 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_1)n_1^2 = (\sigma_2 - \sigma)(\sigma_3 - \sigma) + \tau^2,$$

$$(\sigma_3 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_2)n_2^2 = (\sigma_3 - \sigma)(\sigma_1 - \sigma) + \tau^2,$$

$$(\sigma_1 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_3)n_3^2 = (\sigma_1 - \sigma)(\sigma_2 - \sigma) + \tau^2.$$

Każde z tych równań przedstawia w płaszczyźnie σ, τ koło. Tak np. pierwsze z tych równań napisać możemy w postaci:

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}\right)^2 + \tau^2 = (\sigma_2 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_1)n_1^2 + \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right)^2$$

przedstawiającej istotnie koło, którego środek leży na osi σ i ma odcięta $\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}$ niezależną od kierunku n , a kwadrat promienia jest równy: $(\sigma_2 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_1)n_1^2 + \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right)^2$, tj. zależy tylko od n_1 . Zmieniając parametr n_1^2 od 0 do 1 otrzymamy gromadę kół współśrodkowych o promieniu zmieniającym się od $\left|\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right|$ do $\left|\sigma_1 - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}\right|$. Analogicznie rzecz ma się z pozostałymi dwoma równaniami. Przy przyjętej orientacji n niewiadomymi w tych trzech równaniach są σ_1, τ ; wtedy jednak z trzech tych równań tylko dwa są niezależne z tytułu zależności, tzn. $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$. Innymi słowy, trzy koła, przynależne przyjętej orientacji n , przecinają się w jednym punkcie; jego współrzędne σ, τ stanowią wykreslinne rozwiązanie zagadnienia przekształcenia.

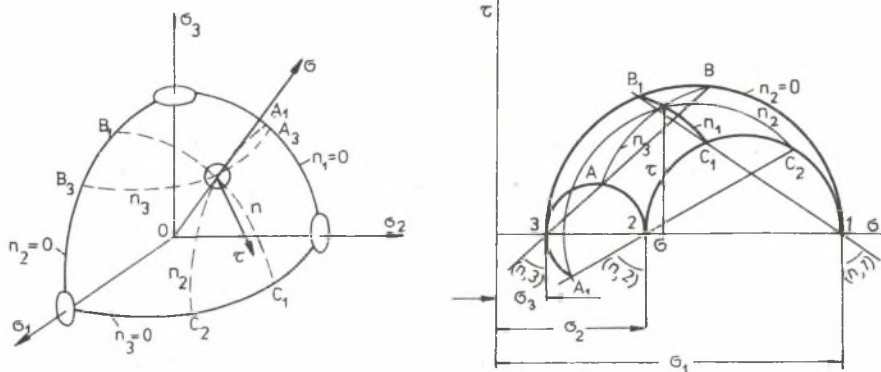
Koła:

$$\frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3), \frac{1}{2}|\sigma_2 - \sigma_3|; \frac{1}{2}(\sigma_3 + \sigma_1), \frac{1}{2}|\sigma_3 - \sigma_1|; \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2), \frac{1}{2}|\sigma_1 - \sigma_2|$$

stanowią ograniczenia pola, wewnątrz którego mieszczą się wszystkie punkty (σ, τ) . Wymienione trzy koła brzeżne przynależą orientacjom: $n_1 = 0, n_2^2 + n_3^2 = 1$; $n_2 = 0, n_3^2 + n_1^2 = 1$; $n_3 = 0, n_1^2 + n_2^2 = 1$, to znaczy ilustrują one kolejno transformację w płaszczyźnie głównej $n_2n_3; n_3n_1; n_1n_2$ na wzór tej, którą przedstawia rys. 8.2. Największe naprężenie styczne wynosi: $\tau = \frac{1}{2}(\sigma_{\max} - \sigma_{\min})$; towarzyszące mu naprężenie normalne wynosi:

$\sigma = \frac{1}{2}(\sigma_{\max} + \sigma_{\min})$. Przynależą one przekrojowi, którego normalna n położy kąt między σ_{\max} i σ_{\min} .

Rys. 9.2 ilustruje powyższe rozważania. Celem bardziej przejrzystego przedstawienia rzeczy punktowi O nadano postać kuli, której ósemkę podaje lewa strona rysunku.



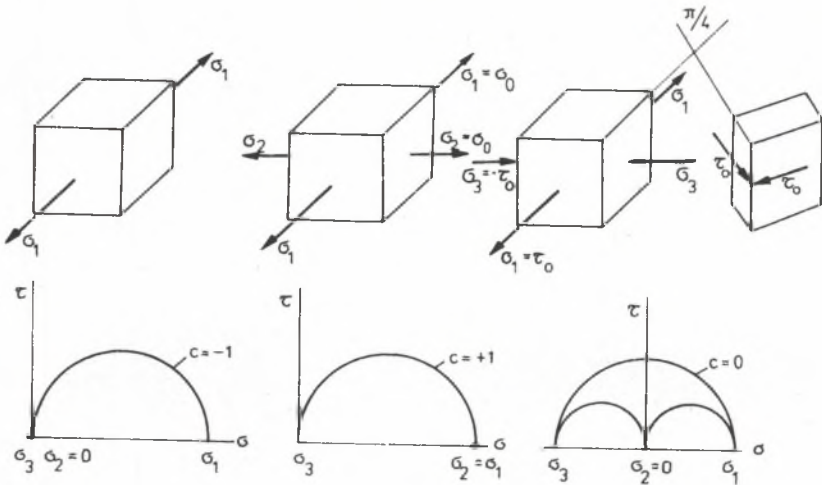
Rys. 9.2

Kątowi $(n, 1)$ odpowiada powierzchnia stożkowa, która z kulą przecina się wzdłuż koła n_1 ; koło brzeżne $n_1 = 0$ leży w płaszczyźnie 23. Podobnie rzecz się ma z kołami n_2 i n_3 . Koło $n_1 = 0$ przecina się z kołami $n_2 = 0$ i $n_3 = 0$ w punktach B_1 i C_1 . Ich odwzorowania na kołach napięciowych, tj. w prawej części rysunku, znajdziemy, kreśląc - zgodnie z rys. 8.2 - z punktu 1 kąt $(n, 1)$. Ponieważ wszystkie koła n_1 mają wspólny środek, przeto punkt B_1 lub C_1 wyznacza promień koła przynależnego nakreślonemu kątowi $(n, 1)$. W ten więc sposób koło napięciowe n_1 jest oznaczone.

Podobnie można wyznaczyć także drugie. Przez ich punkt przecięcia musi też przejść koło przecię. Współrzędnymi punktu przecięcia są składowe σ i τ . Ponieważ przyjęcie kierunku n nie ustala dla τ znaku algebraicznego, przeto jest obojętne, czy konstrukcję przeprowadzimy nad czy pod osią σ .

Rys. 10.2 ilustruje przy pomocy kół napięciowych niektóre podstawowe stany napręć. Naprężenia główne uporządkowano według wielkości nierówności $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$. Można też to uczynić, kładąc $\sigma_2 = \frac{(1+c)\sigma_1 + (1-c)\sigma_3}{2}$, gdzie parametr c ogranicza nierówność: $-1 \leq c \leq 1$.

W jednoosiowym rozciąganiu jest $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, czyli $c = -1$; tutaj komplet trzech kół sprowadza się do dwóch pokrywających się ze sobą i jednego, zdegenerowanego do punktu. W prze-



Rys. 10.2

krojach, których normalne leżą w płaszczyźnie 23, nie ma ani naprężeń normalnych ani stycznych, wobec czego każda płaszczyzna zawierająca kierunek 1 jest główna. We wszystkich przekrojach nachylonych pod $\pi/4$ względem 1 naprężenie styczne osiąga największą możliwą wartość $\sigma_{1/2}$. Rzecz ilustruje lewa część rys. 10.2.

Jednoosiowe ściskanie $c = +1$ różni się od omówionego wypadku jedynie znakiem jednego naprężenia σ_3 różnego od zera.

Płaskie równomierne rozciąganie $\sigma_3 = 0$, $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_0 > 0$ przynależy kategorii $c = +1$.

Z pozoru komplet kół, przedstawiony na środkowej części rys. 10.2, nie różni się od kompletu poprzedniego. W istocie zaś koło zdegenerowane do punktu ma obecnie odciętą $\sigma_0 \neq 0$. W przekrojach, których normalne leżą w płaszczyźnie 1,2, nie ma nigdy naprężeń stycznych, czyli każdy taki kierunek jest głównym i każdemu odpowiada takie samo naprężenie normalne σ_0 , skąd zastosowanie nazwy równomierne płaskie rozciąganie. Płaskie równomierne ściskanie $c = -1$ różni się od omówionego wypadku jedynie zmianą znaku naprężeń.

Bardzo ważny przypadek dwuosiowego stanu napięcia stanowi skręt, zwany też prostym ścinaniem, przedstawiony w prawej części rys. 10.2. Tutaj: $\sigma_3 + \sigma_1 = \sigma_2 = 0$, czyli $c = 0$. Aby założeniu uczynić zadość, położymy $\sigma_1 = \tau_0$, $\sigma_3 = -\tau_0$ i transformujemy kierunki o $\pi/4$ w płaszczyźnie 31. Widzimy, że w tak przyjętych przekrojach nie ma naprężeń normalnych; istnieje tam tylko naprężenie styczne, a to o wartości $\tau = \tau_0$; stąd też stosowana przez niektórych autorów nazwa czystego ścinania. Zależnie od okoliczności stosujemy oznaczenie tego stanu albo naprężeniami głównymi albo wykazanym charakterystycznym naprężeniem stycznym.

Przestrzenne równomierne rozciąganie $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 > 0$ jest stanem trudnym do zrealizowania. Natomiast nader często spotykany w przyrodzie jest przestrzenne równomierne ściskanie $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 < 0$. Komplet trzech kół napięciowych degeneruje się tu do punktu. W żadnej orientacji przestrzennej nie ma tu naprężeń stycznych, czyli każdy kierunek jest główny; każdemu odpowiada takie samo naprężenie normalne. Parametr c jest tu nieoznaczony.

Zadanie 11.2. Czy stosując zasadę superpozycji można dowolny stan napięcia rozbić na wszechstronne, równomierne rozciąganie i skręty?

Odpowiedź 11.2. Stosując składowe główne zapiszemy $\sigma = \sigma' + \sigma''$, gdzie σ' oznacza część pierwszą a σ'' część drugą. Dla części pierwszej należy przyjąć $\sigma'_1 = \sigma'_2 = \sigma'_3$, dla drugiej zaś $\sigma''_1 + \sigma''_2 + \sigma''_3 = 0$. Znajdziemy stąd: $\sigma'_1 = \sigma'_2 = \sigma'_3 = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$, nadto:

$$\sigma''_1 = \frac{1}{3}(2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3), \quad \sigma''_2 = \frac{1}{3}(2\sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_1), \quad \sigma''_3 = \frac{1}{3}(2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2).$$

Składowe części drugiej oznaczają istotnie skręty, albowiem możemy też napisać: $\sigma''_1 = \frac{1}{3}(\sigma_1 - \sigma_2) - \frac{1}{3}(\sigma_3 - \sigma_1)$, $\sigma''_2 = \frac{1}{3}(\sigma_2 - \sigma_3) - \frac{1}{3}(\sigma_1 - \sigma_2)$, $\sigma''_3 = \frac{1}{3}(\sigma_3 - \sigma_1) - \frac{1}{3}(\sigma_2 - \sigma_3)$, w czym poznajemy superpozycję właśnie trzech prostych ścinań. Zagadnienie można uogólnić, stosując składowe dowolnych kierunków x, y, z . Będzie wtedy: $\sigma'_x = \sigma'_y = \sigma'_z = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$, $\tau_x = \tau_y = \tau_z = 0$, nadto: $\sigma''_x = \frac{1}{3}(2\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z)$, $\sigma''_y = \frac{1}{3}(2\sigma_y - \sigma_z - \sigma_x)$, $\sigma''_z = \frac{1}{3}(2\sigma_z - \sigma_x - \sigma_y)$, $\tau''_x = \tau_x$, $\tau''_y = \tau_y$, $\tau''_z = \tau_z$. Część pierwsza niczym istotnym nie różni się od poprzedniej; w części drugiej przybyły dodatki, które znowu są skrętami, bo wyrażają się składową τ .

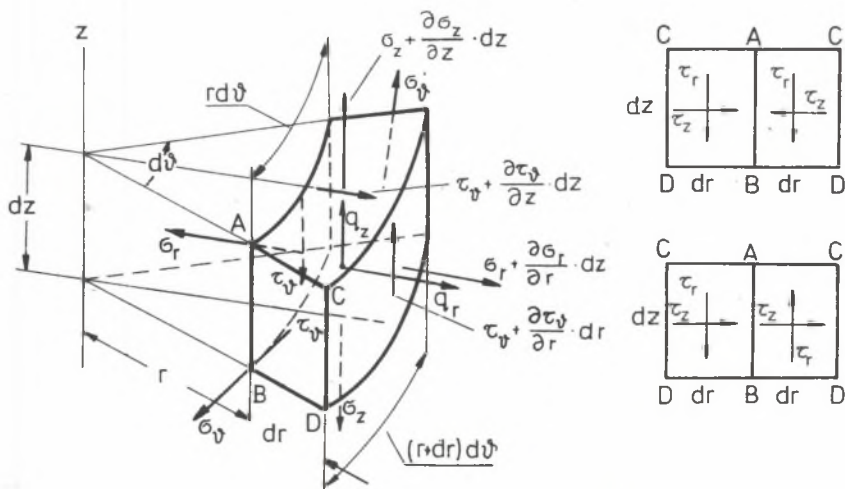
Wiadomo nam jest, że wzory dla przekształcenia σ, τ przechodzą we wzory dla transformacji $\varepsilon, \frac{1}{2}\gamma$. Podaną tu zasadę ilustracji kołami napięciowymi można przenieść do teorii stanu odkształcenia, otrzymując koła odkształceniowe. Zapowiedzieliśmy to już w stosownym miejscu teorii stanu odkształcenia.

Przeprowadziliśmy wszystkie rozważania w prostokątnym układzie współrzędnych, zwykłym x, y, z lub naturalnym 1 2 3. Ograniczony zakres materiału nie pozwala nam przedstawić teorii stanu napięcia w innych, równie pożytecznych układach współrzędnych.

Zadanie 12.2. Wypisać we współrzędnych walcowych warunki równowagi dla zagadnienia osiowo-symetrycznego.

Odpowiedź 12.2. W zagadnieniu tego rodzaju zarówno układ materialny jak i obciążenia są symetryczne względem osi i w konsekwencji takim samym też jest stan napięcia. Przyjmując układ współrzędnych walcowych r, ϑ, z , zmienimy też odpowiednio oznaczenia składowych stanu napięcia na

$\sigma_r, \sigma_\vartheta, \sigma_z, \tau_r, \tau_\vartheta, \tau_z$. Osiowa symetria polega przede wszystkim na tym, że każda z tych składowych jest niezależna od zmiennej ϑ .



Rys. 11.2

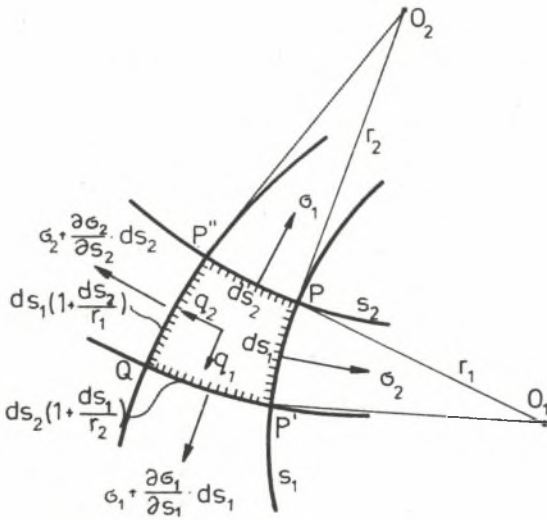
Ponadto jednak niektóre z tych składowych są nieobecne. Lewa strona rys. 11,2 przedstawia element układu z przynależnymi siłami objętościowymi q_r, q_z i naprężeniami $\sigma_r, \sigma_\vartheta, \sigma_z, \tau_\vartheta$. Nieobecność q_ϑ wynika z założenia osiowo-symetrycznego obciążenia. Nieobecność naprężeń τ_r, τ_z wynika z jednoczesnego rozważenia osiowej symetrii i zasady wzajemności działania. Na prawej stronie rysunku podano boczne ograniczenie elementu ścianą A B C D. Zauważmy, że ta sama ściana jest jednocześnie ograniczeniem dwóch sąsiadujących elementów. Symetria wymaga, by niezależnie od powyższego faktu naprężenia τ_r, τ_z były zawsze tak samo na niej zaznaczone; tę ewentualność przedstawiono w górnej części rysunku. Zasada wzajemności działania wymaga zaś odmiennego ułożenia strzałek, co przedstawiono w dolnej części rysunku. Te dwa sprzeczne wymogi można uzgodnić tylko przez przyjęcie $\tau_r = \tau_z = 0$.

Z sześciu warunków równowagi trzy wyzyskano opisując naprężenia styczne pojedynczymi wskaźnikami, tzn. wyzyskując twierdzenie o równowartości odpowiadających naprężeń stycznych. Wypisując trzy pozostałe, nie należy przeoczyć, że siły $\sigma_\vartheta dr dz$ mają wypadkową w kierunku r . Jedno z równań jest identycznie spełnione; dwa pozostałe mają postać:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_\vartheta}{z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\vartheta}{r} + q_r = 0, \quad \frac{\partial \tau_\vartheta}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_\vartheta}{r} + q_z = 0.$$

Zadanie 13.2. Podać warunki równowagi w zagadnieniu płaskim we współrzędnych izostatycznych.

Odpowiedź 13.2. Naprężenie σ_1 niech będzie styczne do izostaty s_1 , czyli naprężenie σ_2 do izostaty s_2 . Równania chcemy wypisać dla elementu umieszczonego w sąsiedztwie punktu P. Odcinamy tedy na trajektoriach łuku ds_1 i ds_2 do punktów P' i P'', przez które przechodzą sąsiednie trajektorie, ograniczające w ten sposób element w punkcie Q. Promienie krzywiznowe przynależne obu izostatom w punkcie P są r_1 i r_2 . Łuki na sąsiednich trajektoriach są większe od ds_1 i ds_2 , bo przynależą do promieni: $r_1 + ds_2$ tudzież: $r_2 + ds_1$; wynoszą one więc: $ds_1(1 + \frac{ds_2}{r_1})$ tudzież $ds_2(1 + \frac{ds_1}{r_2})$. Te przyrosty muszą być uwzględnione z tego samego powodu, z jakiego uwzględniamy również drobne zmiany naprężeń przy przejściu z jednej izostaty do drugiej. Wypisując warunki równowagi zauważyć ponadto trzeba, że wypadkowa sił pochodzących od σ_1 ma kierunek $-s_2$, ta zaś od σ_2 ma kierunek $-s_1$. Siły masowe oznaczono przez q_1 i q_2 . Rezultaty brzmią:



Rys. 12.2

wa sił pochodzących od σ_1 ma kierunek $-s_2$, ta zaś od σ_2 ma kierunek $-s_1$. Siły masowe oznaczono przez q_1 i q_2 . Rezultaty brzmią:

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial s_1} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{r_2} + q_1 = 0, \quad \frac{\partial \sigma_2}{\partial s_2} + \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{r_1} + q_2 = 0.$$

Teoretyczne wyznaczanie naprężeń - jak to zobaczymy w innych częściach wykładu - natrafia na znaczne trudności. Usiłujemy tedy często wyznaczyć je doświadczalnie. Można to zrobić z powodzeniem w niezbyt licznych przypadkach. Niekiedy sięgamy do innych nauk przyrodniczych, których problemy mutatis mutandis mają tę samą matematyczną postać. Wykorzystując tę analogię znajdujemy naprężenia, obserwując i mierząc fakty odmiennego znaczenia i wymenzji. Jest to metoda doświadczalna pośrednia. Niekiedy sięgamy do połowicznej pomocy bezpośredniej. Tak np. w opracowaniu znajduje się metoda polegająca na pokrywaniu nieobciążonego obiektu warstwą specjalnego lakieru. W stanie obciążonym lakier pęka prostopadłe do kierunku naprężeń ciągnących, dając w ten sposób zbiór trajektorii, co sta-

nowi pewną pomoc w wyznaczaniu naprężeń. Metoda ta ogranicza się - rzecz jasna - do badania jedynie powierzchni układu.

Na specjalną uwagę zasługują badania optyczne, znane w literaturze pod nazwą elasto - a obecnie też plasto-optycznych, względnie też foto-elastycznych lub foto-plastycznych.

Metoda ta, szeroko rozpracowana dla zagadnień płaskich, zaczęła sobie w ostatnich latach torować drogę również do zagadnień przestrzennych. Wykorzystuje ona - między innymi - teoretyczne spostrzeżenie, że istnieje rozległa grupa zagadnień, dla których składowe stanu napięcia są niezależne od niektórych mechanicznych własności indywidualnych materiału układu. Rozumieć to należy w tym sensie, iż w tej grupie rozwiązań, przy tej samej postaci i tym samym obciążeniu układu wartości naprężeń są niezależne od tego, czy układ wykonany jest ze stali, czy np. ze szkła.

W innej grupie zagadnień rozważania teoretyczne pozwalają zaś spostrzeżenia dokonane na celuloidzie odpowiednim dodatkowym pomiarem przetransponować na tej samej postaci układ wykonany np. z żeliwa. W związku z tym badania naprężeń na drodze optycznej dokonujemy na modelach wykonanych z materiałów przezroczystych optycznie równokierunkowych, jak szkło, bakelit itp.

Metoda postępowania przedstawia się w zarysie następująco. Wiązka równoległa światła, przepuszczona przez polaryzator, wychodzi z niego płasko spolaryzowana i wchodzi do napiętego modelu, gdzie drganie optycznie zostaje rozłożone w kierunkach głównych stanu napięcia. Po wyjściu w powietrze owe dwa drgania nie składają się z powrotem w płaskie drganie polaryzatora, albowiem prędkość rozchodzenia się światła w kierunku równoległym do naprężenia algebraicznie większego jest mniejsza od tej w kierunku drugim. Drgania składowe mają przeto po wyjściu z modelu różne fazy i, łącząc się z powrotem, dają światło eliptycznie spolaryzowane. To z kolei wpada do analizatora skrzyżowanego prostokątnie z polaryzatorem i wychodząc z niego daje światło znów płasko spolaryzowane. Obserwator umieszczony poza analizatorem, patrząc w kierunku źródła światła, nie ujrzy go więc przy $\sigma_1 \neq \sigma_2$ tylko wtedy, gdy skrzyżowane kierunki przyrządu polaryzującego będą zgodne z kierunkami głównymi stanu napięcia. Jeśli przeto ustalimy np. blendą punkt na modelu i będziemy obracać przyrządem, to wygaśnięcie promienia świetlnego będzie dla nas identyczne z wykryciem kierunków głównych stanu napięcia w uważanym punkcie. Przechodząc do następnych punktów znajdziemy przynależne im kierunki główne. Jeśli zaś operować będziemy wiązką światła obejmującą cały model, to przy ustalonym dowolnie kącie położenia przyrządu polaryzującego ujrzymy na ekranie projekcyjnym na obrazie modelu wiązkę ciemnych krzywych, z których każda w każdym punkcie posiada tę własność, iż przecina ona izostaty tego punktu pod kątem równym kątowi określającemu położenie przyrządu. Krzywą tego rodzaju nazywamy izokliną; jest to więc krzywa równych pochyłeń izostat. Obracając przyrząd znajdziemy nową wiązkę przynależnych i klin. Postępu-

jąc punktowo, czy też operując od razu całym modelem potrafimy przeto, wyzyskując własności podwójnego załamania światła, wyznaczyć trajektorie naprężeń głównych.

Prócz ciemnych izoklin - które możemy zresztą dodatkowym zabiegiem usunąć - pojawiają się na ekranie przy użyciu światła białego również barwne smugi, zwane izochromami.

Fizyk Wertheim wykazał, że zabarwienie tych linii zależy od iloczynu: $a(\sigma_1 - \sigma_2)$, gdzie a oznacza grubość modelu. Ze wzrastającym $\sigma_1 - \sigma_2$ kolejne barwy, tj. żółta, czerwona, niebieska, zielona powtarzają się ze zmienną intensywnością. Możemy przeto z tego samego materiału i tej samej grubości wykonać wzorzec i barwom przydzielić wielkości różnic naprężeń głównych. Możemy też nakładać wzorzec na model i kompensować światło do ciemności, możemy wreszcie stosować kompensator klinowy zmiennej grubości. Przy świetle monochromatycznym, to znaczy jednobarwnym, otrzymujemy tylko smugi jasne i ciemne i tu jednak możemy oszacować różnice: $\sigma_1 - \sigma_2$ w obrębie każdej smugi.

Płaski stan napięcia jest znany, gdy - jak już nam wiadomo - znamy trzy fakty, np. σ_x , σ_y , σ_z lub też σ_1 , σ_2 , α_o . Na razie określiliśmy doświadczalnie α_o , nadto: $\sigma_1 - \sigma_2$. Najprościej więc będzie, gdy za fakt trzeci przyjmiemy - $\sigma_1 + \sigma_2$.

Istnieje wiele opracowanych metod służących do znalezienia brakującej nam sumy naprężeń głównych. Są to albo w dalszym ciągu metody optyczne albo inne, jak elektryczne, mechaniczne i wreszcie matematyczne. Zakres wykładu nie pozwala wszystkich ich tu scharakteryzować. Ograniczymy się zatem do podania jednej z grup matematycznych.

Podane w zadaniu 13.2 równania równowagi we współrzędnych izostatycznych można przez prostą przeróbkę napisać też w postaci:

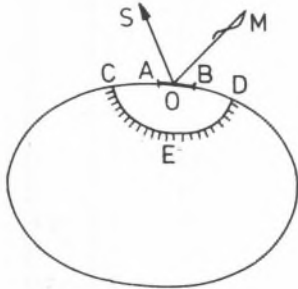
$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s_1} (\sigma_1 + \sigma_2) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s_1} (\sigma_1 - \sigma_2) + \frac{1}{r_2} (\sigma_1 - \sigma_2) + q_1 = 0,$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s_2} (\sigma_2 + \sigma_1) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s_2} (\sigma_2 - \sigma_1) + \frac{1}{r_1} (\sigma_1 - \sigma_2) + q_2 = 0.$$

W równaniach tych wiadome są znaczenia s_1 , s_2 i wartości r_1 , r_2 , ponieważ znane nam są trajektorie rozważanego zagadnienia. W każdym punkcie (s_1, s_2) układu znaleziona też została różnica: $\sigma_1 - \sigma_2$. W obu więc równaniach niewiadome są pochodne cząstkowe sumy: $\sigma_1 + \sigma_2$. Całkując i uwzględniając warunki na brzegu, znajdziemy przeto w każdym punkcie (s_1, s_2) sumę: $\sigma_1 + \sigma_2$, a tym samym mamy zupełne rozwiązanie zadania.

Badania optyczne uznane są obecnie za najlepszą metodę doświadczalnego wykrywania naprężeń. Posłużono się nimi w olbrzymiej ilości wypadków, gdy nie znano skomplikowanego rozwiązania teoretycznego. W równie dużej liczbie przypadków metodą tą skontrolowano poprawność różnych założeń i re-

zultatów teoretycznych. Między innymi potwierdzono nimi słuszność pewnego nader cennego twierdzenia, znanego pod nazwą zasady de Saint Venanta.



Rys. 13.2

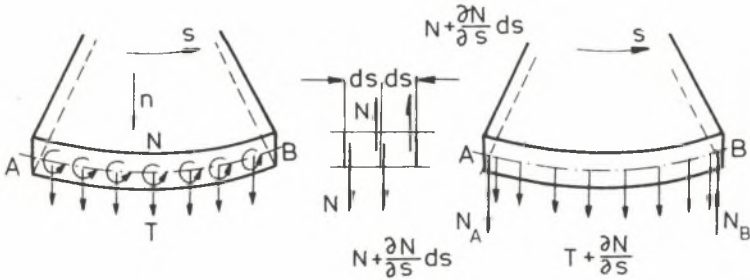
Zasadzie powyższej przydziela się w literaturze różne, bardziej lub mniej zrozumiałe, oznaczenia. Nazwiemy ją tu **t w i e r d z e n i e m o z a n i k a n i u r ó ż n i c s k u t k ó w r ó w n o w a r t y c h z b i o r ó w s i ł**, rozumiejąc pod skutkami stan napięcia lub też odkształcenia - nigdy zaś stan przemieszczenia.

Aby zasadę tę wyjaśnić, wyobraźmy sobie, że część AB powierzchni ograniczającej układ jest poddana działaniu jakiegoś zbioru sił. W najogólniejszym wypadku zbiór ten sprowadza się do jakiejś wypadkowej siły S , przechodzącej przez ustalony punkt O i jakiegoś wypadkowego momentu M . Wiadomo nam jest, że istnieje dowolnie wiele takich zbiorów sił, rozmieszczonych na tym samym polu działania, które są danemu równowarte, to znaczy zbiorów, redukujących się do tak samo przez punkt O zorientowanej i liczebnie równej siły S tudzież tak samo zorientowanego i liczebnie równego momentu M . Pod każdym innym względem te zbiory są jednak różne; wobec tego wywołane nimi w układzie stany napięć czy odkształceń będą również różne. Jednakże - i to stanowi istotę twierdzenia de Saint Venanta - w miarę tego jak od uważanego obciążonego pola AB będziemy się posuwać w głąb układu, stwierdzimy, że różnice między tymi różnymi skutkami będą zanikać, tak że na dostatecznie odległej powierzchni CDE - jak na rys. 13.2 - będzie je można praktycznie zaniedbać. Porównanie rezultatów rozmaitych zagadnień, czy to rozwiązanych teoretycznie, czy na drodze właśnie pomiarów optycznych prowadzi do użytkowego przekonania, że oddalenia punktów powierzchni CDE wystarczy uczynić równe liniowym rozmiarom pola obciążonego AB .

Twierdzenie o zanikaniu różnic skutków równowartych zbiorów sił ma najwidoczniej wielostronne znaczenie. Przy spiętrzonych obciążeniach daje nam ono wskazówkę konstrukcyjną co do rozmiarów obszaru, który należy lokalnie wzmocnić. Wyjaśnia nam ono, pod jakim warunkiem wyniki prób, przeprowadzonych na różnych urządzeniach laboratoryjnych, są porównywalne względnie zamienne - a więc, że np. obojętne jest, czy główlice ciał próbnych są chwymane w uchwyty pierścieniowe, czy gwintowane, jeśli tylko miejsce pomiaru należycie od nich oddalimy. Pozwoliło ono w historii rozwoju mechaniki układów odkształcalnych wyjaśnić szereg rozmaitych pozornych sprzeczności. Wreszcie ma walory ekonomiczne, bo redukuje rozwiązanie obszernych grup zagadnień do rozwiązania pojedynczych tematów, które tylko lokalnie należy uzupełnić.

Zadanie 14.2. Brzeg płyty obciążony jest na długości AB jak na rys. 14.2 siłami poprzecznymi o natężeniu T i momentami rozmieszczonymi na powierzchni brzegu o zmiennym natężeniu N . Zamienić to obciążenie na tylko poprzeczne. Ile wynosi natężenie tego obciążenia? Jaki wpływ ma ta zmiana?

Odpowiedź 14.2. Niech zwrot N będzie zgodny z normalną zewnętrzną n brzegu płyty; niech poza tym będzie N funkcją łukowej współrzędnej brzegowej s . Na dwa sąsiednie elementy ds brzegu działają momenty: $N ds$ i



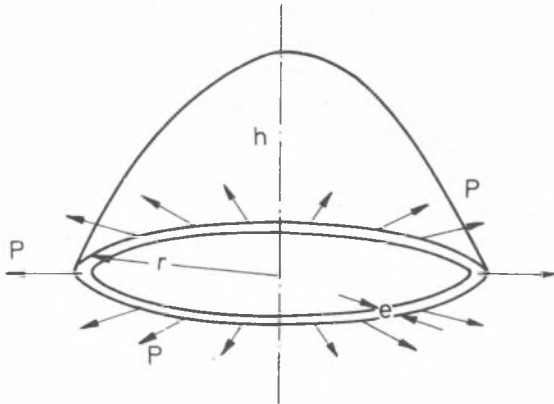
Rys. 14.2

$(N + \frac{\partial N}{\partial s} ds) ds$. Zamieńmy je na pary sił N i $N + \frac{\partial N}{\partial s} ds$, umieszczając je jak na środkowej części rys. 14.2. Na wspólnej krawędzi obu elementów powstanie nadwyżka sił wynosząca $\frac{\partial N}{\partial s} ds$ i działająca zgodnie z T . Nadwyżka ta przynależy długości ds ; jej natężenie wynosi przeto $\frac{\partial N}{\partial s}$. Równoważne obciążenie zamienne ma przeto natężenie: $T + \frac{\partial N}{\partial s}$; do tego obciążenia ciągłego należy na końcach badanego brzegu dołączyć pozostałe z par końcowych siły skupione o wartościach N_A i N_B . Rezultat ostateczny przedstawia prawa strona rys. 14.2.

Wprowadzenie powyższego obciążenia zmienia stan napięcia jedynie w obrębie strefy, której ograniczenie przebiega równoległe do brzegu płyty w oddaleniu równym jej grubości. Zagadnienie powyższe ma tło historyczne. Zdecydowało ono ostatecznie o postaci warunków brzegowych w teorii płyt, ustalonych po długoletnich nieporozumieniach przez Kirchhoffa.

Zadanie 15.2. Powłoka cienkościenna osiowo-symetryczna obciążona jest na brzegu równoleżnikowym radialnym zbiorem sił o stałym natężeniu P , położonym w płaszczyźnie prostopadłej do osi powłoki jak na rys. 15.2. Wielu zagranicznych autorów twierdzi, że zasada de Saint-Venanta upoważnia do przypuszczenia, iż w niewielkiej odległości od brzegu stan napięcia całkowicie znika. Czy przypuszczenie to jest słuszne?

Odpowiedź 15.2. Tego rodzaju interpretacja zasady jest całkowicie fałszywa. Grubość e ścianki powłoki jest według założenia mała w porównaniu do promienia r . Jeśli na długości równoleżnika rzędu e przeprowadza-



Rys. 15.2

dzimy lokalną zmianę obciążenia w wiadomym sensie, to istotnie w odległości rzędu e od brzegu wpływ tej zmiany zaniknie, to znaczy, że w odległości tej wyjściowy stan napięcia praktycznie nie zmieni się, jednak nie będzie on stanem zerowym.

Błąd polega na następującym, milczącym rozumowaniu autorów: Założone obciążenie radialne P redukuje się dla całego brzegu do zera; brzeg ma rozmiar e ; wobec tego w odległości e od brzegu naprężenia znikną. Otóż cały brzeg charakteryzuje geometrycznie nie tylko grubość e , lecz również r ; stan napięcia może się przeto zredukować do zera dopiero w odległościach rzędu r , więc np. w okolicy wierzchołka powłoki. Jeśli w wielu wypadkach błąd nie jest wielki, zawdzięcza się to swoistej budowie rozwiązań teorii powłok i głównie kształtom rozważanych w literaturze naczyń a nie treści omawianej zasady. Błąd ujawnia się w rażącej postaci, gdy powłoka jest bardzo płaska.

Temat 1.2. Zapoznać się z teorią polaryzacji i interferencji światła.

Temat 2.2. Zapoznać się ze szczegółami metod optycznych badania naprężeń.

Temat 3.2. Punkt $(0,0)$ nazywamy punktem osobliwym stanu napięcia, gdy kierunki główne są tam nieoznaczone. Zapoznać się z przebiegiem trajektorii w okolicy takiego miejsca, przyjmując dwa założenia:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{ax + by}{cx + dy} \quad \text{lub} \quad \operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{ax^2 + (d-c)xy + by^2}{cx^2 + (a-b)xy + dy^2}$$

i wykrywając między innymi trajektorie prostolinijne przechodzące przez taki punkt.

3. PRAWO WIAZĄCE I ENERGIA ODKSZTAŁCENIA

Uczyniliśmy dotychczas jedno pożyteczne założenie dotyczące budowy materii; przyjęliśmy mianowicie, że tworzy ona kontinuum, czyli że jest matematycznie jednolita. Przyjęcie to umożliwiło zdefiniowanie stanu odkształcenia i napięcia, tudzież wystarczyło do przeprowadzenia na nich zasadniczej operacji ciągłej, którą nazwaliśmy przekształceniem.

W dalszym ciągu przyjmujemy, że jego skończona część, materia, jest mechanicznie jednorodna, to znaczy w każdym miejscu układu pod względem mechanicznym taka sama. Jedno spojrzenie przez mikroskop na zgląd stalowy czy też rzut oka na masę betonową przekonają nas, że w istocie może tu być mowa jedynie o przeciętnej jednorodności, uzależnionej od doboru dostatecznie dużej jednostki odniesienia; szczęśliwym zbiegiem okoliczności wzrostowi owej jednostki towarzyszy również wzrost spotykanych w praktyce wymiarów obiektów, wykonywanych z danego tworzywa.

Wreszcie z braku miejsca ograniczymy się do traktowania przede wszystkim materiałów mechanicznie równokierunkowych, zaniedbując prawie zupełnie różnokierunkowe. Materiał nazywamy mechanicznie równokierunkowym czyli izotropowym, gdy jego własności mechaniczne są w każdym kierunku badanego miejsca takie same. Doskonałym przedstawicielem tej kategorii, tworzyw jest szkło optyczne i odwrotnie-anizotropię reprezentują rozmaite kryształy, tj. układy materialne o wzorowo uporządkowanej siatce atomowej. Pewne materiały, jak np. metale, utworzone są z konglomeratu drobnych kryształów i masy bezpostaciowej. Zważywszy, że ustroje krystaliczne są bezładnie umieszczone w otaczającej je masie bezpostaciowej, tak że indywidualność ich w żadnym kierunku nie może dojść do wyrazu, można wykazać, że w rezultacie metale można pod względem mechanicznym traktować jak materiały równokierunkowe; nazywamy je też quasi-izotropowymi. Tworzywem anizotropowym, odgrywającym pewną rolę w mechanice układów odkształcalnych, jest drewno. Jego przeciętna różnokierunkowość da się stwierdzić wynikami prymitywnych doświadczeń; możliwe jednak jest uzasadnić ją także na drodze rachunku, wychodząc z budowy i ułożenia elementarnych komórek. W podobnie rozwiniętym sensie przeciętnie nierównokierunkowym materiałem może być żelbet. np. w wypadku krzyżowego zbrojenia. Materiały różnokierunkowe będą w naszym wykładzie rzadko traktowane; ograniczymy się w aktualnych wypadkach do określenia ich własności tylko w pewnym wyróżnionym kierunku.

Jest fizyczną niemożliwością oddzielić materię od jej powłoki zewnętrznej, od geometrycznej postaci układu. Szukając więc własności mechanicznych materii z konieczności obserwujemy zachowanie się nie materiału lecz układu materialnego. Owe własności nie wychodzą w ten sposób na jaw jako elementarne, podstawowe fakty fizyczne - zakłócone są one obecnością parametrów charakteryzujących układ, więc wymiarami geometrycznymi, sposobem podparcia i podobnymi innymi szczegółami. Może się nawet zdarzyć, że niektóre własności mechaniczne w ogóle nie ujawnią się. Zadaniem wytrawnego badacza jest przeanalizować odpowiednie rezultaty obserwacji, odrzucić rzeczy nieistotne, a wykryte istotne skontrolować w szeregu innych badań. Zagadnienie to nie jest proste.

Jedną z nader cennych własności mechanicznych materii jest sprężystość. Gdy układ materialny poddamy obciążeniom, stwierdzimy, że punkty układu przemieszczają się. Przemieszczenie dowolnie obranego punktu i w dowolnie przyjętym kierunku okaże się pewną funkcją obciążeń. Ogólnie biorąc, ze wzrostem sił rosnąć będą przemieszczenia; gdy siły będą z powrotem maleć, zmniejszać się również będą przemieszczenia. Jednak tylko przy zastosowaniu niezbyt wielkich sił zjawisko powyższe będzie całkowicie odwracalne tzn. przemieszczenia tego odwróconego stanu będą się wyrażać tą samą funkcją sił, więc - w szczególności - znikną, gdy znikną obciążenia. Gdy tak jest, mówimy, że zjawisko przebiega w obszarze sprężystym. Kres sił tego rodzaju odwracalnego zjawiska nazywamy granicą sprężystości z uwagi na badany układ. Granica sprężystości jest faktem doświadczalnym bardzo niepewnym; określanie jej w bardzo wysokim stopniu zależy od precyzji instrumentów pomiarowych.

Gdy obciążenia przekroczą wyżej wspomniany kres odkształcenia, przestają być całkowicie odwracalne; przemieszczenia, towarzyszące siłom malejącym, będą zmieniać się według innego prawa aniżeli te, które odpowiadały siłom rosnącym. Po usunięciu obciążeń stwierdzimy, że jedynie część ich znikła, a reszta pozostała w postaci trwałej; zjawisko jest tylko częściowo odwracalne. Dla niektórych układów zbudowanych z niektórych metali stwierdzimy przy pewnej wartości sił nawet tego rodzaju fakt, iż przemieszczenia będą w rastać przy niezmiennej wartości obciążeń. Tak szczególnie wyidealizowaną własność mechaniczną materii nazywamy plastycznością, a odpowiednią przynależną wartość sił granicą plastyczności lub płynności z uwagi na badany układ. Powyższa dana ujawnia się niekiedy bardzo wyraźnie i jest wtedy nader cenną informacją znacznie cenniejszą, aniżeli granicę sprężystości. Z tego to powodu nawet w wypadkach niewyraźnej granicy plastyczności umawiamy się chętnie uważać za nią jakiś fakt pokrewny, więc np. wyraźny załom lub zaokrąglenie w odnośnym diagramie, tj. miejsce, od którego poczynając przemieszczenia wybitnie silniej się zmieniają aniżeli uprzednio - oczywiście przy tej samej zmia-

nie obciążeń. Plastyczność jest swoistą cechą metali, takich jak stal, miedź, aluminium. Materiały tego rodzaju nazywamy niezbyt ściśle ciałami wymiernymi.

Gdy plastyczność w owej bardzo wyraźnej lub spokrewnionej formie nie ujawnia się, stwierdzamy jedynie, że po przekroczeniu granicy sprężystości wchodzimy w obszar przemieszczeń mieszanych albo też po prostu trwałych, gdy te ostatnie wyraźnie przeważają nad sprężystymi. Takim zachowaniem charakteryzują się metale lane jak żeliwo, kamienie naturalne jak granit, sztuczne jak beton. Materiały tego rodzaju nazywamy niezbyt ściśle kruchymi.

Powyżej podzieliśmy obszar doświadczalny na trzy części, tj. sprężyste, plastyczny i trwałe, przyporządkowując plastyczności pewne bardzo szczególne zachowanie. Niektórzy autorzy rozróżniają jedynie dwa obszary, a mianowicie ciasny sprężysty i pozostały plastyczny. Inni wreszcie stosując również podział na dwa obszary przyporządkowują plastyczność jedynie materiałom ciągliwym; wtedy dla kruchych wprowadzają obszar odkształceń trwałych.

Kończącą własnością mechaniczną materii jest jej wytrzymałość. Gdy mianowicie układ materialny, zbudowany czy to z materiału ciągliwego, czy też kruchego nadmiernie obciążymy, dojdziemy do kresu jego nośności. W układach ciągliwych okaże się z reguły, że przemieszczenia jego, poczynając od pewnej wartości obciążeń, rosną z ubytkiem obciążeń, w układach kruchych nastąpi na gwałt katastrofa - układ podzieli się na oddzielne niepowiązane części. Odnosny kres sił nazywamy granicą wytrzymałości badanego układu lub też jego nośnością albo jego udźwignięciem. Głównym zadaniem technicznej mechaniki układów rzeczywistych jest właśnie wskazanie nośności rozmaitych celowych układów.

Dodajmy jeszcze, że ściśle rzecz biorąc nie materiały są ciągliwe lub kruche, lecz stany, które im narzuciliśmy warunkami obciążenia są tego rodzaju. Można doprowadzić do tego, że kruchy marmur będzie płynąć, to znaczy zachowywać się jak ciągliwa stal i - na odwrót - do tego, że ciągliwa miedź będzie pękać jak szkło; spowodować to można nawet środkami natury czysto mechanicznej, a więc bez pomocy zmian termicznych czy innych niemechanicznych zabiegów.

Stwierdziliśmy w teorii stanu napięcia, że każde poprawne rozwiązanie mechaniki układów odkształcalnych musi czynić zadość warunkom równowagi w każdym miejscu wnętrza układu oraz warunkom obciążenia na jego brzegu. Trzy różniczkowe warunki równowagi nie mogą wystarczyć do znalezienia niewiadomych sześciu funkcji, określających tensor napięcia. Widzimy przeto, że każde zagadnienie stanu napięcia jest statycznym i niewyznaczone. Równania równowagi są tu wprawdzie warunkami koniecznymi, lecz są one warunkami niewystarczającymi. Stwierdziliśmy jednak w teorii stanu odkształcenia,

że każde poprawne rozwiązanie mechaniki układów odkształcalnych musi czynić też zadość warunkom nierozdzielności wewnątrz układu i warunkom podporowym na jego brzegu. Wnioskujemy słusznie, że w nakazie tym zawarte są brakujące przed chwilą warunki.

Można wykazać, że przy spełnieniu obu scharakteryzowanych wyżej wymogów, nadto pewnych dodatkowych zastrzeżeń - rozwiązania mechaniki układów rzeczywistych są **j e d n o z n a c z n e**. Nasuwa się przeto następująca eliminacyjna metoda postępowania: spośród wszelkich rozwiązań ze spełnionymi postulatami pierwszego typu wybieramy to jedno jedyne, które czyni tu zadość wymogom drugiego typu, albo też - spośród wszelkich rozwiązań drugiej grupy przyjmujemy to jedno i tylko jedno, które spełnia żądania pierwszej kategorii.

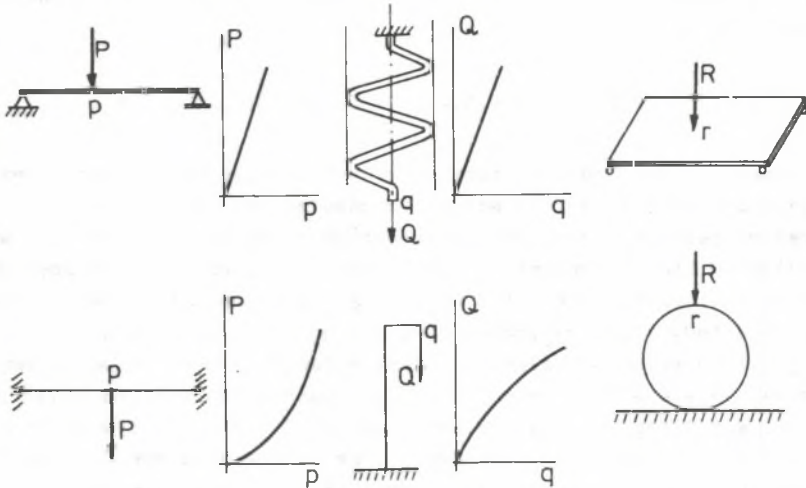
Istnieją nauki, jak matematyczna teoria sprężystości tudzież matematyczna teoria plastyczności, które istotnie w sposób ścisły wykrywają rozwiązania wielu problemów z dziedziny **m a ł y c h** odkształceń, czyniąc dokładnie zadość wszystkim wyjaśnionym wymogom. Aparatura matematyczna, jakiej musi się przy takim postępowaniu użyć, jest nader skomplikowana. Zasób czasu, potrzebnego do przeprowadzenia tego rodzaju rozwiązania jest olbrzymi - nawet przy pozornie prostych zadaniach. Nie stać nas na to w technicznym kursie mechaniki. Wobec tego w nielicznych tylko wypadkach postąpimy ściśle pod każdym względem. Na ogół uczynimy ściśle zadość jednemu wymogom, poprzestaniemy na przybliżonym uczynieniu zadość drugim i na odwrót. W wypadkach wątpliwych skorzystamy z kontroli, jaką nam nasunie porównanie wyniku z rezultatem pokrewnego rozwiązania matematycznie ścisłego, czy też z rezultatem bezpośredniego doświadczenia. Zważmy wreszcie, że nie wszystkie interesujące nas problemy doczekały się rozwiązania wzmiankowanej teorii sprężystości, czy też plastyczności, matematyczna zaś teoria wytrzymałości w ogóle nie istnieje.

Na razie wyciągniemy tylko logiczną konsekwencję z przeprowadzonego wywodu. Jeśli rozwiązanie zagadnienia mechaniki ciał rzeczywistych wymaga spełniania wymogów mechanicznych i geometrycznych, to musimy znać związki rzeczywiste, zachodzące między wielkościami mechanicznymi i geometrycznymi. Musimy znać **p r a w o w i ą ż ą c e** te wielkości.

Cóż możemy na początek zrobić? Ograniczmy na razie zasięg naszych badań do **o b s z a r ó w** **s p r ęż y s t y c h** i usiłujmy zbadać czy możliwe jest związać fakty bezpośrednio narzucające się - **p r z e m i e s z c z e n i a** z **s i ł a m i** zewnętrznymi.

Zbudujemy w tym celu z **t e g o** **s a m e g o** tworzywa, np. z określonej technologicznie stali, układy najrozmaitszej postaci geometrycznej, więc jak na rys. 1.3 belkę, tak często w laboratoriach fizycznych stosowaną sprężynę, dalej płytę, przegibnie połączone dwa pręty, albo też jeden pręt, kulę itp. Każdy z tych układów obciążymy według wskazanego prostego sposobu. Wybierzmy na każdym jakieś miejsce, najprościej punkt zaczepienia siły czynnej i obserwujmy przemieszczenie tego punktu w dowolnie ustalonym kierunku, więc najlepiej w kierunku działania obciążenia.

W wypadku pierwszym stwierdzimy, że przemieszczenie jest proporcjonalne do obciążenia, oczywiście jeśli tylko to ostatnie nie jest zbyt wielkie.



Rys. 1.3

W wypadku drugim owa zależność liniowa znów się powtórzy. Z zadowoleniem wreszcie stwierdzimy, że to samo dotyczy również wypadku trzeciego. Dodatkowe pomiary w każdym z powyższych zagadnień prowadzą do wniosku, że prostoliniowy diagram otrzymuje się również dla przemieszczenia dowolnego punktu układu i w dowolnie przezeń obranym kierunku. Pozwala nam to oczywiście zrobić użytek z zasady superpozycji i zagadnienia rozwijać przez nakładanie na układ dowolnych zbiorów obciążeń. Domyślamy się oczywiście, że współczynniki a , b , c w rezultatach naszych trzech doświadczeń:

$$p = a P, \quad q = b Q, \quad r = c R$$

zależą od parametrów charakteryzujących układ. Kres obciążeń wywołujących liniowy skutek powyższego rodzaju nazywamy granicą proporcjonalności z uwagi na badany układ. Jesteśmy skłonni przyjąć, że tak prosto przebiegające zjawisko stwierdzimy dla wszelkich innych układów z tego samego materiału. Wniosek ten byłby zbyt pochopny - jak to wskażą doświadczenia dalsze.

W pierwszym eksperymencie drugiej serii między dwie nieruchome ściany wmontowaliśmy przegibnie dwa również przegibnie połączone pręty. Doświadczenie to wykaże, że zrazu przy małych wartościach siły zewnętrznej przemieszczenie gwałtownie wzrasta, po czym przebieg łagodnieje. W drugim do-

świadczeniu wiotki słup obciążyliśmy mimośrodkowo równolegle do jego osi. Zjawisko przebiega skomplikowanie; stosując rozwinięcie wielomianowe stwierdzamy, że uciec się musimy do pomocy przynajmniej trzech dodajników. W trzecim doświadczeniu z kulą na sztywnej podstawie przebieg jest jeszcze bardziej skomplikowany. Widzimy przeto, że rezultaty nowej serii eksperymentów:

$$p = a \sqrt[3]{P}, \quad q = b_1 Q + b_2 Q^2 + b_3 Q^3, \quad r = f(R)$$

przeczą naszemu poprzedniemu pochopnemu przypuszczeniu. Przebieg nie zawsze jest liniowy; tutaj nie wolno stosować zasady superpozycji.

Zmuszeni jesteśmy reasumować. W obszarach sprężystych istnieją układy materialne, w których przemieszczenie ich każdego punktu w każdym dowolnie obranym kierunku jest liniową jednorodną funkcją obciążeń; układy takie nazywamy liniowo - sprężystymi. Istnieją w obszarach sprężystych układy materialne, w których przemieszczenia są nieliniowymi od wypadku do wypadku innymi funkcjami obciążeń; tego rodzaju układy nazywamy ogólnie - sprężystymi. Nie ulega wątpliwości, że te pierwsze nadają się lepiej do dalszego, bardziej wyczerpującego badania, aniżeli te drugie.

Gdybyśmy nawet potrafili a priori oszacować - a umiemy to zrobić z łatwością - które to układy należą do pierwszej kategorii, które zatem do drugiej, to i tak trudności w wykryciu podstawowego prawa wiążącego byłyby znaczne. Wprowadzcie żonglując wymiarami geometrycznymi układu, położeniem obciążenia, indywidualnością materiału wykrylibyśmy - przy dodatkowej pomocy analizy dymensyjnej - budowę współczynników mianowanych a, b, c, jednakże uzyskany końcowy rezultat stosowałby się do wybranego układu i nie miałby głębszego znaczenia dla dowolnego innego. Dochodzimy w ten sposób do przekonania, że związek między przemieszczeniem a siłą nie jest dostatecznie elementarnym i podstawowym prawem wiążącym w mechanice układów odkształcalnych. Musimy się wyżyć układu i traktować jedynie materię.

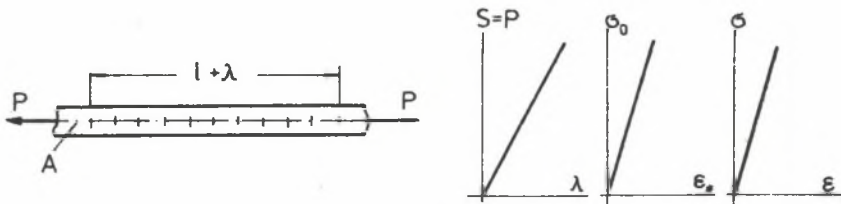
Wspomnieliśmy, że niemożliwe jest oddzielić fizyc z nie materię od jej postaci geometrycznej. Na szczęście taką szansę daje nam matematyczne rozumowanie. Należy tworzyć tego rodzaju układy materialne i poddawać je działaniu tego rodzaju zbiorów sił zewnętrznych, aby postać układu nie odgrywała w rezultatach żadnej roli. Ten jedyny ratunek stanowi jednorodność. Jeśli w obrębie całego układu uda nam się wywołać stan jednorodny, to badanie będzie można ograniczyć do dowolnego miejsca tego układu, albowiem w innym będzie się działo to samo. Na powyższej zasadzie logicznej wyeliminujemy nie tylko wymiary liniowe, charakteryzujące postać geometryczną układu, wyrugujemy automatycznie również parametry charakteryzujące położenie sił zewnętrznych,

wyrugujemy w ogóle wszelkie współrzędne układu. Wobec tego nie będziemy już poszukiwać związku między siłą i przemieszczeniem. Ustaliśmy podstawowe prawo mechaniki układów odkształcalnych wiążąc stan napięcia ze stanem odkształcenia.

Niewiele mamy laboratoryjnych możliwości tworzenia jednorodnych stanów napięcia lub odkształcenia. Musimy dobierać szczególne kształty układów i szczególne typy obciążeń. Gdy zachodzi mimo wszystko obawa nierównomierności w jakimś kierunku, musimy zastosować w tymże kierunku możliwie mały rozmiar układu. Gdy - odwrotnie - obawiamy się wpływu końców układu, stosujemy w odnośnym kierunku wybitnie wydłużony rozmiar. Lawirujemy zależnie od okoliczności między trój- dwu- i jednoosiowymi stanami. W rezultacie potrafimy zrealizować wszechstronną, równomierną kompresję przy zastosowaniu układów dość dowolnych kształtów, proste ścinanie skręcając cienkościenną rurę, jednoosiowe rozciąganie i tym podobne inne stany powstające najczęściej z kombinacji poprzednich.

W pomysłach tego rodzaju tkwią zawsze pewne przypuszczenia, których bezpośrednio doświadczalnie stwierdzić nie można. Muszą być one weryfikowane na innych pokrewnych faktach. W rezultacie prawo wiążące składowe stanu odkształcenia ze składowymi stanu napięcia - wbrew opinii wielu autorów - nie jest prawem bezpośrednio doświadczalnie sprawdzalnym.

Ograniczając nasze badania w dalszym ciągu do obszarów sprężystych, weźmy pod uwagę najprostszy wypadek jak na rys. 2.3. Pryzmatyczny pręt prosty obciążono wzdłuż osi dwiema równoważącymi się siłami P . W dowolnym jego przekroju istnieje siła wewnętrzna, a mianowicie siła podłużna $S=P$. Siła ta nie zależy od obioru miejsca przekroju; pod tym względem stwierdzamy równomierność. Unikając niejasnego wpływu uchwytów sił P obierzmy za długość obserwowaną odcinek 1; odcinek ten na wstępie eksperymentu po-



Rys. 2.3

dzielmy na pewną ilość możliwie małych równych części. Względne przemieszczenie przekrojów ograniczających długość l oznaczmy przez λ ; jest to po prostu wydłużenie długości pomiarowej, obserwowanej na poboczniczy pręta próbnego. Z łatwością stwierdzimy doświadczalnie, że mamy przed sobą

układ liniowo-sprężysty; znajdziemy bowiem: $\lambda = a \cdot P$ - oczywiście poniżej granicy proporcjonalności.

Chcąc wyznaczyć budowę parametru a , będziemy zmieniać po kolei po jednej wszystkie cechy pręta, zatrzymując bez zmiany inne. Jeśli z tego samego materiału wykonamy pręty o tej samej postaci przekroju i o tym samym polu przekroju, lecz o innych długościach, przekonamy się, że parametr a jest proporcjonalny do długości pomiarowej l . Jeśli z tego samego materiału wykonamy pręty o stałej początkowej długości l , lecz o innych przekrojach, przekonamy się, że wynik pomiaru nie zależy od postaci przekroju, lecz od jego pola; okaże się mianowicie, że a jest odwrotnie proporcjonalne względem A . Pozostawiając wreszcie bez zmiany daty l i A , a zmieniając materiał znajdziemy, że jego indywidualność wybiją tu swe wyraźne piętno; dojdziemy do tego, że istnieje pewna stała materiałowa E , regulująca wielkość a . Jest oczywiście obojętne, czy ją umieścimy w liczniku czy w mianowniku poszukiwanej formuły, skoro jest ona stała. Umieścimy ją dla pewnej wygody rachunkowej w mianowniku; będziemy ją wtedy nazywać pierwszą stałą sprężystości lub modułem Younga. Znaleźliśmy przeto zależność $\lambda = \frac{P \cdot l}{EA}$, określającą jedną ważną cechę badanego układu. Zależność ta okazała się przy tym - co też trzeba dodać - ważna dla $P < 0$, to znaczy dla wypadku ściskania. Moduł E ma dymensję ilorazu siły i pola.

Oddzielną uwagę poświęcono w tym eksperymencie drugiemu zjawisku. Zauważono, że wymiary poprzeczne pręta ze wzrostem siły P proporcjonalnie maleją. Lawirując jak poprzednio wykryto, że dla zmiany δ , któregośkolwiek liniowego rozmiaru poprzecznego d , napisać można formułę: $\delta = -\mu \cdot \frac{P \cdot d}{EA}$ i tutaj ważną dla $P < 0$. Dodatnia wielkość niemianowana μ okazała się zawsze mniejsza od jedności, ba - mniejsza od 0,5; nazywać ją będziemy ułamkiem Poissona lub stałą zwężenia poprzecznego. Zwracamy tu uwagę, że niektórzy autorzy operują odwrotnością tej liczby: $m = \frac{1}{\mu}$.

Na razie doświadczalnie stwierdzono, że badany układ jest liniowo-sprężysty oraz określono budowę odnośnych współczynników proporcjonalności. Z kolei usiłujemy pozbyć się wielkości charakteryzujących geometryczną postać układu. To samo doświadczenie poucza, że wydłużenie całkowite λ jest równomiernie rozrzucone na każdą część pierwotnej długości pomiarowej l . Upoważnia nas to do wprowadzenia pojęcia wydłużenia jednostkowego, czyli zdłuża: $\epsilon_* = \frac{\lambda}{l}$. Analogiczna obserwacja poprzeczna pozwala zastosować zdłuż dowolnego kierunku poprzecznego: $\epsilon'_* = \delta/d$. Naprężenie ma wymiar ilorazu siły i pola. Wprowadźmy tedy w grę wyrażenie: $\sigma_0 = P/A$. W ten sposób dwie formuły przybierają postać: $\epsilon_* = \sigma_0/E$, $\epsilon'_* = -\mu \cdot \sigma_0/E$, wolną od parametrów geometrycznych układu.

Od wyniku ostatecznego dzieli nas obecnie już nie doświadczenie lub rachunek, lecz przymysł z cieniem. Wielkości ϵ_* , ϵ'_* są zdłużeniami obserwowanymi na poboczniczy pręta. Z racji $P = S$ wydłużenie σ_0 mo-

zemy też napisać w postaci $\sigma_0 = S/A$, zawierającej w e w n ę t r z n ą siłę; wobec tego σ_0 jest przeciętnym naprężeniem normalnym przekroju. Otóż przypuśćmy, że siła S rozkłada się równomiernie na pole przekroju. Wtedy σ_0 będzie r z e c z y w i s t y m naprężeniem w dowolnym miejscu przekroju. Przypuśćmy dalej, że dla d o w o l n e g o podłużnego włókna pręta powyższe naprężenie normalne σ jego przekroju jest w ogóle j e d y n y m jego naprężeniem i to g ł ó w n y m, czyli że zwięźenie poprzeczne jest swoistą, szczególną własnością materiału, występującą bez obecności naprężeń w kierunku zwięźki. Wtedy w konsekwencji przypuścić musimy, że i skutki działania tego rodzaju prostego stanu napięcia muszą być równie jednorodne. Przyjmiemy więc, że również i zdłuż ϵ każdego włókna jest stały i równy temu na powierzchni ϵ_* ; to samo dotyczy skrótu - ϵ' , który zrównamy ze skrótem powierzchniowym - ϵ'_* . Na zakończenie wreszcie przypuścimy, że w materiałach równokierunkowych kierunki główne obu tensorów pokrywają się ze sobą. Skoro więc na powierzchni wyciętego ostatnio włókna odrzuciliśmy naprężenia styczne, to tym samym odrzucamy tam również skosy. Inaczej mówiąc, płaski przed odkształceniem przekrój pręta pozostanie taki i po deformacji; włókna zaś równoległe do osi pręta pozostaną takimi nadal.

W ostatecznym więc rezultacie napiszemy:

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E}, \quad \epsilon' = -\mu \frac{\sigma}{E}. \quad (1.3)$$

Kontrolując stwierdzimy, że tego rodzaju stan napięcia spełnia warunki równowagi każdego elementu, że wymaga on zgodnie z rzeczywistością, by pobocznica pręta była wolna od obciążeń i żąda, by obciążenia zewnętrzne P były zrealizowane w postaci sił powierzchniowych o stałym natężeniu. Stwierdzimy dalej, że układ da się złożyć bez luk z odkształconych elementów, czyli że podany stan odkształcenia spełnia warunki nierozdzielności; pozwala on jeden koniec pręta dowolnie prowadzić, więc w szczególności unieruchomić.

Formuły (1.3) stanowią s z c z e g ó l n ą postać prawa wiążącego stanu napięcia ze stanem odkształcenia, a zatem prawa określającego już n i e w ł a s n o ś ć układu l e c z w ł a s n o ś ć s a m e j m a t e r i i. Istotnie, wzory te nie zawierają w ogóle jakichkolwiek wskazówek odnośnie postaci układu. Rozumieć to należy przynajmniej następująco: Gdyby w jakimkolwiek innym wyjściowym układzie zaistniał również omówiony przez nas obszernie stan napięcia σ , to skutki jego działania ϵ, ϵ' określałyby te same formuły (1.3). Postać powyższego prawa jest istotnie szczególna. Stan napięcia jest tylko jednoosiowy, ponadto zaś zarówno naprężenie σ jak i odkształcenia ϵ, ϵ' odniesione są do kierunków głównych. Interesujący i nader ważny jest fakt, że jednoosiowemu tensorowi napięcia odpowiada w skutkach trójosiowy tensor odkształcenia, a to dzięki własności określonej obecnością stałej $\mu \neq 0$.

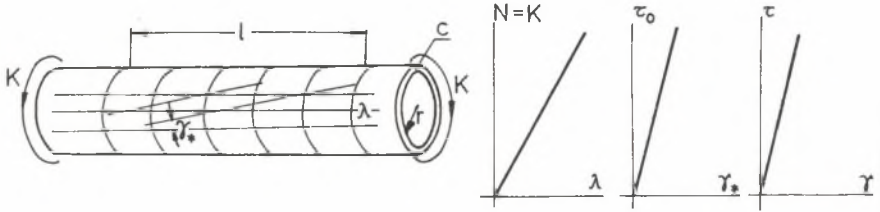
Możemy doświadczalnie stwierdzić, że istnieje granica proporcjonalności materiału w rozważanym jednoosiowym stanie napięcia, podobnie stwierdzamy, że istnieje granica sprężystości materiału w jednoosiowym stanie napięcia. Odróżniamy ją od poprzednio wprowadzonej granicy proporcjonalności względnie sprężystości układu. Prawo (1.3) ważne jest w obszarze proporcjonalności zarówno dla $\sigma > 0$ jak i $\sigma < 0$. Odnośne granice sprężystości oznaczymy przez α_r i α_c .

Ponieważ odkształcenia i naprężenie są w uzyskanym prawie względem siebie proporcjonalne, przeto stosując zasadę superpozycji możemy uzyskać prawo ogólniejsze, wyrażone trzema składowymi głównymi obu stanów. Stosując znane nam już przekształcenia obu stanów możemy rzecz dalej uogólnić, otrzymując prawo wiążące szóstkę dowolnych jednych składowych z szóstką przynależnych drugich. Uogólniając wreszcie postępowanie możemy dojść do prawa ważnego dla materiałów dowolnie różnokierunkowych.

W taki to sposób w naukach przyrodniczych, opartych o pomoc matematyczną, wykorzystuje się fakt elementarny dla dalekich uogólnień.

Niektóre z naszkicowanych tu operacji przeprowadzimy za chwilę. Już teraz jednak po ostatnich uwagach widzimy jak można wyrazić ostateczny rezultat: Składowe stanu odkształcenia są liniowymi jednorodnymi funkcjami składowych stanu napięcia - i na odwrót. To najogólniejsze prawo wiążące materię sprężystą przypisuje się niezbyt słusznie, względnie - w powyższej postaci - niezbyt ściśle angielskiemu uczonemu R. Hooke'owi, który najpierw (1676) ogłosił je w postaci anagramu ceiliinosssttuu i nieco później (1678) w formie twierdzenia "ut tensio sic vis" - nadto francuskiemu uczonemu E. Mariotte'owi (1680).

Jakkolwiek szczególne prawo (1.3) wystarcza do wyprowadzenia ogólnego, zademonstrujemy na razie przynajmniej jeszcze jeden przykład doświadczalny dla jego cennych walorów. Cienkościenną rurę o średnim promieniu r pierścieniowego przekroju kołowego i grubości c ścianki obciążamy na obu końcach równoważącą się dwójką momentów K o wektorach równoległych do osi rury. Odcinek rury długości pomiarowej l znaczymy jak na rys. 3.3 równoodległymi prostoliniowymi południkami i kołowymi równoleżnikami. W dowolnie obranym przekroju istnieje oczywiście moment skręcający $N = K$, niezależny od miejsca obranego przekroju, co gwarantuje nam jednorodność zjawiska. Z doświadczenia wynika, że równoleżniki pozostaną nadal krzywymi płaskimi, tj. kołami i to o niezmiennym promieniu; wzajemny początkowy odstęp tych kół również nie ulegnie zmianie. Południki przejdą w linie śrubowe, tak że względne przemieszczenie początku i końca odcinka tworzącej długości l , mierzone wzdłuż równoleżnika, wyniesie: $\lambda = a K$. Budany układ jest przeto do granicy proporcjonalności liniowo-sprężysty. Bliższe rozpatrzenie budowy współczynnika mianowanego a prowadzi do szczególnej postaci ostatecznego rezultatu, a to: $\lambda = \frac{kl}{Ar}$, gdzie $k = 2c\pi r^3$



Rys. 3.3

cza pole pierścieniowego przekroju, a jest drugą stałą sprężystości czyli modułem Kirchhoffa o wymiarach jak dla stałej E .

Do wyeliminowania parametrów geometrycznych układu posłużyć mogą następujące spostrzeżenia względnie uwagi: Przesunięcie λ przebiega równomiernie wzdłuż długości obserwowanej l ; ten fakt pozwala wprowadzić w rachunek kąt: $\gamma_* = \frac{\lambda}{l}$. W opisanych warunkach moment wewnętrzny $N = K$ musi rozłożyć się równomiernie wzdłuż obwodu pierścienia. Dzieląc powyższą jednostkową siłę obwodową przez szerokość c pierścienia znajdziemy przeciętną wartość wewnętrznej stycznej siły powierzchniowej, a to: $\tau_0 = \frac{N}{Ar} = \frac{c_0}{G}$. Rezultat doświadczenia może być przeto napisany w postaci: $\gamma_* = \frac{c_0}{G}$ wolnej od wymiarów układu.

Gdy grubość ścianki jest mała w porównaniu z promieniem rury τ_0 staje się wartością rzeczywistego naprężenia stycznego τ , a γ_* wartością przynależnego skosu γ . Użycie nazwy skosu jest usprawiedliwione faktem, iż zgodnie z opisem odkształcenie jest wyłącznie postaciowe, więc pozbawione zmiany pola elementu. W rezultacie znaleźliśmy prawo wiążące dla szczególnego dwuosiowego stanu napięcia, nazwanego przez nas skrętem, a to:

$$\gamma = \frac{\tau}{G}. \quad (2.3)$$

Stwierdziliśmy, że odpowiada mu proste odkształcenie postaciowe. Dla elementu wydzielonego w opisany sposób wielkości γ , τ są jedynymi składowymi różnymi od zera. Gdy znika τ , znika też γ , zatem kierunki główne obu stanów pokrywają się wzajemnie. Kontrolując nasze założenia i przypuszczenia stwierdzimy, że warunki nierozdzielności i warunki równowagi wraz z odnośnymi postulatami brzegowymi są spełnione. Wreszcie stwierdzimy doświadczalnie - i tylko doświadczalnie - że dla powyższego dwuosiowego stanu napięcia istnieje materiałowa granica proporcjonalności tudzież granica sprężystości; tę ostatnią oznaczymy przez κ_0 dla skrętu. Zbadanie dodatkowego spostrzeżenia treści: $\kappa \neq \kappa_r$, względnie: $\kappa \neq \kappa_0$ pozostawiamy sobie do innej części wykładu.

Zestawiając wartości E , G , μ dla rozmaitych materiałów równokierunkowych znajdziemy dodatkowo, że zachodzi między nimi zależność doświadczalna postaci:

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}. \quad (3.3)$$

Z wyводу podanego po poprzednim przykładzie doświadczalnym można się było spodziewać istnienia jakiegoś zależności między powyższymi danymi. Jeżeli bowiem dla materiałów izotropowych prawo szczególne (1.3) istotnie wystarcza do znalezienia dla nich prawa ogólnego, to w odnośnych przekształceniach mogą się pojawić jedynie kombinacje tamtych dwóch, tj. E i μ jako stałe zależne. Zachowanie się zatem liniowo-sprężyste materiałów równokierunkowych charakteryzują w zupełności dwie niezależne stałe doświadczalne.

Nie wchodząc bliżej w szczegóły maszyn służących w laboratoriach do wywoływania sił i momentów jak i dodatkowych urządzeń pomiarowych podajemy poniżej zestawienie stałych sprężystości dla kilkunastu materiałów. Z rozmaitych powodów dany te przedstawiają pewne średnie przeciętne. Wpływają na nie z jednej strony zastosowane w różnym stopniu przy produkcji materiału przymieszki chemiczne, z drugiej zaś obróbka termiczna lub mechaniczna tworzyw. Trzeba też pamiętać o tym, że nie wszystkie materiały podlegają ściśle prawu Hooke'a. W grupie stali granica proporcjonalności osiąga wartości od 1500 nawet do 10 000 kg/cm². U innych metali jest ona znacznie niższa, np. dla mosiądzu wynosi niewiele więcej aniżeli 500 kg/cm². U niektórych wreszcie tworzyw, przede wszystkim kruchych, granica proporcjonalności leży bardzo blisko zera. W tych wypadkach często z potrzeb praktycznych zastępujemy na stosownej długości łuk łagodnej krzywej doświadczalnej linią prostą i uzyskujemy w ten sposób średnią wartość stałych materiałowych. Wreszcie trzeba też zwrócić uwagę na to, że niektóre materiały są technicznie niecelowe dla rozciągania. Odnośne stałe E pochodzą wtedy z pomiarów ściskania i skrócenia.

Zestawienie poniższe pochodzi z kilku różnych przypadkowo dostępnych źródeł. Nie wszystkie wiersze są wobec tego kompletne; gdy zaś są, to z tych samych powodów nie wszędzie spełniają ściśle relację (3.3).

Materiał	E kg/cm ²	G kg/cm ²	μ
Wolfram - W	3,3 do 3,7.10 ⁶	-	-
Stale i staliwo	2,0 do 2,4.10 ⁶	0,8 do 0,9.10 ⁶	0,30
Nikiel - Ni	2,0.10 ⁶	0,8.10 ⁶	0,30
Tantal - Ta	1,9.10 ⁶	-	-
Platyna - Pt	1,7.10 ⁶	0,6.10 ⁶	0,40
Zeliwo	1,0 do 1,6.10 ⁶	0,3 do 0,6.10 ⁶	0,25
Miedź - Cu, cynk - Zn, mosiądz, brąz	0,9 do 1,3.10 ⁶	0,3 do 0,5.10 ⁶	0,25 do 0,40
Złoto - Au, srebro - Ag	0,8.10 ⁶	0,29.10 ⁶	0,40
Glin - Al, duraluminium	0,7.10 ⁶	0,27.10 ⁶	0,35
Cyna - Sn	0,55.10 ⁶	0,17.10 ⁶	0,35

Material	E kG/cm ²	G kG/cm ²	μ
Ołów - Pb	0,17.10 ⁶	0,06.10 ⁶	0,45
Szkło, porcelana	0,5 do 0,8.10 ⁶	0,25 do 0,60.10 ⁶	0,25
Kamienie i beton	0,1 do 0,3.10 ⁶	-	0,15 do 0,25
Bakelit, fenolit	0,3 do 0,4.10 ⁶	-	0,40
Cellon, celuloid	0,15 do 0,25.10 ⁶	-	0,40
lód	0,1.10 ⁶	-	-
Jedwab, skóra	0,002 do 0,06.10 ⁶	-	-
Kauczuk	0,0001.10 ⁶	-	0,50
Drewno równoległe do włókien	0,09 do 0,17.10 ⁶	-	-
Drewno prostopadłe do włókien	0,01.10 ⁶	-	-

Przejdźmy obecnie do sprawy rozszerzenia prawa (1.3) na wypadki trójosiowych stanów napięcia. Przyjmijmy na razie, że znane nam są trzy naprężenia główne $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. W ciałach równokierunkowych odpowiadają im - jak już wiemy - trzy odkształcenia główne $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$. Poszukując związku między jednymi i drugimi zastosujemy zasadę nakładania. Naprężenie σ_1 wywołuje w kierunku 1 zdłuż $\frac{\sigma_1}{E}$, nadto w kierunku 2 skróć $-\frac{\mu \sigma_1}{E}$ i to samo w kierunku 3. Mutatis mutandis rzecz się powtarza dla rezultatów obecności naprężeń σ_2 i σ_3 . Dla kierunku przeto 1 sumują się wyniki działań naprężeń $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, a to $\frac{\sigma_1}{E}, -\mu \frac{\sigma_2}{E}, -\mu \frac{\sigma_3}{E}$. Analogicznie jest w kierunkach pozostałych - 2 i 3. Mamy przeto:

$$\epsilon_1 = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)) = \frac{1}{E}((1 + \mu)\sigma_1 - \mu s),$$

$$\epsilon_2 = \frac{1}{E}(\sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1)) = \frac{1}{E}((1 + \mu)\sigma_2 - \mu s),$$

$$\epsilon_3 = \frac{1}{E}(\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)) = \frac{1}{E}((1 + \mu)\sigma_3 - \mu s),$$

gdzie: $s = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$ - jako prawo ogólniejsze od (1.3).

Zadanie 1.3. Czy można ustalić jakiś związek charakterystyczny między kompletem kół napięciowych i odkształceniowych?

Odpowiedź 1.3. Związek ten ma postać proporcji:

$$(\epsilon_2 - \epsilon_3) : (\epsilon_3 - \epsilon_1) : (\epsilon_1 - \epsilon_2) = (\sigma_2 - \sigma_3) : (\sigma_3 - \sigma_1) : (\sigma_1 - \sigma_2),$$

niezależnej od stałych materiałowych. Jeden zespół jest geometrycznie podobny do drugiego.

Uzyskany rezultat nie stanowi jeszcze najogólniejszej postaci prawa Hooke'a - Mariotte'a dla tworzyw równokierunkowych, bo orientuje osie według kierunków głównych. Obróćmy tedy osie w położenie dowolne x, y, z . Niech oś np. x zajmie położenie n , wtedy zgodnie ze wzorem (21.1), znając $\epsilon = \epsilon_x$ mamy:

$$\begin{aligned} E \epsilon_x &= ((1 + \mu)\sigma_1 - \mu s)n_1^2 + ((1 + \mu)\sigma_2 - \mu s)n_2^2 + ((1 + \mu)\sigma_3 - \mu s)n_3^2 = \\ &= (1 + \mu)(\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2) - \mu s(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2). \end{aligned}$$

Lecz pierwszy trójmian zgodnie ze wzorem (17.2) przedstawia $\sigma = \sigma_x$, drugi zaś wynosi 1. Zważywszy dodatkowo, że niezmiennik s możemy też napisać w postaci: $\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$, mamy zatem:

$$\epsilon_x = \frac{1}{E}((1 + \mu)\sigma_x - \mu s) = \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z))$$

i analogiczne wzory dla ϵ_y i ϵ_z . Uzyskane rezultaty zbudowane są identycznie jak poprzednie dla składowych głównych. Nie można było oczywiście z góry przypuścić, że z d ł u ż e ϵ dowolnych orientacji będzie n i e z a l e ż n e od n a p r ę ż e ń s t y c z n y c h, który to fakt jest nader znamienny.

W podobny sposób znajdziemy obecnie skos γ . Stosując wzór (21.1), mamy:

$$\begin{aligned} E^2 \left(\frac{1}{2} \gamma\right)^2 &= (1 + \mu)^2 (\sigma_2 - \sigma_3)^2 n_2^2 n_3^2 + (1 + \mu)^2 \cdot (\sigma_3 - \sigma_1)^2 n_3^2 n_1^2 + \\ &+ (1 + \mu)^2 (\sigma_1 - \sigma_2)^2 n_1^2 n_2^2. \end{aligned}$$

Tym razem znowu widzimy, że prawa strona powyższego równania jest zgodnie ze wzorem (17.2) równa: $(1 + \mu)^2 c^2$. Przekształcając po spierwiastkowaniu i obróceniu znaku dodatniego tudzież uwzględnieniu relacji (3.3) mamy:

$$\gamma = \frac{2(1 + \mu)}{E} = \frac{1}{G} c.$$

Podkreślić tu należy z naciskiem, że uprzednia znajomość wyniku doświadczalnego (3.3) nie była tu potrzebna. Możemy po prostu uważać, że dopiero obecnie wprowadziliśmy wielkość G jako pewien skrót matematyczny, oznaczający wynikię z rachunku połączenie stałych E i μ . Przekształcając odwrotnie - stwierdzenie czy niezależnie doświadczalnie wykryte E, μ, G spełniają relację (3.3) stanowi pewnego rodzaju kontrolę równokierunkowości materiału.

Ścisłość nakazuje nam rozstrzygnąć jeszcze jedną wątpliwość następującej natury: Naprężenie styczne τ przynależy do orientacji n , to znaczy leży w płaszczyźnie prostopadłej do normalnej $n \equiv x$; w tej płaszczyźnie - a więc w płaszczyźnie y_z - ma ono kierunek m , którego dostawy m_1, m_2, m_3 , odniesione do kierunków głównych 1, 2, 3, określają wzory (17.2). Analogicznie rzecz się ma ze skosem γ ; przynależy on również do tej samej orientacji n i ma jakiś kierunek m , którego dostawy określają wzory (21.1). Otóż nie wiemy, czy kierunek m' naprężenia τ pokrywa się z kierunkiem m'' skosu γ . Inaczej mówiąc wiemy, że γ wiąże się z τ jak m z τ według ostatniego rezultatu, nie wiemy jednak, czy obu tym wielkościom możemy dopisać ten sam wskaźnik. Aby to rozstrzygnąć, weźmy pod uwagę którąkolwiek równoimienną dwójkę dostaw, np. m_1' i m_1'' , zatem wzory: $\frac{1}{2} \gamma m_1'' = (\epsilon_1 - \epsilon_x) n_1$, $\tau m_1' = (\sigma_1 - \sigma_x) n_1$ i wstawmy w nie osiągnięte rezultaty. Mamy tu:

$$\frac{1}{2} \gamma m_1'' = (\epsilon_1 - \epsilon_x) n_1 = \frac{1}{E}(1 + \mu)(\sigma_1 - \sigma_x) n_1 = \frac{1 + \mu}{E} \tau m_1' = \frac{1}{2} \gamma m_1'$$

czyli ostatecznie $m_1'' = m_1' = m_1$; podobnie uzgodnimy m_2, m_3 . Zatem γ i τ przynależą do wspólnego kierunku i otrzymać mogą wspólny wskaźnik; jeśli z kierunkiem m pokryjemy oś y , tym wskaźnikiem wspólnym będzie litera z . Charakterystyczne jest, że γ_x z a l e ż y t y l k o od τ_x ; analogiczna uwaga dotyczy skosów γ_y i τ_y .

Możemy wreszcie podać najogólniejszą postać prawa wiążącego Hooke'a dla materiałów równokierunkowych:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)) = \frac{1}{2G}(\sigma_x - \frac{\mu}{1 + \mu} s) , \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)) = \frac{1}{2G}(\sigma_y - \frac{\mu}{1 + \mu} s) , \\ \epsilon_z &= \frac{1}{E}(\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)) = \frac{1}{2G}(\sigma_z - \frac{\mu}{1 + \mu} s) , \\ \gamma_x &= \frac{1}{G} \tau_x, \quad \gamma_y = \frac{1}{G} \tau_y, \quad \gamma_z = \frac{1}{G} \tau_z , \end{aligned} \tag{4.3}$$

$$s = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z .$$

Podaliśmy tu pierwsze trzy formuły w dwójakiej postaci; używamy jednej lub drugiej zależnie od potrzeby. Nawrót do kierunków głównych jest nadzwyczaj prosty. Należy po prostu skreślić wielkości γ, τ w pozostałych zaś wstawić w miejsce x, y, z wskaźniki 1, 2, 3. Wzory powyższe ważne są w obszarach sprężystych do granicy proporcjonalności. Faktem jest, że granica sprężystości materiału wyraża się od wypadku do wypadku i n n y m zespołem wartości σ, τ dla tego samego materiału. Wykrycie prawa, które-

mu to interesujące zjawisko podlega, będzie omówione obszernie gdzie indziej. Przy miernych zmianach temperatury stałe E , μ , G nie zmieniają swej wartości. Formuły (4.3) zmieniamy w takich wypadkach zwiększając zdłużenie - lecz tylko zdłużenie - dodajnikiem αt , w którym α oznacza współczynnik rozszerzalności termicznej, a t podwyższenie temperatury.

Uogólnienie liniowej zależności między składowymi obu tensorów dla materiałów różnokierunkowych doprowadziło początkowo do 81 stałych sprężystości. Liczba ta zmalała do 36, gdy skorzystano z tego, że owe tensory są symetrycznymi afinorami. Gdy wreszcie w rachubę wzięto pewne symetryczne własności potencjału sprężystości, okazało się ostatecznie, że liczba stałych maleje do 21, z czego 18 stanowi właściwe stałe materiałowe, a 3 orientują względem siebie osie główne obu tensorów. Uproszczenia dalsze są możliwe tylko w wypadku, gdy założymy anizotropię szczególną. Jeśli np. założymy, że w materiale istnieją trzy wzajemnie prostopadłe płaszczyzny symetrii strukturalnej i przyjmiemy, że osie x y z leżą w tych płaszczyznach, to liczba stałych zmniejszy się do 9; fakt ten w dobrym przybliżeniu zachodzi dla drewna. Dla materiałów równokierunkowych - jak już wspomnieliśmy - liczba stałych niezależnych wynosi 2.

Na jeszcze jedną ważną okoliczność natury ogólnej należy tu zwrócić uwagę. Prawo Hooke'a wywiedliśmy z doświadczenia, uzupełniając je skontrolowanymi a posteriori przypuszczeniami. Z wyjaśnionych konieczności w doświadczeniach stosowaliśmy stany jednorodne. Można by przeto wnosić, że równania (4.3) odnoszą się jedynie do tego rodzaju stanów. Tak nie jest. Rozszerzamy ważność prawa (4.3) do wszelkich stanów niejednorodnych, zakładając, że składowe stanu odkształcenia w pewnym miejscu układu zależą jedynie od składowych stanu napięcia w tymże miejscu, nie zależą zaś od zachowania się ich w najbliższej nawet okolicy tego punktu, więc np. od ich spadku itp. Założenie to skontrolowane zostało na wystarczającej liczbie wypadków. Zgodnie z naszymi wstępnymi przykładami okazuje się że - mimo użycia tego samego, podlegającego prawu Hooke'a, materiału - pewne układy z niego zbudowane są liniowo-sprężyste, inne tej cechy nie posiadają.

Zadanie 2.3. Wyrazić zmianę objętości przez składowe stanu napięcia. Wyciągnąć wniosek odnośnie ułamka Poissona.

Odpowiedź 2.3. Dodając do siebie stronami trzy pierwsze równania z grupy (4.3) znajdziemy:

$$e = \frac{1 - 2\mu}{E} s = \frac{1}{2H} x, \quad (5.3)$$
$$H = \frac{E}{2(1 - 2\mu)} A,$$

gdzie H jest modułem Helmholtza. Gdy wszystkie trzy naprężenia są dodatnie, przypuszczając należy, że objętość wzrośnie; gdy naprężenia będą

ciśnieniami, objętość zmaleje. Zatem e zmienia znak wraz z s ; musi przeto być $1 - 2\mu > 0$, czyli $\mu < 1/2$.

Zadanie 3.3. Odwrócić równania (4.3). Czy zawsze jest to możliwe?

Odpowiedź 3.3. Z równań (4.3) mamy: $\sigma_x = 2G \epsilon_x + \frac{\mu}{1+\mu} s$, z równania zaś (5.3) mamy: $s = \frac{E}{1-2\mu} e$. Równania odwrócone brzmią:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 2G\left(\epsilon_x + \frac{\mu}{1-2\mu} e\right) = \frac{2G}{1-2\mu}(1-\mu)\epsilon_x + \mu(\epsilon_y + \epsilon_z), \\ \sigma_y &= 2G\left(\epsilon_y + \frac{\mu}{1-2\mu} e\right) = \frac{2G}{1-2\mu}(1-\mu)\epsilon_y + (\epsilon_z + \epsilon_x), \\ \sigma_z &= 2G\left(\epsilon_z + \frac{\mu}{1-2\mu} e\right) = \frac{2G}{1-2\mu}(1-\mu)\epsilon_z + (\epsilon_x + \epsilon_y), \end{aligned} \quad (6.3)$$

$$\tau_x = G\gamma_x, \quad \tau_y = G\gamma_y, \quad \tau_z = G\gamma_z,$$

$$e = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z.$$

Odwrócenie jest niemożliwe dla $\mu = 1/2$.

Zadanie 4.3. Rozbivszy odkształcenie ϵ, γ na objętościowe ϵ', γ' i postaciowe ϵ'', γ'' przekonać się, jakimi częściami naprężeń σ, τ są odpowiadające σ^*, τ^* tudzież σ^{**}, τ^{**} .

Odpowiedź 4.3. Składowe ϵ', γ' tudzież ϵ'', γ'' podane są w odpowiedzi 8.1. Wstawmy najpierw grupę ϵ, γ' do równań (6.3) i uwzględnijmy (5.3), znajdziemy: $\sigma_x^* = \sigma_y^* = \sigma_z^* = \frac{E}{1-2\mu} \cdot \frac{e}{3} = \frac{1}{3} s$ nadto: $\tau_x^* = \tau_y^* = \tau_z^* = 0$.

Zajmijmy się teraz pozostałą częścią. Wstawmy w pierwsze równanie (6.3) za ϵ_x wielkość ϵ''_x tudzież za e wielkość $e'' = \epsilon''_x + \epsilon''_y + \epsilon''_z = 0$; otrzymamy: $\sigma_x^{**} = \frac{2G}{3}(2\epsilon_x - \epsilon_y - \epsilon_z)$. Do tego rezultatu podstawmy (4.3), otrzymamy: $\sigma_x^{**} = \frac{1}{3}(2\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z)$ i po cyklicznej zmianie wskaźników: $\sigma_y^{**} = \frac{1}{3}(2\sigma_y - \sigma_z - \sigma_x)$, $\sigma_z^{**} = \frac{1}{3}(2\sigma_z - \sigma_x - \sigma_y)$. Z podstawienia wreszcie γ'' znajdziemy: $\tau_x^{**} = \tau_x$, $\tau_y^{**} = \tau_y$, $\tau_z^{**} = \tau_z$.

Reasumując widzimy, że części σ^*, τ^* tudzież σ^{**}, τ^{**} są identyczne z odnośnymi σ', τ' tudzież σ'', τ'' podanymi w zadaniu 11.2.

Zadanie 5.3. Rozbivszy stan napięcia σ, τ na wszechstronne równomierne rozciąganie σ', τ' i pozostałe skręty σ'', τ'' przekonać się, jakimi częściami składowych całkowitych ϵ, γ są odpowiadające ϵ^*, γ^* tudzież $\epsilon^{**}, \gamma^{**}$.

Odpowiedź 5.3. Postąpić odwrotnie aniżeli w zadaniu 4.3. Znajdziemy $\epsilon^* = \epsilon'$, $\gamma^* = \gamma'$ tudzież $\epsilon^{**} = \epsilon''$, $\gamma^{**} = \gamma''$.

Zadanie 6.3. Płaskim uogólnionym zagadnieniem napięcia nazywamy zagadnienie, w którym na płaskich ograniczeniach tarczy jest: $\tau_x = \tau_y = 0$, po-

za tym $\sigma_z = \sigma_0$ jest znaną funkcją (z reguły tylko zmiennej z). Znaleźć pozostałe σ, τ jako funkcje ε, γ .

Odpowiedź 6.3. Nie możemy dać odpowiedzi gotowej w postaci równań (6.3), bo na prawej ich stronie figuruje niewiadome ε_z . Rozwiązując dwa pierwsze równania (4.3) względem σ_x, σ_y i uwzględniając relację (3.3) otrzymamy odpowiedź:

$$\sigma_x = \frac{2G}{1-\mu}(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y) + \frac{\mu}{1-\mu}\sigma_0, \quad \sigma_y = \frac{2G}{1-\mu}(\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x) + \frac{\mu}{1-\mu}\sigma_0, \quad \tau_z = G\gamma_z. \quad (7.3)$$

Zadanie 7.3. Płaskim uogólnionym zagadnieniem odkształcenia nazywamy stan, w którym na płaskich ograniczeniach tarczy jest: $\gamma_x = \gamma_y = 0$, ponadto zaś ε_z jest daną funkcją (z reguły tylko zmiennej z). Znaleźć aktualne σ, τ jako funkcje ε, γ , oznaczając $\sigma_0 = 2G\varepsilon_z$ i stosując obok stałej G pomocniczy współczynnik $\nu = \frac{\mu}{1-\mu}$.

Odpowiedź 7.3. Znalezione z trzeciego równania (4.3) związek: $\sigma_z = \mu(\sigma_x + \sigma_y) + \varepsilon_z = \mu(\sigma_x + \sigma_y) + (1 + \mu)\sigma_0$ wstawimy w dwa pierwsze równania (4.3). Dzieląc stronami przez $(1 + \mu)$ otrzymamy je w postaci:

$$2G\varepsilon_x = (1 - \mu)\sigma_x - \mu\sigma_y - \mu\sigma_0,$$

$$2G\varepsilon_y = (1 - \mu)\sigma_y - \mu\sigma_x - \mu\sigma_0,$$

skąd po rozwiązaniu względem σ_x, σ_y i uwzględnieniu zgodnie z tematem relacji $\mu = \frac{\nu}{1+\nu}$ otrzymamy:

$$\sigma_x = \frac{2G}{1-\nu}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) + \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_0, \quad \sigma_y = \frac{2G}{1-\nu}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) + \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_0, \quad \tau_z = G\gamma_z. \quad (8.3)$$

Z powodu ograniczenia $0 < \mu < 1/2$ zachodzi nierówność $0 < \nu < 1$. Korzyść z zastosowania współczynnika ν w miejsce μ jest widoczna. Rezultaty (8.3) mają zgodną budowę ze wzorami (7.3), jeśli w miejscu μ wstawimy ν . W tym sensie oba typy płaskich zagadnień są zamienne. Analogia upada, gdy w zadaniu 6.3 obliczymy ε_z jako funkcję $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ lub w zadaniu 7.3 σ_z jako funkcję σ_x, σ_y , otrzymamy bowiem w pierwszym wypadku:

$$\varepsilon_z = -\frac{\mu}{1-\mu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) + \frac{1-2\mu}{1-\mu} \cdot \varepsilon_0, \quad \text{gdzie } \varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{2G},$$

w drugim zaś:

$$\sigma_z = \frac{\nu}{1+\nu}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1+2\nu}{1+\nu} \cdot \sigma_0; \quad \text{tu } \mu \text{ przeszło w } -\nu.$$

W mechanice układów sztywnych wyprowadziliśmy z podstawowych praw Newtona zasadę zachowania energii. Dowiedliśmy mianowicie, że przy przejściu układu materialnego z położenia początkowego w dowolne inne zmiana jego energii kinetycznej jest równa pracy wykonanej na tym przemieszczeniu przez wszystkie siły zewnętrzne i wewnętrzne poruszającego się układu. Zasadę tę wyraża równanie: $U - U_0 = L_z + L_w$. Wykazaliśmy tam, że dla układu tworzącego jedno ciało sztywne praca L_w sił wewnętrznych jest zawsze zerem. Zwróciliśmy jednocześnie już wtedy uwagę na to, że w wypadku układu składającego się z kilku ciał sztywnych, które w czasie ruchu układu poruszają się względem siebie, mogą siły wewnętrzne w połączeniach wykonać ewentualnie pracę. Z charakteru tych sił wynikało, że owa ewentualna praca jest znaku ujemnego.

W układach odkształcalnych siły wewnętrzne są przyczyną powstawania odkształceń, czy też odwrotnie - powstawaniu odkształceń przeciwdziałając siły wewnętrzne. W tych warunkach praca sił wewnętrznych jest zawsze ujemna. Proces deformacji jest w obszarach sprężystych całkowicie odwracalny. Po usunięciu sił zewnętrznych siły wewnętrzne przemieszczają z powrotem punkty układu do położenia początkowego, wykonując przy tym pracę dodatnią o uprzedniej bezwzględnej wartości. Wiemy, że w takich warunkach wprowadzamy zwyczajowo do nauki termin energii. Umawiamy się przeto w obszarach sprężystych ujemnie wziętą pracę sił wewnętrznych nazywać energią odkształcenia lub energią sprężystości W ; mamy zatem: $W = -L_w$. Wobec tego pracę sił zewnętrznych oznaczmy prościej L ; więc $L = L_z$. Zwróćmy uwagę na to, że w obszarach odkształceń trwałych jest zawsze $|L_w| > W$; tam bowiem odzyskujemy po usunięciu obciążeń jedynie część pracy sił wewnętrznych. Gdy układ rozpoczął ruch ze stanu spoczynku, jego energia kinetyczna jest początkowo równa zeru. Gdy obserwujemy go w trakcie np. szybkich drgań, widzimy, że ustawnie przechodzi on przez zerowe miejsce energii kinetycznej. Nic nie stoi na przeszkodzie aby za początkowe miejsce układu czy początkową chwilę ruchu przyjąć tę, w której $U_0 = 0$. W ten sposób zasada zachowania energii przyjmie dla układów sprężyste odkształcalnych, dla których $U_0 = 0$ jest położeniem odniesienia, postać:

$$U + W = L. \quad (9.3)$$

Gdyby i siły zewnętrzne miały charakter zachowawczy, to - jak nam wiadomo z mechaniki klasycznej - moglibyśmy tu wprowadzić ich energię potencjalną V . Rezygnując z założenia $U_0 = 0$ i negując L równością: $L = U - U_0 = V - V_0$ uzyskalibyśmy wtedy w miejsce (9.3) równanie: $U + V + W = \text{Constans}$. Według pierwszej zasady termodynamiki twierdzenie (9.3) ma formę ogólniejszą: $U + W = L + Q$, gdzie Q jest mechanicznym równoważnikiem doprowadzonego względnie odprowadzonego w czasie procesu ciepła. W tym wy-

padku energia W zależy nie tylko od konfiguracji układu lecz również od rozmieszczenia temperatury wewnątrz układu.

Powyższą poprawkę termodynamiczną możemy pominąć z następujących powodów: W mechanice układów odkształcalnych interesują nas w zasadzie dwa skrajne wypadki. W jednym z nich układ wykonuje drobne i szybkie drgania, w drugim odkształcenia dokonują się nader powoli. W pierwszym wypadku można przypuścić, że zjawisko przebiega adiabatycznie, to znaczy bez zasilania elementów układu w ciepło względnie też bez uszczuplania ich z ciepła; tutaj przeto jest $Q = 0$. W drugim można przyjąć, że przebieg jest izotermiczny, to znaczy, że układ pozostaje w termicznej równowadze z otoczeniem, czyli że jego temperatura jest stała; w tych warunkach według drugiej zasady termodynamicznej wobec odwracalności zjawiska jest również $Q = 0$. W omówionych warunkach funkcja W zależy wobec tego tylko od konfiguracji układu.

Istotny cel równania (9.3) tkwi w tym, by informować, jak zmienia się w czasie ruchu układu wielkość L, U, W . W przyszłości do tego też celu będziemy go używać. Obecnie wyjątkowo spróbujemy, czy równanie to nie może posłużyć do znalezienia budowy funkcji W . Przeprowadzimy w tym celu następującą spekulację myślową. Niech siły zewnętrzne narastają niezmiernie powoli od wartości zerowych do założonych końcowych. Wtedy równie powoli narastać będą przemieszczenia układu od wartości zerowych do przynależnych końcowych. Tak powstałą pracę sił zewnętrznych L oznaczymy przez L_* ; znaczek dolny ma nam przypominać, że nałożyliśmy na zjawisko powyższy szczególnie przebieg. W powyższych warunkach prędkości przemieszczeń w ogóle nie istnieją, wobec tego energia kinetyczna jest w każdej chwili równa zeru. Na początku zjawiska równanie (9.3) jest spełnione, bo wszystkie jego dodajniki są zerami. W chwili dowolnej, czyli - co na jedno wychodzi - końcowej wobec $U = 0$ równanie (9.3) upraszcza się do formy:

$$W = L_* . \quad (10.3)$$

Zatem energia sprężystości równa jest fikcyjnej pracy, jaką wykonałyby niezmiernie wolne od zera narastające siły zewnętrzne układu na równie wolno od zera narastających przynależnych przemieszczeniach ich punktów zaczepienia.

Wielce frapujący jest oczywiście fakt, że wielkość W , zależna od wpływów wewnętrznych, może być obliczona za pośrednictwem wpływów zewnętrznych. Zostanie to w powyższy, dosłowny sposób wyzyskane gdzie indziej. Na razie spekulujemy dalej następująco: Chcemy wyrazić W przez ϵ, γ i σ, τ , tj. przy pomocy wielkości jednak wewnętrznych; czy jest to możliwe? Oczywiście tak. Wielkości te są wewnętrzne dla całego układu. Gdy go jednak podzielimy na części, to dla każdej nabierają one charakteru wielkości zewnętrznych. Obliczając ich L_* obliczymy W . Ba, pozbę-

dziemy się nawet rzeczywiście zewnętrznych wielkości, jakimi są siły masowe wyodrębnionej części; zrobimy to - jak już nam wiadomo - przez założenie stanu jednorodnego w rozważanym miejscu.

Wyodrębnijmy z układu materialnego prostopadłościan o krawędziach a , b , c wyciętych równoległe do osi x , y , z układu odniesienia. Na dwóch jego przeciwległych ścianach działają równoległe do krawędzi a przeciwnie skierowane siły $bc \cdot \sigma_x$. Ściany te przesuną się między innymi w kierunku osi x , a to tylna o a'' i przednia o a' . Uwzględniając przeciwne zwroty sił $bc \cdot \sigma_x$ widzimy, że przesunięcie względne wynosi $a'' - a'$, czyli $a \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = a \varepsilon_x$, bo wywołane ono jest wydłużeniem krawędzi a w kierunku x . Przesunięcie $a \cdot \varepsilon_x$ narasta liniowo wraz ze siłą $bc \cdot \sigma_x$ zgodnie z prawem Hooke'a. Wykonana przeto praca jest równa polu odnośnego trójkąta i wynosi $\frac{1}{2} abc \cdot \varepsilon_x \sigma_x$.

Praca innych sił powierzchniowych, prostopadłych do uwzględnionego wyżej przesunięcia, wynosi oczywiście zero. Siłami równoległymi do tego przesunięcia są też przeciwnie skierowane $ca \tau_z$ na dwóch przeciwległych ścianach oddalonych o b , tudzież przeciwnie skierowane $a b \tau_y$ na dwóch przeciwległych ścianach oddalonych o c . Jednakże tym przeciwnie skierowanym dwójkom przynależy to samo przemieszczenie $a'' - a'$, wobec czego ich praca jest zerem. Analogicznie, przy względnych przesunięciach $b \cdot \varepsilon_y$ i $c \cdot \varepsilon_z$ wykonują różną od zera pracę oddzielnie tylko siły $ca \cdot \sigma_y$ i $ab \cdot \sigma_z$. Prace te wynoszą $\frac{1}{2} abc \cdot \sigma_y \varepsilon_y$ i $\frac{1}{2} abc \sigma_z \varepsilon_z$.

Weźmy z kolei pod uwagę dwójkę przeciwnie skierowanych sił $abc \tau_x$ równoległych do krawędzi b i oddalonych o c . Dolna przesunie się w kierunku y o b' , górna zaś o b'' , tak że względne ich przesunięcie wynosi $b'' - b'$, czyli $c \frac{\partial v}{\partial z}$, bo wywołane ono jest częścią skosu γ_x . Wykonana praca wynosi $\frac{1}{2} abc \cdot \frac{\partial v}{\partial z} \tau_x$. Siły prostopadłe do $c \frac{\partial v}{\partial z}$ dają pracę zerową. Równoległym i przeciwnie skierowanym dwójkom $ca \sigma_y$ i $bc \tau_z$ przynależy na przeciwległych ścianach to samo przemieszczenie $b'' - b'$; ich praca jest przeto zerem. Wiemy już jednak, że istnieją jeszcze dwie inne siły pochodzące od naprężenia τ_x . Są to przeciwnie skierowane siły $ca \tau_x$ równoległe do krawędzi c i oddalone wzajemnie o b . Przynależą im przesunięcia lewe c'' i prace c'' , czyli względne $c'' - c' = b \frac{\partial w}{\partial y}$, pochodzące od reszty skosu γ_x . Ich praca ma wartość $\frac{1}{2} abc \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \tau_x$. Inne siły odpadają, bo albo są prostopadłe do $b \frac{\partial w}{\partial y}$, albo też pracują na tym samym przemieszczeniu względnym $c'' - c'$ przy własnych przeciwnych zwrotach jak dwójki $bc \tau_y$ i $ab \sigma_z$. W rezultacie praca sił pochodzących od τ_x ma wartość $\frac{1}{2} abc \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \tau_x = \frac{1}{2} abc \gamma_x \tau_x$. Podobnie od τ_y i τ_z znajdziemy $\frac{1}{2} abc \cdot \gamma_y \tau_y$ i $\frac{1}{2} abc \cdot \gamma_z \tau_z$.

Energię odkształcenia nagromadzoną w objętości abc otrzymamy, sumując sześć wykazanych dodajników. Dzieląc rezultat przez abc , znajdziemy wyrażenie na energię sprężystości W_0 , zamagazynowaną w jednostce objętości, a to:

$$W_0 = \frac{1}{2}(\epsilon_x \sigma_x + \epsilon_y \sigma_y + \epsilon_z \sigma_z + \gamma_x \tau_x + \gamma_y \tau_y + \gamma_z \tau_z) . \quad (11.3)$$

Energia W całego układu wynosi:

$$W = \int_{(V)} W_0 dV, \quad (12.3)$$

gdzie V oznacza objętość układu.

W ten sposób wyraziliśmy energię odkształcenia przy użyciu składowych stanu napięcia i odkształcenia. W stanach niejednorodnych są składowe tych stanów funkcjami miejsca; w ten sposób obliczenie energii W sprowadza się do całkowania jakiejś funkcji trzech zmiennych.

Zadanie 8.3. Ile wynosi energia jednoosiowego rozciągania względnie ściskania? Ile wynosi energia skrętu?

Odpowiedź 8.3. Są to szczególne wypadki formuły (11.3).

$$W_0 = \frac{1}{2} \sigma \epsilon = \frac{1}{2} E \epsilon^2 = \frac{1}{2} \frac{G^2}{E}; \quad W_0 = \frac{1}{2} \gamma \tau = \frac{1}{2} G \gamma^2 = \frac{1}{2} \frac{\tau^2}{G}.$$

Zadanie 9.3. Rozbić energię jednostkową W_0 materiału równokierunkowego na energię odkształcenia objętościowego W_0' i energię odkształcenia postaciowego W_0'' . Ile one wynoszą?

Odpowiedź 9.3. Pozornie wydaje się to niemożliwe. Jeśli bowiem rozłożymy składowe obu stanów według schematu: $\epsilon = \epsilon' + \epsilon''$, $\gamma = \gamma' + \gamma''$ tudzież $\sigma = \sigma' + \sigma''$, $\tau = \tau' + \tau''$ i wstawimy je w (11.3), to obok iloczynów typu uporządkowanego: $\epsilon' \sigma'$, $\gamma' \tau'$ tudzież: $\epsilon'' \sigma''$, $\gamma'' \tau''$ otrzymamy też iloczyny typu mieszanego: $\epsilon' \sigma''$, $\gamma' \tau''$ względnie: $\epsilon'' \sigma'$, $\gamma'' \tau'$. Jednakże zadania 4.3 i 5.3 wyjaśniają, że składowe sobie odpowiadające są dla ciał równokierunkowych identycznie i to w pewien szczególny sposób zbudowane. Dzięki temu sumy wyrażeń mieszanych $\epsilon \sigma$ i dodajniki mieszane $\gamma \tau$ odpadają z rachunku. Znajdujemy ostatecznie:

$$W_0 = W_0' + W_0'', \quad W_0' = \frac{1}{6} \cdot \epsilon \sigma ,$$

$$W_0'' = \frac{1}{6}((\epsilon_y - \epsilon_z)(\sigma_y - \sigma_z) + (\epsilon_z - \epsilon_x)(\sigma_z - \sigma_x) + (\epsilon_x - \epsilon_y)(\sigma_x - \sigma_y)) + \frac{1}{2}(\gamma_x \tau_x + \gamma_y \tau_y + \gamma_z \tau_z) . \quad (13.3)$$

Zadanie 10.3. Energia sprężystości nie może oczywiście zależeć od orientacji układu odniesienia, czyli musi się ona dać wyrazić przy pomocy niezmienników jednego lub drugiego stanu. Wykazać to.

Odpowiedź 10.3. Skorzystajmy ze związków: $E_e = (1 - 2\mu)s$, $G\gamma = \tau$ tu-
dzież trzech typu: $2G(\epsilon_y - \epsilon_z) = \sigma_y - \sigma_z$. Znajdziemy:

$$W'_0 = \frac{1}{6} \frac{E}{1 - 2\mu} e^2 = \frac{1}{6} \frac{1 - 2\mu}{E} s^2,$$

$$\begin{aligned} W''_0 &= \frac{1}{3} G((\epsilon_y - \epsilon_z)^2 + (\epsilon_z - \epsilon_x)^2 + (\epsilon_x - \epsilon_y)^2) + \frac{1}{2} G(\gamma_x^2 + \gamma_y^2 + \gamma_z^2) = \\ &= \frac{1}{12G}((\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2) + \frac{1}{2G}(\tau_x^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2) = \\ &= \frac{2}{3G}(e^2 - 3e) = \frac{1}{6G}(s^2 - 3s'). \end{aligned}$$

W ostatnim wierszu skorzystaliśmy ze wzorów (15.1) oraz (11.2).

Fakt liniowo jednorodnej zależności składowych obu tensorów uwidocz-
niony jest wyraźnie w funkcji (11.3), przez figurujący tam ułamek 1/2.
Wyrażenie to ma przeto znaczenie jedynie dla tworzyw podlegających prawu
Hooke'a. Formuła (11.3) wyraża energię mieszanymi wielkościami. Możemy ją
wyrazić przy użyciu składowych tylko jednego stanu, gdy drugie wyrugujemy
związkami (4.3) lub (6.3). Wtedy okaże się - co już uwidoczniają rezulta-
ty (14.3) - że energia odkształcenia jednostki objętości W_0 materiałów li-
niowo-sprężystych jest j e d n o r o d n ą k w a d r a t o w ą fun-
kcją składowych stanu odkształcenia lub też tego rodzaju funkcją składo-
wych stanu napięcia. Z powyższego faktu wynikają ważne konsekwencje mate-
matyczne.

Niech więc W_0 będzie jednorodną kwadratową funkcją składowych stanu
odkształcenia. Wtedy według twierdzenia Eulera o tego rodzaju funkcjach
 W_0 da się przedstawić w postaci:

$$W_0 = \frac{1}{2}(\epsilon_x \frac{\partial W_0}{\partial \epsilon_x} + \epsilon_y \frac{\partial W_0}{\partial \epsilon_y} + \epsilon_z \frac{\partial W_0}{\partial \epsilon_z} + \gamma_x \frac{\partial W_0}{\partial \gamma_x} + \gamma_y \frac{\partial W_0}{\partial \gamma_y} + \gamma_z \frac{\partial W_0}{\partial \gamma_z}), \quad (14.3)$$

ważnej dla dowolnych wartości składowych ϵ , γ . Skoro tak jest, to z
porównania powyższego wyrażenia z równie ogólnym (11.3) znajdziemy:

$$\sigma_x = \frac{\partial W_0}{\partial \epsilon_x}, \quad \sigma_y = \frac{\partial W_0}{\partial \epsilon_y}, \quad \sigma_z = \frac{\partial W_0}{\partial \epsilon_z}, \quad \tau_x = \frac{\partial W_0}{\partial \gamma_x}, \quad \tau_y = \frac{\partial W_0}{\partial \gamma_y}, \quad \tau_z = \frac{\partial W_0}{\partial \gamma_z}. \quad (15.3)$$

Analogicznie - przedstawiając W_0 jako funkcję składowych ϵ, γ otrzyma-
my:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial W_0}{\partial \sigma_x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial W_0}{\partial \sigma_y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial W_0}{\partial \sigma_z}, \quad \gamma_x = \frac{\partial W_0}{\partial \tau_y}, \quad \gamma_y = \frac{\partial W_0}{\partial \tau_x}, \quad \gamma_z = \frac{\partial W_0}{\partial \tau_z} \quad (16.3)$$

Istnieje g ł ę b o k a r ó ż n i c a między relacjami (15.3) i (16.3). Matematyk angielski Green na podstawie pewnych rozważań doszedł do przekonania, że w procesach odwracalnych z pewnością istnieje funkcja W_0 , posiadająca własności (15.3), stąd też relacje te noszą w literaturze nazwę formuł Greena. Fizyk angielski Kelvin ugruntował egzystencję funkcji W_0 z dociekań energetycznych mechaniczno-termicznych. Własności (15.3) ustalili oni b e z z a k ł a d a n i a jakiegokolwiek s z c z e g ó l n e j b u d o w y funkcji W_0 . Relacje te są przeto ważne dla materiałów d o w o l n i e sprężystych, a więc również dla n i e p o d l e g a j ą c y c h prawu Hooke'a. W przeciwieństwie do tego relacje (16.3), zwane w literaturze formułami włoskiego uczonego Castigliano, są ważne j ę d y n i e dla materiałów liniowo-sprężystych, tj. tylko dla takich, które p o d l e g a j ą prawu Hooke'a. Dla tej ostatniej kategorii materiałów formuły Greena i Castigliano tworzą odmienną - ale tej samej treści - formę równań (4.3) i (6.3). Wyprowadzenie ich z jednej funkcji kryje jednak rozmaite walory natury matematycznej. Zaliczyć do nich można między innymi redukcję 36 stałych materiałów anizotropowych do liczby 21.

Poświęciliśmy sporo uwagi liniowym zależnościom między składowymi obu tensorów w obszarach sprężystych, jako sprawie podstawowej wagi. Z istniejących dziedzin mechaniki układów odkształcalnych opracowana została obszernie m a t e m a t y c z n a t e o r i a s p r ę ż y s t o ś c i, stosująca właśnie jako prawo wiążące wyprowadzoną przez nas zależność liniową Hooke'a. Niemniej przypomnieć tu musimy, że istnieją materiały nie podlegające temu prawu. Usiłowano wykryć dla nich zastępczą postać prawa wiążącego. Niestety zrobiono to w sposób zbyt szczególny, a więc np. poszukiwano tylko związku między jedną składową σ a przynależną jej jedną ze składowych ε . W rezultacie prawa ogólnego nie wykryto. Tymczasem w obszarach sprężystych odpowiedzi dostatecznie ogólnej mogą udzielić relacje (15.3). Sprawie tej poświęciłem obszerną pracę specjalną. Jeśli materiał przynależy do grupy równokierunkowych, to energia sprężystości W_0 może być zbudowana z niezmienników stanu odkształcenia e, e', e'' względnie lepiej $e, e^2 - 3e''$. Zależnie od materiału i potrzeby wprowadzić możemy w rachunek dostateczną liczbę stałych sprężystości pierwszego, drugiego i wyższych rzędów. Wtedy relacje (15.3) dają nam poszukiwane prawo wiążące w postaci ogólnej. Obliczenia szczegółowe dowiodły, że tak rozszerzona teoria sprężystości nastrocza - czego można się było spodziewać - bardzo wiele trudności natury matematycznej.

Coraz częściej spotykamy się z poglądem, że prawo wiążące w obszarach sprężystych może mieć jedynie liniową budowę. Stwierdzenie przeto nieliniowej zależności między składowymi obu stanów dowodziłoby według powyż-

szego poglądu, że przebieg deformacji jest w tym wypadku niesprężysty. Nie przeszkadza to budowaniu prawa wiążącego według wyżej podanej recepty, to jest rozszerzeniu tej koncepcji na obszary dowolnego zachowania się materiału. Wymaga jednak ograniczenia jedynie do tych - najliczniejszych prawdopodobnie - wypadków, w których w każdym punkcie układu bezwzględne wartości naprężeń rosną wraz z siłami zewnętrznymi. Dodatkowe wyjaśnienie tego zastrzeżenia będzie za chwilę podane.

Prawo Hooke'a jest w pewnej mierze względnie dla pewnych materiałów prawem wyidealizowanym dla obszarów sprężystych. Przechodząc do obszaru odkształceń trwałych możemy rzecz analogicznie wyidealizować, biorąc sobie za wzór zachowanie niektórych gatunków miękkiej stali. Ścisłe rzecz biorąc, właśnie szczególne zachowanie się tych materiałów w pewnym obszarze zmusza nas do takiego, skądinąd uciążliwego postępowania. Prowadząc mianowicie dalej omówione niedawno doświadczenie z rozciągającym względnie też ze ściskającym prętem z miękkiej stali zauważymy, że od pewnego miejsca poczynając, zdłuż względnie skrót ϵ będzie rosnać przy niezmienniej wartości naprężania normalnego $\sigma = k_r$ względnie $\sigma = -k_c$. Odwrócenie tych równań nie jest możliwe. Określonej wartości k naprężenia przynależą nie oznaczone ϵ . Dodatkowy pomiar wykaze, że zdłuż względnie skrót poprzeczny ϵ' będzie obecnie wynosić $\epsilon' = -\frac{1}{2}$, co w dotychczasowych oznaczeniach jest równoznaczne z przyjęciem $\mu = \frac{1}{2}$. Innymi słowy deformacja przebiegać będzie bez zmiany objętości. Wreszcie okaże się, że przyjęcie zgodności kierunków głównych obu stanów odpowiada należycie objawom badanego zjawiska. Wielkość k_r względnie k_c nazywamy granicą plastyczności materiału dla jednoosiowego rozciągania względnie ściskania; z reguły jest $k_r = k_c = k$. Natomiast analogiczny eksperyment z cienkościenną rurą skręcaną wykaze granicę plastyczności tego samego materiału przy skręcie $\tau = k_s$, różną od k .

Powyższe rezultaty eksperymentu jednoosiowego stanu napięcia w obszarze tak szczególnie zmieniających się odkształceń trwałych stanowią punkt zaczepienia dla dalszych uogólnień matematycznej teorii plastyczności. Uogólnienia te prowadzą do prawa wiążącego postaci:

$$\begin{aligned} 6G_0\epsilon_x &= 2\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z, \\ 6G_0\epsilon_y &= 2\sigma_y - \sigma_x - \sigma_z, \\ 6G_0\epsilon_z &= 2\sigma_z - \sigma_x - \sigma_y, \\ G_0\gamma_x &= \tau_x, \quad G_0\gamma_y = \tau_y, \quad G_0\gamma_z = \tau_z, \end{aligned} \tag{17.3}$$

które otrzymujemy z (4.3), kładąc tam $\mu = \frac{1}{2}$. Do określonych σ, τ mogą w obszarach plastycznych przynależać również ε, γ tego obszaru. W równaniach przeto (17.3) wielkość G_0 jest nieoznaczona; po prostu ε, γ nie są tu jednoznacznie funkcjami σ, τ . W stanach niejednorodnych G_0 jest dodatkową niewiadomą funkcją miejsca. W ten sposób wielkość G_0 nie jest w powyższych równaniach stałą doświadczalną. Rzucając ją przekonujemy się, że wzory (17.3) zawierają tylko pięć niezależnych równań. Powyższy brak eksperymentalny zastępujemy w teorii plastyczności innym rezultatem doświadczalnym, a mianowicie tzw. warunkiem plastyczności. Odnośne równanie brzmi:

$$(\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 6(\tau_x^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2) = 2k^2. \quad (18.3)$$

Poznajemy tu znany nam z zadań 10.2 i 10.3 niezmiennik $s^2 - 3s'$. W związku z tym moglibyśmy warunkowi (18.3) nadać rozmaity tekst słowny. Powyższe równanie nosi w literaturze niezbyt słuszną nazwę warunku Hubera - Misesa - Hencky'ego. Dobre przybliżenie równania (18.3) stanowi warunek Coulomba

$$\sigma_{\max} - \sigma_{\min} = k, \quad (19.3)$$

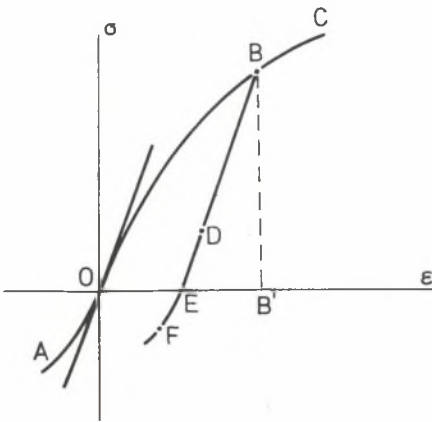
stosowany przez twórców teorii plastyczności - francuskich uczonych Levy'ego i de Saint-Venanta. Wielkość k jest w obu warunkach granicą plastyczności jednoosiowego stanu.

Rozwiązania prawidłowe teorii plastyczności muszą poza tym czynić załość ogólnym postulatam mechaniki układów odkształcalnych, a więc warunkom nierozdzielności i równowagi z odnośnymi wymogami brzegowymi. Charakterystyczną cechą tej teorii stanowi jej brak samowystarczalności; nie posiada ona własnego początku. Zaczyna się bowiem tam, gdzie się kończy teoria sprężystości; z konieczności więc wiąże się z nią warunkami brzegowymi.

Ściśle rzecz biorąc, w przedstawionej wyżej teorii nie istnieje prawo wiążące składowe obu stanów; zastępuje je prawo (18.3) względnie (19.3). Rzecz uwypukla się w szczególny sposób, gdy stan napięcia jest jednorodny; odkształcenia płyną przy niezmiennych wartościach naprężeń. Tylko Nieliczne materiały, albo też tylko w szczególnych warunkach materiały zachowują się w powyższy sposób. Gdy tak nie jest, z powrotem aktualna i podstawowa staje się sprawa wykrywania prawa wiążącego. Niestety rzecz ta znajduje się - jak wyżej wspomnieliśmy - w zaczątkach. Nie posiadamy nawet dla nader często stosowanych tworzyw tego prawa w postaci ogólnej. Trudności polegają najczęściej na tym, że nie potrafimy zrealizować dostatecznie ogólnych stanów jednorodnych, że piętczą się też przed nami trudności matematyczne w stosowaniu tego rodzaju praw. Wreszcie i mate-

riały same kryją w sobie niespodzianki. Czasem w pozornie prostym doświadczeniu jednoosiowego stanu napięcia występują objawy, z którymi nie potrafimy sobie dać rady. Tak np. rozciągając pręt z miękkiej stali zauważymy w pewnym stadium doświadczenia lokalną zwyżkę, która automatycznie zmienia stan napięcia w trójosiowy, urągając naszym usiłowaniom utrzymania stanu prostszego. Zjawisko to nie znalazło dotychczas wyjaśnienia mechanicznego. Z tych to powodów zadowolnić się musimy tym, czym dysponujemy. Operujemy formułami zdobytymi w obszarach matematycznie i doświadczalnie opanowanych i korygujemy je współczynnikami, które każdorazowo wykrywamy doświadczalnie. Droga ta nie stanowi postępowania naukowego nie wywodzi się bowiem z prawa elementarnego; nadmiar doświadczeń czyni te poczynania wysoce nieekonomicznymi. Wskazane przeto jest, by więcej uwagi poświęcono sprawie prawa podstawowego.

Na ważny dodatkowy szczegół trzeba tu jeszcze zwrócić uwagę. Weźmy pod uwagę prymitywny wypadek pręta rozciąganego lub też ściskanego poza granicę sprężystości materiału.



Rys. 4.3

czasowej znowu zwiększać naprężenie σ stwierdzimy, iż w dobrym przybliżeniu trzecia z kolei krzywa doświadczalna pokryje się z prostą EB względnie DB; dalsze zwiększanie naprężenia doprowadzi do łuku BC zgodnego z pierwotnym, tj. tym, który uzyskalibyśmy, prowadząc doświadczenie od początku O przez B przy ciągle narastającym obciążeniu. Na odcinku EB materiał zachowuje się przeto jak sprężysty. Eksperyment powyższy możemy kilkakrotnie powtórzyć. Przy dostatecznie wolnym tempie i każdorazowym odpoczynku w E żadne nowe fakty nie zajdą. Odcinek OB przedstawia gąłkowite. OE trwałe i EB sprężyste odkształcenie próbki. W ten sposób znane nam jest prawo wiążące dla odwróconego przebiegu ϵ, σ co r w niektórych zagadnieniach bardzo duże znaczenie.

Na rys. 4.3 podano część A O C odnośnego diagramu ϵ, σ . Jeśli osiągnąwszy miejsce B w wykresie pocniemy zmniejszać naprężenie σ , to okaże się, że związek powrotny między ϵ i σ będzie innego rodzaju aniżeli ten poprzedni, określony łukiem OB. W dobrym przybliżeniu obrazem tego nowego związku będzie prosta BD względnie BE, równoległa do stycznej krzywej pierwotnej w początku O. Gdy dodatkowo obrócimy znak naprężenia w tym procesie powrotnym, nowa część wykresu EF zakrzywi się w stronę łuku OA. Gdy wreszcie poczynając czy to od miejsca E, czy też D pocniemy po stosownej przerwie

Temat 1.3. Streścić ustęp 3, podkreślając najważniejsze fakty i myśli.

Temat 2.3. Zapoznać się z różnymi pomysłami nieliniowej zależności obu stanów.

Temat 3.3. Energia sprężystości jest zawsze dodatnia. Jakie stąd wynikają konsekwencje dla stałych materiałowych w rozszerzonym potęgowym określeniu energii jako funkcji niezmienników?

4. WYTYŻENIE I BEZPIECZEŃSTWO

Doświadczenia prowadzące do ustalenia prawa wiążącego składowe stanu napięcia i odkształcenia tworzą jedną ważną serię eksperymentalną. Istnieje równie ważna druga, zmierzająca do ustalenia stopnia wytyżenia materiału. Wiemy, że układu materialnego nie można obciążać bez granic. Przy pewnych wartościach sił zewnętrznych osiągamy granicę sprężystości; przekraczając ją wchodzimy w obszar trwałych odkształceń. Zmiana konfiguracji układu doprowadzić może do nieprzewidzianego i nienależytego jej funkcjonowania. Gdy zaś osiągniemy granicę wytrzymałości, nośność układu zostanie zniweczona całkowicie. W laboratoriach rozmyślnie powodujemy tego rodzaju stany po to, aby na odwrót dla obiektów technicznych prawidłowo zbudowanych i obciążonych móc dokładnie oszacować, ile wynosi ich stopień bezpieczeństwa, tj. określić ilokrotne powiększenie obciążeń stanowiłoby groźbę niezdatności obiektu. Wyznaczenie tego współczynnika bezpieczeństwa czy też odnośnych obciążeń dopuszczalnych stanowi z technicznego użytkowego punktu widzenia najważniejszy cel mechaniki układów rzeczywistych.

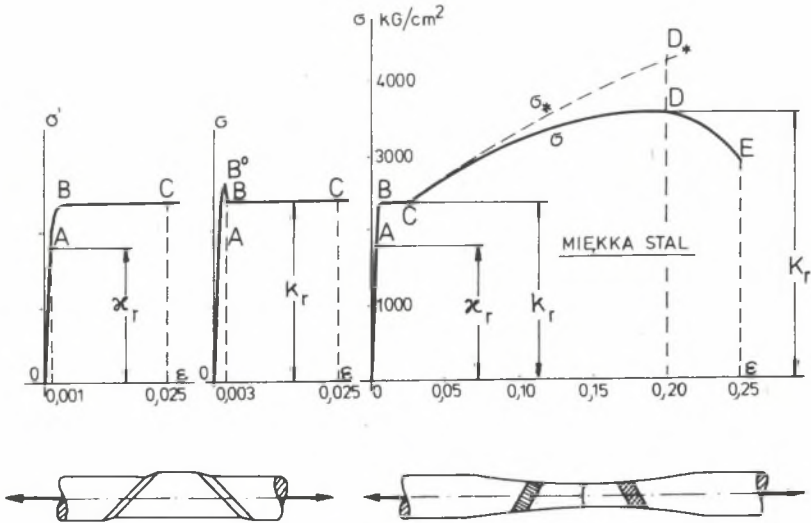
Odpowiedź na tego rodzaju pytanie może dać tylko doświadczenie. Przy masowej produkcji jakiegoś elementu opłaca się i jest nawet wskazane eksperymentować wprost na jednym czy kilku z nich, więc zniszczyć go po to, by innym zagwarantować długotrwałą egzystencję mechaniczną przez należyty dobór bezpiecznego obciążenia czy ewentualną ekonomiczną zmianę jego rozmiarów geometrycznych. Na ogół jednak rzadko możemy sobie pozwolić na takie, bezpośrednio do celu prowadzące doświadczenia. Wiemy zresztą, że badanie układów materialnych nie prowadzi do wykrycia własności podstawowych samej materii. Z tego to powodu dążymy do tego, by udział w układzie stał się aktem matematycznego obliczenia, podstawy zaś tego obliczenia by stanowiło prawo elementarne określające wytyżenie samego tworzywa. Podobnie jak w prawie wiążącym chcemy owo wytyżenie określić naprężeniami i odkształceniami.

Różni autorzy, rozmaicie definiują wytyżenie materiału. Będziemy pod wytyżeniem rozumieć osłabienie mechanicznych własności materii, spowodowane obecnością stanu napięcia i stanu odkształcenia. Osłabienie to może być przelotną słabością, gdy doszliśmy nie dalej jak do granicy sprężystości. Może ono stać się nieuleczalnym kalectwem w obszarze plastycznym jest zgonem, gdy osiągniemy granicę wytrzymałości.

Zagadnienie wyteżenia notowane jest w literaturze już od czasów Galileusza; na pewno musiało ono istnieć i w czasach odleglejszych. Istnieje przynajmniej kilkanaście hipotez usiłujących wynikiem badań nadać szatę matematyczną. Podamy tu kilka uznawanych obecnie w świecie technicznym funkcji, określających wyteżenie. Przestrzegamy przy tej sposobności przed innymi przestarzałymi i nieodpowiednimi, które bezwładna tradycja historyczna zdołała jeszcze utrzymać w niektórych skądinąd nawet dobrych publikacjach.

Rzecz zyska na jasności, jeśli zaznajomimy się najpierw z faktami doświadczalnymi prostymi, a potem przejdziemy do złożonych. W laboratoriach mechanicznych dysponujemy rozmaitymi maszynami wytrzymałościowymi i urządzeniami pomocniczymi, służącymi do precyzyjnych pomiarów. Pod tym względem rekord posiada Ameryka. Istnieją tam maszyny do badania dużych części konstrukcji, na których można wyrzucić siły cisnące do 4500 ton względnie ciągnące do 1500 ton. Normalnie stosujemy do badań na elementach próbnych maszyny o zasięgu do 500 ton przy ściskaniu względnie do 100 ton przy rozciąganiu. Na maszynach tych, najczęściej typu uniwersalnego, można poza rozciąganiem i ściskaniem realizować również cięcie i zginanie; do skręcania stosowane są maszyny odmiennej konstrukcji o stosowanym zasięgu. Istnieją wreszcie urządzenia specjalne, w których realizować można dodatkowo wszechstronne równomierne ciśnienie i ewentualnie dołączyć je do innych stanów, zyskując w ten sposób większą różnorodność stanów napięcia. Szczegóły czy to maszyn, czy instrumentów pomiarowych są tak różnorodne, że nie sposób je tu podać; najprościej zapoznać się z nimi w laboratorium. Ogólnie biorąc, usiłowania konstruktorów idą w tym kierunku, by w urządzeniach wytwarzać statycznie wyznaczalne zbiory sił, ponadto zaś i głównie w tym kierunku, by wywołane stany wewnętrzne były możliwie jednorodne; ten drugi postulat jest - jak już o tym gdzie indziej wspomnieliśmy - bardzo trudny do zrealizowania.

Najbardziej elementarną a jednocześnie najbardziej cenną próbę wyteżenia stanowi doświadczenie nad znanym nam już w niektórych szczegółach jednoosiowym rozciąganiem. Za typowy dla materiałów ciągliwych uważamy eksperyment z miękką stalą, zilustrowany na rys. 1.4. Zwiększając obciążenie zewnętrzne, zwiększamy najpierw wyteżenie materiału od wartości początkowej zerowej do wyteżenia na granicy sprężystości $\sigma = \chi_r$, $\epsilon = \frac{\chi_r}{E}$. W dobrym przybliżeniu granica sprężystości pokrywa się tu z granicą proporcjonalności. Ponieważ obie zależą w wysokiej mierze od precyzji instrumentów pomiarowych, ponieważ nie u wszystkich materiałów występują one równie wyraźnie, umawiamy się często, że za granicę sprężystości względnie proporcjonalności uważamy to naprężenie χ_r , któremu odpowiada zdłuż trwały o wartości 0,0003. Punkt A wykresu, ilustrujący dla miękkiej stali granicę sprężystości i proporcjonalności, ma współrzędne: $\epsilon = \sim 0,001$ i $\sigma = \chi_r = \sim 1800 \text{ kg/cm}^2$.



Rys. 1.4

W dalszej części AB wykresu próbnego odkształcenie rośnie szybciej aniżeli naprężenie. Na blyszcząco polerowanej powierzchni próbki stalowej zauważyć można przy użyciu mikroskopu już w chwili po przekroczeniu granicy A ciemne linie, nachylone w przybliżeniu pod kątem 45° względem osi pręta próbnego. Linie te, początkowo grubości $1/2$ mikrona, pojawiają się w dwóch gromadach i ze wzrostem naprężenia σ dają się wreszcie zauważyć gołym okiem w postaci wklęsłych smug plastycznych, zwanych smugami Lüdersa. Jest to wyraźna informacja o tym, że osiągnęliśmy wyężenie na granicy plastyczności B. W podanym na rys. 1.4 wypadku punkt B ma współrzędne $\epsilon = \sim 0,003$ i $\sigma = k_p = 2400 \text{ kg/cm}^2$. W istocie tego rodzaju przejście do obszaru plastycznego pojawia się u twardszych stali. U miękkich rozróżniamy górną granicę plastyczności B° i o średnio 15% niższą dolną B; znaczenie praktyczne ma jedynie dolna granica płynności B. Smugi plastyczne są optycznym objawem poślizgów ukośnych, w wyniku których w obszarze plastycznym występuje wybitnie zwiększone wydłużenie ciała próbnego. Odnośny mechanizm poślizgu i związanego z tym wydłużenia wskazano prymitywnie na rys. 1.4. Smugi plastyczne pojawiają się w najbliższej okolicy przyszłego rozdarcia próbki.

Granica płynności posiada dla oceny materiałów ciągliwych bardzo duże praktyczne znaczenie. Ponieważ nie u wszystkich metali uwidacznia się ona tak wyraźnie jak u stali, przeto umówiono się uważać za nią to miejsce B wykresu doświadczalnego, któremu odpowiada trwały zdłuż o wartości skwalifikowanej dla różnych materiałów od 0,002 do 0,005.

Obszar wyraźnie plastyczny kończy się dla badanej stali w miejscu C wykresu o współrzędnych $\epsilon = \sim 0,025$, $\sigma = k_f = \sim 2400 \text{ kg/cm}^2$. Słuszne

jest wobec s t a ł e j wartości naprężenia przyjąć, że w obrębie obszaru płynności wyężenie rośnie wraz ze wzrostem o d k s z t a ł c e n i a .

Poślizgi cząsteczek materiału w obszarze plastycznym wywołują zmiany strukturalne materiału, w wyniku których w miejscu C wykresu dochodzi do jego powtórnego wzmocnienia. Dależe wydłużenie wymaga znów wzrostu naprężenia. Jednakże w wyniku tych zmian materiałowych stan napięcia doznał skomplikowania; jest on zapewne, poczynając już od miejsca C, trójosiowy i coraz to bardziej niejednorodny. Z pewnością tak jest w miejscu zilustrowanym na rys. 1.4 punktem szczytowym D. Gdy w dotychczasowej części eksperymentu stwierdzić można było równomierność wydłużenia pręta próbnego, obecnie fakt ten przestanie zachodzić. Na próbce pojawia się lokalne zwężenie i tu koncentruje się deformacja układu; części położone poza s z y j k ą przestają się wydłużać. W rezultacie niejednorodnego trójosiowego stanu napięcia następuje w zwężce spiętrzenie wyężenia, które kończy się wreszcie rozerwaniem pręta próbnego; ilustruje to punkt końcowy E wykresu. Powierzchnia rozdarcia zakończona jest na brzegu typowym stożkiem.

Technolodzy usiłują rozmaicie tłumaczyć zjawisko szyjki. Mechanicznego wyjaśnienia dotychczas nie podano. Należy przypuszczać, jest ono objawem niestałości równowagi szczególnego, trójosiowego stanu. Poglądu tego nie zaryzykowano dotychczas nigdzie w literaturze.

Dla cytowanej stali punkt szczytowy diagramu ma współrzędne $\epsilon = \sim 0,20$, $\sigma = K_r = \sim 3600 \text{ kg/cm}^2$. Punkt końcowy E ma współrzędne $\epsilon = \eta = \sim 0,25$, $\sigma = \sim 3000 \text{ kg/cm}^2$. W certyfikatach p r z e m y s ł o w y c h z powyższych czterech dat podajemy dwie, a mianowicie granicę wytrzymałości d o r a ż n e j K_r i w y d ł u ż a l n o ś ć k o ń c o w ą η .

Za tego rodzaju zestawienie, nie odpowiadających sobie współrzędnych, nie możemy spodziewać się aprobaty ze strony matematycznej teorii. Usprawiedliwienie kryje się w następujących względach. Wartość K_r wyznacza się bardzo prosto. Albo rejestruje ją wprost dodatkowa luźna wskazówka manometru, napędzana wskazówką obiegową, albo przy wprzęgnięciu przyrządu samopiszącego rzecz redukuje się po prostu do dodatkowego nakreślenia odnośnej stycznej szczytowej. Odwrotnie jednak, wyznaczenie odciętej przynależnej do ekstremum funkcji jest - jak wiadomo - nader niepewne. Wyznaczenie natomiast zdłużu końcowego η jest znowu bardzo proste; albo bowiem przykładamy do siebie rozerwane części próbki i mierzymy stwierdzone wydłużenie trwałe, pomijając nieobecną już część sprężystą, albo też stwierdzamy je na uzyskanym wykresie przyrządu samopiszącego, kreśląc dla E przynależną odciętą. Zważywszy jednak na fakt, że wydłużenie rozkłada się w ostatniej fazie doświadczenia nierównomiernie wzdłuż pręta próbnego, to znaczy, że na zdłuż końcowy η składa się jedna część, proporcjonalna do długości pomiarowej i druga zależna od wzajemnego stosunku innych rozmiarów geometrycznych układu, musimy przy podawaniu daty η określić wyraźnie

typ użytej - z reguły znormalizowanej - próbki; niezbyt ściśle uważa się, że przy użyciu pręta o przekroju kołowym wystarczające tu jest podać stosunek długości pomiarowej do średnicy przekroju.

Dodatkowego wyjaśnienia domaga się szczególna osobliwość wykresu 1.4. Stanowi ją, poczynający się w D, spadek naprężenia σ . Zauważmy w tym celu, że w diagramie tym odcinamy jako wartość naprężenia iloraz zmiennej siły podłużnej i stałego, bo pierwotnie początkowego przekroju. W rzeczywistości zaś przekrój pręta doznaje ze wzrostem naprężenia pomniejszenia. Pomijalne ono jest w obszarze małych zdłuży. Jeśli zaniedbujemy je również w obszarze dużych odkształceń, to robimy to jedynie z konieczności życiowych; nie możemy setkom prób dokonywanych dla celów czysto przemysłowych poświęcać zbyt wiele czasu. Chcąc jednak dla celów naukowych uzyskać wykres poprawniejszy, odcinamy w nim jako naprężenie prawdziwe σ_* iloraz siły podłużnej i przynależnego chwilowego przekroju. Taki sposób postępowania wymaga ustawicznego pomiaru zmian przekroju. Wystarczająco dokładny pogląd na sprawę uzyskamy, pomijając część sprężystą odkształcenia a dla plastycznej zakładając brak zmian objętości układu próbnego. W rezultacie okaże się, że krzywa σ_* leży ponad krzywą σ ; w miejsce punktu szczytowego D uzyskamy punkt D_* ze styczną nachyloną względem osi ϵ pod kątem różnym od zera. Korygowanie wykresu poza punkt D następcza niepomierne większe trudności, bowiem stan napięcia staje się trójosiowy i niejednorodny. W różnych przekrojach zwężki, przeciętne naprężenie i przeciętny zdłuż mają rozmaitą wartość. Należałoby wobec tego albo nakreślić pęk krzywych wychodzących z punktu D_* , albo też umówić się, że kreśliłyśmy którąś szczególną z tego pęku, np. tę dla najwęższego miejsca szyjki. Byłoby nader cenne zbadać charakter owego pęku, czego dotychczas w literaturze przedmiotu nie zrobiono. Jest możliwe, że przy odpowiednio zmodyfikowanej definicji zdłużu ϵ można by ów pęk zredukować do jednej jedynej krzywej.

Zadanie 1.4. Wyznaczyć prawdopodobny związek między naprężeniami technicznym σ i prawdziwym σ_* w próbie jednoosiowego rozciągania. Podać spadek stycznej $\left(\frac{d\sigma}{d\epsilon}\right)_0$ w miejscu $\sigma = \sigma_{\max}$.

Odpowiedź 1.4. Oznaczmy przekrój początkowy przez A, chwilowy przez A_* a odnośne długości pomiarowe przez l i l_* . Z niezmienniej objętości próbki $A_*l_* = Al$ i definicji zdłużu $\epsilon = \frac{l_* - l}{l}$ uzyskamy $A_* = \frac{A}{1 + \epsilon}$. Jeśli S oznacza siłę podłużną, jest: $\sigma = \frac{S}{A}$, $\sigma_* = \frac{S}{A_*}$. Zatem poszukiwany związek ma postać: $\sigma_* = (1 + \epsilon)\sigma$. Różniczkując mamy stąd: $\frac{d\sigma_*}{d\epsilon} = \frac{d\sigma}{d\epsilon}(1 + \epsilon) + \sigma$. Dla $\sigma = \sigma_{\max} = K_r$ jest $\frac{d\sigma}{d\epsilon} = 0$; tam więc jest: $\left(\frac{d\sigma_*}{d\epsilon}\right)_0 = \sigma = \frac{\sigma_*}{1 + \epsilon}$, co łatwo skonstruować, kreśląc odnośną prostą. Jaką?

Zadanie 2.4. Niektórzy autorzy modyfikują wykres $\sigma(\epsilon)$ do postaci $\sigma_*(\alpha)$, gdzie σ_* jest naprężeniem prawdziwym, α zaś jednostkową zmianą przekro-

ju. Podać odnośny związek i wyznaczyć warunek dla miejsca odpowiadającego punktowi $\sigma = \sigma_{\max}$.

Odpowiedź 2.4. Definiujemy $\varepsilon = \frac{l_* - l}{l}$, nadto $\alpha = \frac{A - A_*}{A}$. Postępując jak w zadaniu 1.4 znajdziemy $\alpha = \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon}$, $\sigma_* = \frac{\sigma}{1 - \alpha}$, $\frac{d\sigma_*}{d\alpha} = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \cdot \frac{1}{(j - \alpha)^2} + \frac{\sigma_*}{1 - \alpha}$; zatem dla $\sigma = \sigma_{\max} = K_r$ jest $(\frac{d\sigma_*}{d\alpha})_0 = \frac{\sigma_*}{1 - \alpha}$, co można skonstruować kreśląc hiperbolę. Jaką?

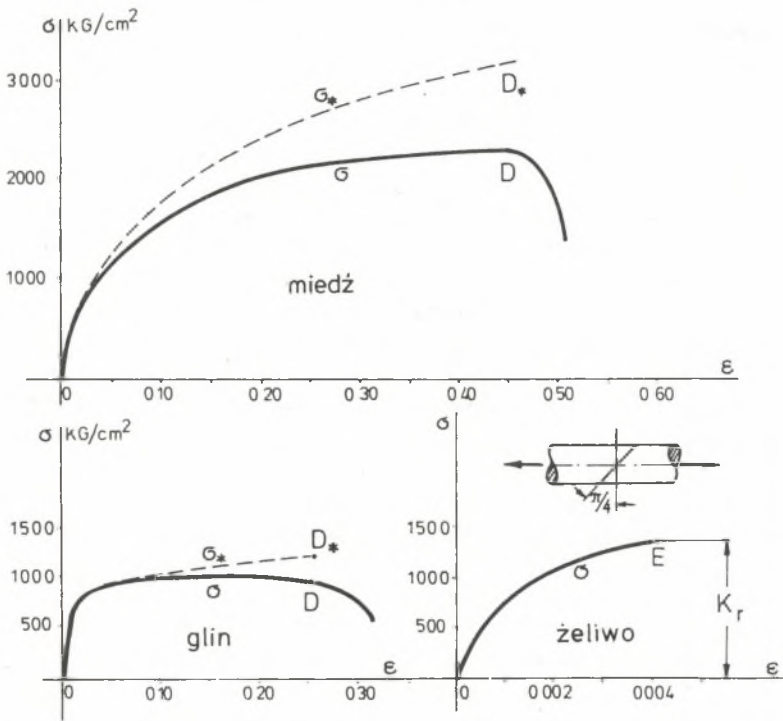
Rysunek 2.4 podaje wyniki jednoosiowego rozciągania dla miedzi, glinu i żeliwa. Pierwsze dwa metale należą do typu ciągliwych; ich wydłużalność przekracza 0,50 względnie 0,30. Spadek krzywych na części DE wskazuje i tu na obecność zwężki końcowej.

W przeciwieństwie do tego żeliwo zaliczamy do tworzyw kruchych; zdłuż końcowy nie dochodzi tu do 0,005, co zmusiło do zmiany skali rysunkowej. Korekta do krzywej σ_* jest tu niecelowa; brak jest granicy płynności. Brak też jest zjawiska szyjki. Za charakterystyczny parametr wytrzymałościowy - jak dla wszystkich materiałów kruchych - uważamy tu wytrzymałość do różną K_r . Rozdarcie r o z c i ą g a n e g o pręta pryzmatycznego z materiału kruchego następuje w płaszczyźnie odchyłonej od przekroju prostopadłego do osi pręta o kąt zawsze m n i e j s z y od $\pi/4$.

Daty K_r dla materiałów kruchych nie są całkowicie pewne. Często licząc się z dodatkowymi innymi parametrami mechanicznymi tego typu tworzyw zmuszeni jesteśmy próbkom rozciągany nadawać skomplikowane kształty, jak np. dla cementu, dalekie od postaci pryzmatycznego pręta. Wskutek tego wywołujemy w elementach próbnych trójosiowy niejednorodny stan napięcia. W rezultacie określenie wyężania końcowego datami K_r i η staje się mniejszym lub większym przybliżeniem. Dodać wreszcie trzeba, że z użytkownego punktu widzenia wytrzymałość na rozciąganie nie stanowi dla tej grupy materiałów zbyt cennej wskazówki. Za taką konstruktorzy uważają tu raczej wytrzymałość na ściskanie.

Oddzielną kategorię materiałów technicznych tworzy drewno. Ponieważ jest to tworzywo różnokierunkowe, przeto określając jego mechaniczne własności należy określić odnośny kierunek badania. Rozciąganie drewna odgrywa pewną rolę w kierunku równoległym do włókien. Granica sprężystości K_r leży stosunkowo blisko granicy wytrzymałości K_r . Charakter rozdarcia bywa rozmaity w zależności od gatunku drzewa.

Wykresy uzyskane z próby rozciągania poza charakterystycznym dla każdego materiału kształtem, tj. wzajemną zależnością wielkości σ i ε , dają nam też możliwość pewnego rodzaju ryczałtowego szacowania tworzywa pod względem mechanicznym. Pole ograniczone krzywą, osią ε i dowolną rzędną równe jest najwidoczniej pracy odkształcenia, tj. pracy dostarczonej jednostce objętości ciała próbnego dla doprowadzenia jej do stanu określonego przyjętą rzędną. W szczególności, gdy będzie nią rzędna końcowa, odnośne pole jest jednostkową pracą odkształcenia, potrzebną do zerwania próbki.



Rys. 2.4

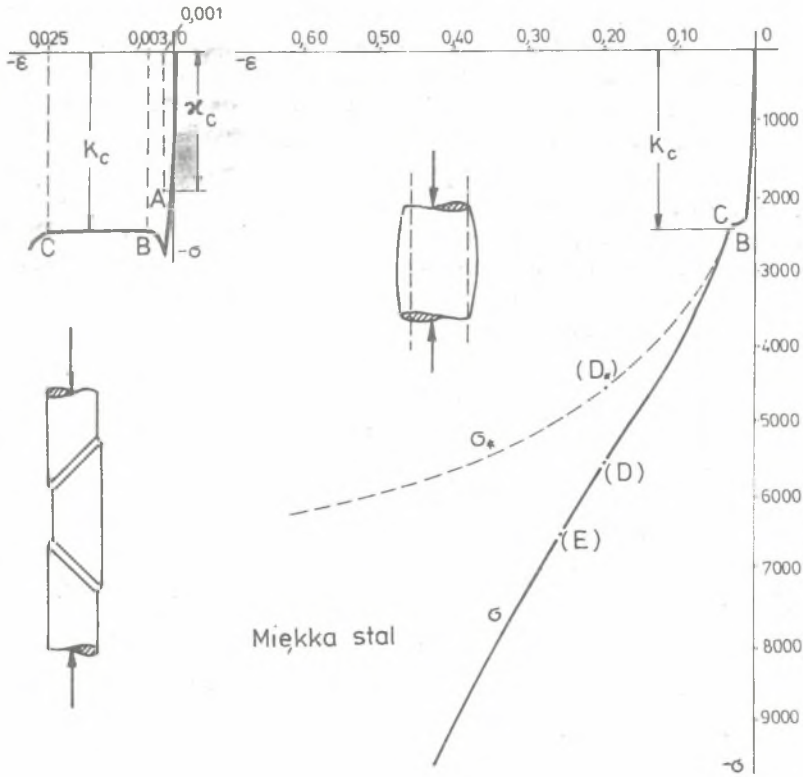
Poniżej zestawiono granice wytrzymałości K_r niektórych materiałów. Granica plastyczności k_p materiałów ciągliwych zawarta jest między 0,5 K_r a 0,8 K_r , więc np. dla stali wynosi średnio $2/3 K_r$.

Materiał	K_r kg/cm ²	Materiał	K_r kg/cm ²
Wolfram	30 000	Glin - Al	700 - 3 000
Stale	3 000 - 20 000	Duraluminium	3 800 - 6 000
Nikiel - Ni	5 000	Cyna - Sn	170 - 250
Platyna - Pt	2 400 - 3 500	Ołów - Pb	200
Żeliwo	1 200 - 2 500	Szkło	200 - 800
Miedź - Cu	2 100 - 5 000	Kamień, beton	20 - 80
Cynk - Zn	1 300 - 2 000	Celuloid, bakelit	250 - 800
Mosiądz	1 500 - 6 000	Skóra	250 - 350
Brąz	1 800 - 7 000	Kauczuk	200 - 500
Złoto - Au	1 000 - 2 500	Drewno miękkie	700 - 800
Srebro - Ag	1 600 - 3 000	Drewno twarde	1 000 - 1 300

Następną podstawową dla badania wyężenia próbę stanowi doświadczenie ze ściskany elementem. Eksperyment ten przedstawia trudności techniczne większe aniżeli poprzedni. Chcąc uzyskać jednorodny stan napięcia należy ciężu próbnemu nadać kształt pryzmatycznego pręta o przekroju najlepiej kołowym lub nieco gorzej kwadratowym. Dla uniknięcia wpływu głowic należy zgodnie z twierdzeniem de Saint-Venanta dobierać pręty dostatecznie długie. Wtedy jednak w pewnym stadium doświadczenia pojawia się boczne zakrzywienie pręta, które maći jednoosiowy obraz. Zmuszeni tedy jesteśmy używać prętów niezbyt długich. Gdy chcemy prócz naprężeń wyznaczać również i odpowiadające im skróty, musimy stosować pręty przynajmniej takiej długości, która umożliwia umieszczenie odnośnego instrumentu na próbce. Średnio biorąc, długość taka jest równa przynajmniej czterokrotnej średnicy pręta. Stosowanie próbek krótszych, więc np. o długości mniejszej od trzykrotnego rozmiaru poprzecznego, nie prowadzi do rezultatów nadających się do naukowego traktowania. Skoncentrowanie obciążenia w postaci sił skupionych na końcach pręta grozi w wypadku materiału zbyt słabego zniszczeniem lokalnym, w wypadku zaś tworzywa zbyt mocnego nadwyżeniem stykających się z próbką części maszyny laboratoryjnej. Z powyższych powodów wywieramy na płaskie przekroje końcowe ciała próbnego naciski rozłożone powierzchniowo. W tych zaś warunkach, tarcie powstałe między płytą maszyny a powierzchnią końcową próbki uniemożliwia swobodne poszerzenie się tej ostatniej. Wymuszony zostaje w ten sposób na końcach pręta trójosiowy stan napięcia, który niejednorodnie wnika w głąb próbki. Oczywiście znów jest, że w tych warunkach jedynie przy dostatecznej długości pręta można się w jego części środkowej spodziewać jednoosiowego równomiernego stanu napięcia, o który nam chodzi w tego typu doświadczeniach.

Podobnie jak przy rozciąganiu i tu przy ściskaniu różne efekty osiągamy dla tworzyw ciągliwych i kruchych. Rys. 3.4 ilustruje rezultaty badania miękkiej stali. Zjawisko przebiega jak przy rozciąganiu. Początkowo osiągamy wyężenie na granicy proporcjonalności praktycznie zgodnie z granicą sprężystości; odpowiadają mu daty $\sigma = -\sigma_c$, $\epsilon = -\frac{\sigma_c}{E}$. Ze wzrostem obciążenia osiągamy wyężenie na granicy płynności przy naprężeniu wynoszącym $\sigma = -\sigma_k$. Powtarzają się też objawy związane z powstawaniem pólślizgów, więc nachylone pod $\pi/4$ wyspukie smugi, dzięki którym, jak to zaznaczono na rys. 3.4, występuje w obszarze wyraźnie plastycznym wybitny wzrost odkształcenia - ϵ przy niezmiennej wartości naprężenia σ . Przy niewyraźnie zaznaczających się punktach A i B czynimy tu jak i w ogóle dla metali ciągliwych umowę definiującą te charakterystyczne granice. Różnice między odnośnymi datami przy rozciąganiu tudzież ściskaniu są tak nieznaczne, że z bardzo małym błędem możemy dla materiałów ów c i ą g l i w y c h napisać:

$$\sigma_c = \sigma_r = \sigma, \quad \sigma_k = \sigma_r = \sigma. \quad (1.4)$$



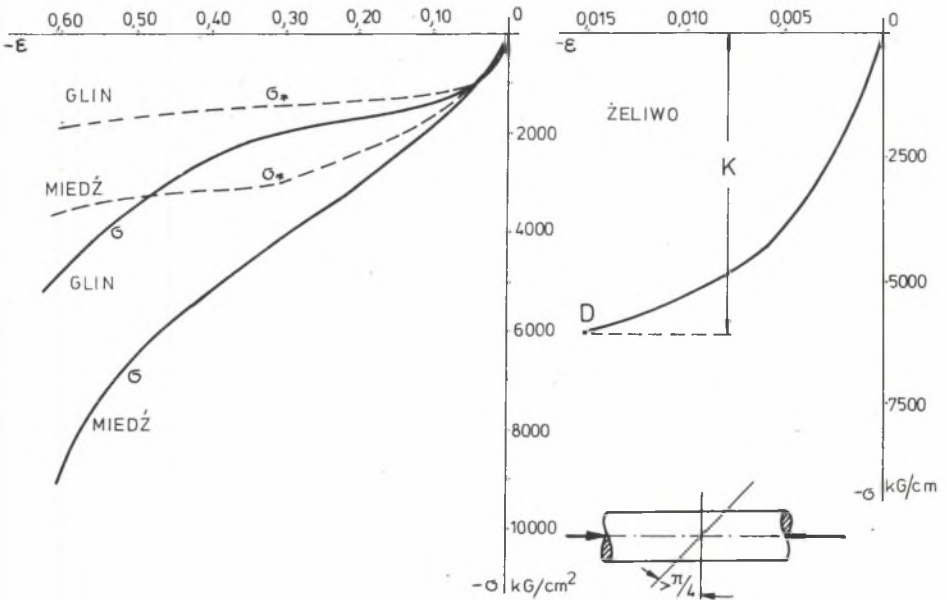
Rys. 3.4

Na odwrót, relację (1.4) stanowią nader charakterystyczną cechą wyężeniową tworzyw ciągliwych. Analogiczną równość stwierdzamy również dla odkształceń. Zgodnie z powyższym słusznie wnosimy, że wykres 3.4 dotyczy tej miękkiej stali, dla której uprzednio podaliśmy diagram 1.4.

Powyżej obszaru ściśle plastycznego przebieg funkcji σ, ϵ jest jednak inny; krzywa ściskania jest wybitnie bardziej stroma przy ściskaniu aniżeli przy rozciąganiu. Pręt w sposób ciągły, tj. bez rys lub szczelin skracca się, przyjmując zależnie od stopnia podatności beczułkowatą postać. Słupki ten można w dalszym ciągu ściskać, uzyskując z niego cienki krążek. Bardzo rzadko zdarza się osiągnięcie wyężenia odpowiadającego granicy wytrzymałości mimo tego, że przekraczamy skróty wartości 0.60. W związku z tym można by nawet przyjąć, że wytrzymałość na ściskanie K_c materiałów ciągliwych jest dowolnie wielka. Praktyczniej jest odrzucić ją z kalkulacji, a za datę charakterystyczną dla wyężenia uważać granicę płynności K_c .

Do ostatnich uwag można wnieść korektę analogiczną jak przy rozciąganiu. Możemy i tutaj w miejsce naprężenia technicznego σ wprowadzić naprężenie prawdziwe $\sigma_* = \sigma(1 + \epsilon)$. Wobec $\epsilon < 0$ wykres skorygowany przebiega wyraźnie mniej stromo. Ba, okazuje się, że - pomijając znaki - przebiega on dla wszelkich metali ciągliwych wystarczająco zgodnie z odnośnym diagramem σ_*, ϵ uzyskanym z próby rozciągania - oczywiście w obszarze naszej znajomości tego ostatniego, tj. do punktu D. Byłoby bardzo interesujące przekonać się, czy powyższej zgodności czyni zadość również wzmiankowane przez nas ewentualne przedłużanie wykresu σ_*, ϵ dla rozciągania.

Na rys. 4.4 podano dodatkowo wyniki próby ściskania z miedzią i glinem; dotyczą ich podobne uwagi.



Rys. 4.4

Zachowanie się materiałów kruchych przy ściskaniu oddaje dobrze żeliwo; odnośny wykres przedstawia prawa część rys. 4.4. Za jedyną cechę mechaniczną próby ściskania tworzyw kruchych uważać należy tylko wytrzymałość $\sigma = -K_c$. Skrót końcowy jest bardzo mały, bo nie przekracza wartości 0,02. Charakterystyczne tu jest, że K_c jest u materiałów kruchych kilka, kilkanaście a nawet kilkadziesiąt razy większe aniżeli K_r . Tak np. średnio biorąc dla żeliwa jest $\frac{K_c}{K_r} = 4$. Dla materiałów kruchych przeto zawsze zachodzi nierówność:

$$K_c > K_r \quad (2.4)$$

Co należy uważać za wyłączenie końcowe przy próbie ściskania tworzyw kruchych - zgodnie nie ustalono. Jedni badacze uważają za miarę tego wyłączenia tę wartość naprężenia, przy której pojawiają się pierwsze mikroskopijne rysy, inni natomiast podają to naprężenie, przy którym zostaje całkowicie zniszczony opór ciała próbnego. Płaszczyzna końcowego poślizgu w przypadku jednoosiowo ściskaniego pręta z materiału kruchego, jak żeliwo, kamień itp., odchyłona jest od przekroju prostopadłego do osi pręta o kąt zawsze większy od $\pi/4$. Efekt ten obserwować można jednak tylko na prętach dostatecznie długich, a mianowicie w części środkowej pręta, dostatecznie oddalonej od przekrojów końcowych. Powyższemu faktowi nie przeczy zatem pozornie odmienne zachowanie się krótkich próbek, więc np. kostek cementowych lub kamiennych. Trzeba w tych wypadkach należycie oszacować niejednorodność stanu napięcia a w związku z tym prawdopodobne kierunki naprężeń głównych.

Przy próbie ściskania drewna równoległe do włókien stwierdzimy nierówność $K_c < K_r$. Zależnie od gatunku drewna zniszczenie wytrzymałości następuje przez rozczepienie międzysłojowe albo też odwrotnie - przez pęknięcie prostopadłe do włókien.

Dla orientacji podajemy kilka dat K_c :

Materiał	K_c kg/cm ²
Żeliwo	6 000 - 18 000
Szkło	6 000 - 10 000
Kamienie naturalne	200 - 6 000
Beton	150 - 600
Drewno równol. do włók.	250 - 350

Trzeci ważny wypadek stanowi badanie wytężenia przy skręcie czyli prostym ścinaniu. Spotykany często w podręcznikach przykład przyrządkowej beleczki obciążonej równoważącą się dwójką sił, działających prostopadle do niej, nie ma w tym wypadku żadnego naukowego znaczenia. Jest to po prostu cięcie technologiczne, tj. proces wywołujący skomplikowany, niejednorodny, całkowicie nieprzejrzysty stan napięcia. Poprawne doświadczenie stanowi w tym wypadku skręcanie cienkościennej rury. Wiemy już, że elementy rury doznają właśnie jednorodnego skrętu τ , któremu odpowiada odkształcenie postaciowe mierzone skosem γ . Przy niezbyt wielkich naprężeniach stosować możemy rurę o bardzo cienkiej ścianie. Ze wzrostem obciążenia zachodzi jednak często wypadek niestateczności tego rodzaju układu, tak że w rezultacie eksperyment prowadzić trzeba na rurach dość grubych; zakłada to jednorodność i wymaga korekty rachunkowej. Przy badaniu materiałów kruchych w ogóle zmuszeni jesteśmy zrezygnować z rury i stosujemy pełne walce próbne; wyniki doświadczenia nie są tu zbyt pewne.

Przyjrząwszy się wykresowi doświadczalnemu τ, γ tworzyw ciągliwych stwierdzimy, że jest on podobny do tych, które dla badanego materiału uży-

skano w próbie rozciągania względnie ściskania. Zatem ze wzrostem obciążania rośnie naprężenie τ i skos γ do granicy sprężystości względnie proporcjonalności, po czym osiągamy wyteżenie na granicy płynności, co poznajemy po charakterystycznych smugach plastycznych, pojawiających się dokładnie na równoleżnikach. Przy tym samym jednak wyteżeniu odnośna granica plastyczności k_s jest wyraźnie niższa od ustalonej uprzednio $k_r = k_c = k$; doświadczenia nad najrozmaitszymi materiałami ciągliwymi prowadzą do przekonania, że data k_s zawarta jest między $0,5 k$ a $0,6 k$ z wyraźnym zbliżeniem ku większej z tych wartości.

W dalszym przebiegu wykresu doświadczalnego stwierdzamy u miękkich stali wyraźny obszar plastyczny, czyli wzrost skosu γ przy niezmienniej wartości $\tau = k_s$; u pozostałych materiałów ciągliwych widoczne jest silne lokalne zakrzywienie wykresu. Innymi słowy, wszystkie objawy powtarzają się i doświadczenie kończy się osiągnięciem wyteżenia odpowiadającego granicy wytrzymałości K_s .

U materiałów kruchych za jedyny stan krytyczny przyjąć musimy wyteżenie na granicy wytrzymałości K_s . Ten stan objawia się poślizgiem względnie rozdarciem pręta próbnego według powierzchni nachylonej do równoleżnika pod kątem tym w i ę c e j zbliżonym do $\pi/4$, im bardziej materiał jest kruchy. Doświadczenie poucza także, że liczba K_s jest u tych tworzyw zbliżona do wartości K_r .

Z olbrzymiej ilości innych doświadczeń nad wyteżeniem materiałów wymienimy tu jeszcze niektóre tylko. Tak więc okazało się, że zarówno materiały ciągliwe jak i kruche są nieczułe na wszechstronne równomierne ściskanie; przy dowolnie dużym rozporządzalnym ciśnieniu nie zdołano osiągnąć wyteżenia odpowiadającego granicy wytrzymałości. Stwierdzono jedynie w pewnych wypadkach i okolicznościach wyraźne odkształcenia trwałe. Doświadczenia wykazały, że materiały tego rodzaju, jak np. piaskowiec i marmur w wysokich ciśnieniach przybierają cechy tworzyw ciągliwych. Tak np. gdy do równomiernego przestrzennego ciśnienia dołączono osłowe ściskanie walców próbnych z tych kamieni, stwierdzono skróty dochodzące do $0,10$, gdy przy jednoosiowym ściskaniu nie uzyskujemy dla nich nawet $0,01$.

Ostatnio wymienione eksperymenty jak i wiele innych podjęto celem zbadania, jaką rolę w wyteżeniu odgrywa w trójosiowych stanach napięcia średnie naprężenie. Wobec równości w powyższych doświadczeniach dwóch głównych naprężeń ten sposób badania nie okazał się zbyt celowy i w p ł y w u tego n i e s t w i e r d z o n o. Doświadczenia te natomiast wykazały, że zmodyfikowanie stanu napięcia przez dołączenie h y d r o s t a t y c z n e g o ciśnienia w p ł y w a n a w y t e ż e n i e t w o r z y w k r u c h y c h.

Cenniejsze dla wykazania w p ł y w u ś r e d n i e g o n a p r e ż e n i a na wyteżenie materiałów były doświadczenia nad cienkościennymi rurami ze stali, miedzi i niklu, rozciągany osiowo i jednocześnie poddany wewnętrznemu ciśnieniu. W p ł y w p o w y ż s z y u w y d a t -

nił się tam w nieznaczej ale widocznej mierze. Jednocześnie okazało się, że modyfikowanie stanu napięcia dołączeniem hydrostatycznego ciśnienia nie wpływa na wytrzymałość tworzyw ciągliwych.

Oddzielną uwagę poświęcono sprawie płaszczyzn poślizgowych względnie płaszczyzn rozdarcia. Nie osiągnięto dotychczas porozumienia co do tego, w jakich warunkach powstaje jeden lub drugi rodzaj zniszczenia. Zdołano jednakże stwierdzić, że naprężenie normalne algebraicznie najmniejsze zawiera z płaszczyzną krytyczną kąt mniejszy aniżeli naprężenie algebraicznie największe. Różnica ta jest tym większa, im większe jest K_C od K_T . Znajomość położenia płaszczyzn poślizgowych ma oczywiście też duże praktyczne znaczenie, np. dla ekspertyz katastrof itp.

Opisywane tu własności materiałów zależą dodatkowo od całego szeregu warunków, którymi szczegółowo zajmują się nauki technologiczne i oddzielne działy nauk konstrukcyjnych. Potraktujemy je tu tylko szkicowo.

Bardzo duży wpływ na własności mechaniczne stali posiada zawartość węgla. Może ona wahać się od 0,1% w stali miękkiej do 1,5% w stali twardej. Ze wzrostem zawartości węgla rośnie granica proporcjonalności i granica wytrzymałości, natomiast zmniejsza się obszar ściśle plastyczny i maleje całkowita wydłużalność. Aby przeto przy zwiększonej wytrzymałości zapewnić stali dostateczną ciągliwość trzeba obok stosownej dużej zawartości węgla stosować dodatkowe środki techniczne. Należy tu w pierwszym rzędzie przeróbka termiczna, do której zaliczamy wyżarzanie, hartowanie, odpuszczenie i patentowanie. Niektóre z tych zabiegów stosowane bywają również i do innych metali. Duże skoki w ich własnościach wytrzymałościowych, uwidocznione w tabeli K_T , wynikają z powyższych zabiegów a ponadto z uszlachetniania stali domieszkami takimi jak nikiel, chrom, mangan itp.

Opisane doświadczenia wykonywać można z różnymi prędkościami. Stwierdzono, że wpływ prędkości uwydatnia się wyraźnie głównie u materiałów wybitnie ciągliwych. Zwiększenie szybkości wzrostu naprężeń powoduje wzrost zarówno wytrzymałości jak i wydłużalności. Różnice te są pomijalne nawet w wypadku, gdy czas wykonania doświadczenia waha się od kilku sekund do kilku godzin. Dla uniknięcia nieporozumień w typowych próbach znormalizowanych określa się przepisami czasowy przyrost naprężenia. Wpływ prędkości uwydatnia się znacznie wyraźniej gdy jednocześnie podwyższymy temperaturę ciała próbnego.

Istnieje wiele ważnych dla konstruktorów doświadczeń nad mechanicznymi własnościami tworzyw podwyższonych a także obniżonych temperaturach. Bada się granicę proporcjonalności, płynności i wytrzymałości a nadto wydłużalność i przewężenie. Różne metale różnie reagują na ten wpływ. Stosujemy w laboratoriach podwyższenie temperatury do 500°C i wyżej, obniżenie zaś do -100°C. U stali własności wytrzymałościowe maleją, ciągliwość zaś wzrasta. U innych meta-

li zdaża się, że z ubytkiem wytrzymałości maleje również ciągliwość. U każdego z metali podać można kres temperatury, do której zmiany w zachowaniu można pominąć. Przebiegi doświadczalne nie wyrażają się zbyt prosto; w każdym wypadku należy zasięgnąć wiadomości w publikacjach szczególnych.

Bardzo wielki wpływ na własności tworzyw ciągliwych posiada obróbka mechaniczna z imna z ewentualnie dołączoną nieznaczną termiczną. Jeśli pręt stalowy rozciągniemy powyżej granicy plastyczności i odciążymy, uzyskamy materiał przepięty. Jeśli bezpośrednio po przepięciu doświadczenie ponowimy, stwierdzimy wybitne obniżenie lub nawet brak granicy proporcjonalności, a zatem krzywolinijny przebieg wykresu σ, ϵ - ponadto jednak równie wyraźne podwyższenie granicy płynności, a to do wartości w przybliżeniu równej wstępnemu naprężeniu. Materiał przepięty przebywa w stanie więcej lub mniej niestępnym, zależnie od zawartości węgla. Stale słabo- lub średniowęgliste po kilkunastominutowym odpoczynku odzyskują częściowo, a po kilkunastodniowym odpoczynku całkowicie własności sprężyste; przyspiesza ten nawrót krótka obróbka termiczna w temperaturze około 100°C. Jednocześnie okazuje się, że dzięki temu długiemu odpoczynkowi materiał utwardza się i wykazuje wyższą granicę płynności od tej, którą by otrzymano po bezpośrednim ponowieniu obciążenia. Można tego rodzaju obróbkę doprowadzić do tego, że wreszcie pręt zostanie rozerwany przy naprężeniu znacznie wyższym od pierwotnej granicy wytrzymałości. Jednocześnie jednak wybitnie zmaleje wydłużalność końcowa. Stale o dużej zawartości węgla jak i stale szlachetne objawiają tego rodzaju zachowanie w małym stopniu. Powyższe zmiany własności metali zyskujemy w trakcie normalnej ich obróbki, to znaczy wtedy, gdy deformujemy je w temperaturze niższej od temperatury wyżarzania. Materiał taki nazywamy zimnoobrobionym. Wyżej podane objawy związane z kolejnym przepięciem i utwardzeniem tracą w dużej mierze swą ważność oczywiście dla materiałów, które uprzednio już doznały zimnej obróbki. Wreszcie dodać należy, że obniżenie granicy proporcjonalności - a równocześnie i płynności - uzyskać można przez nagłe ochłodzenie materiału znajdującego się w temperaturze niższej od krytycznej. Zimno obrabiane metale mają bardzo wszechstronne zastosowanie w technice.

Z czysto mechanicznego punktu widzenia możemy niektóre z opisywanych tu objawów uważać za rezultat obecności w materiale równoważących się sił wewnętrznych. Znając odnośne stany napięć moglibyśmy dołączyć je do stanów rozmyślnie wywoływanych i w ten sposób uwzględnić wyężenie w należytej mierze. Tak niestety nie jest; nie znamy z należytą ścisłością historii powstania materiału, nie znamy owych naprężeń wstępnych.

W ocenie wyężenia tworzyw zdani tedy jesteśmy na błędy. Nie znając należycie prawa wiążącego nie możemy ustawić poprawnej teorii zagadnienia nawet laboratoryjnego.

Ciało próbne sprzęga się z maszyną doświadczalną w jedną całość, w której linie sił wędrują kapryśnie, nie gwarantując jednorodności zjawis-

ka. Niejednorodność materii, jej przypadkowa różnokierunkowość, naprężenia wstępne są dalszymi powodami nieuchronnych błędów lub przybliżeń. Nie można się więc dziwić, że z ulepszeniem materiałów, urządzeń i teorii zagadnienie wyteżenia jest ustawicznie aktualne i posiada tak obszerną historię.

Rozważamy ogólnie kwestię obliczenia wyteżenia. Wyteżenie jest funkcją sześciu składowych stanu napięcia i sześciu składowych stanu odkształcenia. O funkcji tej wystarczy na razie założyć, że przy zerowych wartościach tych dwunastu zmiennych przyjmuje ona również wartość zerową - a ponadto, że przy jednoczesnym tak samo równomiernym wzroście wszystkich lub przynajmniej szóstki zmiennych jednego typu funkcja owa również rośnie. Odnośną funkcję możemy zbudować jednak z sześciu tylko zmiennych, skoro założymy, że istnieje prawo wiążące jedne składowe z drugimi. Zachodzi pytanie, który stan pozostawić, a który wobec tego wyrugować. Rzecz mogłaby być obojętna, gdyby prawo wiążące było jednoznacznie odwracalne. W tym prawdopodobnie milczącym założeniu stale przedstawia się wyteżenie jako funkcję składowych stanu napięcia.

Nie ulega wątpliwości, że w ten sposób od dziesiątków lat popełnia się błąd w obrębie obszaru ściśle plastycznego materiałów ciągliwych. Tam bowiem - jak już wiemy - składowe stanu odkształcenia nie dają się przedstawić jako jednoznaczne funkcje składowych stanu napięcia. W konsekwencji nie zdając sobie z tego sprawy pomieszano dwa różne zagadnienia i utożsamiono warunek plastyczności z funkcją wyteżenia. Gdy wędrujemy na wykresie σ, ϵ przedstawionym na rys. 1.4 lub 3.4, od punktu B do punktu C, stwierdzamy stałość naprężenia; w wypadku trójosiowego stanu napięcia uogólniając powyższy fakt stwierdzono również stałość pewnej funkcji składowych stanu napięcia zgodnie z równaniami (18.3) lub (19.3). Gdy jednakże przesuwamy się od punktu B do punktu C, to przechodzimy zgodnie z umową od mniejszego wyteżenia materiału do większego, bo wprawdzie nie zmienia się naprężenie lecz rośnie odkształcenie; stwierdzamy przeto w tym przedziale zmienność wyteżenia. Skoro jednakże składowe stanu odkształcenia zostały z rachunku wyrugowane, to czego można się spodziewać w tym przedziale od składowych stanu napięcia; oczywiście tylko relacji (18.3) lub ewentualnie (19.3). Godząc ze sobą oba rozumowania musimy wymienionym równaniom przyznać nadal charakter warunku plastyczności oraz uznać, że odnośna funkcja przedstawia wyteżenie dokładnie jedynie w jednym punkcie obszaru ściśle plastycznego, więc najlepiej w punkcie B; w innych miejscach tego obszaru funkcja ta przedstawia wyteżenie w sposób przybliżony. Jeszcze raz wyjaśniamy, że przybliżanie to nie wynika z niedokładności budowy funkcji, lecz z niewystarczalności składowych stanu napięcia jako jej zmiennych. Nie stanowi to żadnej przeszkody dla uczynienia założenia, że dyskutowana funkcja może się ewentualnie nadawać do wyrażania wyteżenia we wszelkich pozostałych miejscach poza cy-

towanym obszarem. W każdym razie jednak znamienne jest, że w świecie naukowym nie zdano sobie dotychczas sprawy z tego stanu rzeczy i nie zastosowano do wyrażenia wyężenia funkcji zbudowanej ze składowych stanu odkształcenia, która wyjaśnionej ułomności nie może w ogóle posiadać; posiadałaby ją, gdyby przy zmiennym naprężeniu możliwe było stałe odkształcenie, czego dotychczas dla żadnego materiału nie skonstatowano.

Niech w pewnym punkcie układu składowe tensora napięcia $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_x, \tau_y, \tau_z$ będą konkretnie danymi liczbami. Ile wynosi wyężenie materiału w tym miejscu? Pytanie to należy rozumieć następująco: K t ó r e m u p u n k t o w i k r z y w e j σ, ϵ j e d n o o s i o w e g o r o z c i ą g a n i a l u b - p r z y i n n e j u m o w i e - ś c i s k a n i a o d p o w i a d a p o w y ż s z y w i e l o o s i o w y s t a n ? C h c e m y z a t e m k a ż d e j s z ó s t c e s k ł a d o w y c h s t a n u s k o m p l i k o w a n e g o p r z y p o r z ą d k o w a ć j a k i e ś s t a d i u m s t a n u p r o s t e g o. J e ś l i w i ę c w y ę ż e n i e s t a n u d o w o l n e g o w y r a ż a f u n k c j a $F(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z; \tau_x, \tau_y, \tau_z)$, t o w y ę ż e n i e s t a n u p o r ó w n a w c z e g o w y r a ż a s z c z e g ó l n ą p o s t a ć t e j f u n k c j i, a m i a n o w i c i e $F(\sigma, 0, 0; 0, 0, 0)$. Z p o r ó w n a n i a o b u w y r a ż e Ń u z y s k a m y r ó w n a n i e, k t ó r e d a j e:

$$\sigma = \varphi(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z; \tau_x, \tau_y, \tau_z). \quad (3.4)$$

Tak wyznaczone σ nazywamy n a p r ę ż e n i e m z a s t ę p c z y m l u b z r e d u k o w a n y m c z y t e ż s p r o w a d z o n y m. Z a m i a r ę p r z e t o w y ę ż e n i a u w a ż a m y t r a d y c y j n i e n a p r ę ż e n i e z a s t ę p c z e g o s t a n u j e d n o o s i o w e g o. O c z y w i ś c i e r ó w n i e d o b r z e m o g l i b y ś m y z a ó w w s k a ź n i k p r z y j ą ć n a p r ę ż e n i e j a k i e g o ś p r o s t e g o s t a n u d w u o s i o w e g o, n p. s k r ę t u l u b t e ż r ó w n i e p r o s t e g o s t a n u t r ó j o s i o w e g o.

Nie jest oczywiście konieczne nadawać równaniu postać szczególnie uporządkowaną (3.4). Istotne w postępowaniu jest to, że funkcję F stanu dowolnego porównujemy z tą funkcją F stanu szczególnego, laboratoryjnie ściśle nam znanego. Funkcja F została - rzecz jasna - też doświadczalnie wykryta, to znaczy jej charakterystyczne parametry ustalono w oparciu przynajmniej o niektóre ważne fakty eksperymentalne. Funkcja F czy też φ przedstawia więc mniej lub więcej śmiałą ekstrapolację faktów zbadanych. W ten sposób równanie (3.4) stanowi matematyczną postać hipotezy wyężenia; w każdym zaś razie niezbyt uzasadnione jest mówić tu o teorii wyężenia.

Położmy w równaniu (3.4) w miejsce σ wartość krytyczną jednoosiowego rozciągania, więc K_r lub κ_r lub też K_r - o ile oczywiście funkcja F względnie φ ma tak obszerny zasięg. Odnosne równanie, np.:

$$\varphi(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z; \tau_x, \tau_y, \tau_z) = K_r \quad (4.4)$$

przedstawia powierzchnię wyężenia na granicy wytrzymałości. Punktom położonym wewnątrz tej powierzchni przynależą wyężenia mniejsze, więc wię-

dzy innymi też wyteżenia na granicy plastyczności lub jeszcze mniejsze, np. na granicy sprężystości.

Często przyjmujemy, że natura wyteżenia jest tego rodzaju, iż powierzchnie stanów krytycznych niższych znachodzimy, przyporządkowując t e j s a m e j funkcji φ w równaniu (4.4) w miejsce K_r odnośną wielkość niższą, więc k_r dla wyteżenia na granicy płynności względnie K_r dla wyteżania na granicy sprężystości. Jasne jest, że w miejsce szóstki składowych dowolnych użyć możemy trzech składowych głównych $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Ten sposób postępowania nadaje się szczególnie do przedstawienia powierzchni φ , bowiem użyć wtedy można jako układu odniesienia właśnie prostokątnego układu osi $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

O należytej budowie funkcji φ można się przekonać przez stwierdzenie czy czyni ona zadość wszelkim znanym faktom doświadczalnym. Zatem typowe stany proste $\sigma_x = K_r, \sigma_y = \sigma_z = \sigma_x = \tau_y = \tau_z = 0$ lub też $\sigma_x = -K_c, \sigma_y = \sigma_z = \tau_x = \tau_y = \tau_z = 0$ muszą spełniać równanie (4.4) identycznie. To samo dotyczy wszelkich innych. Daje to oczywiście możliwość wyznaczenia z równania (4.4) też parametrów stanów krytycznych nieznanych. Przypuścmy, że taki jest stan zwany skrętem, więc $\sigma_x = K_s, \sigma_y = -K_s, \sigma_z = \tau_x = \tau_y = \tau_z = 0$; wstawiszmy takie składowe możemy z (4.4) wyznaczyć poszukiwaną wartość K_s .

W trzech zacytowanych przykładach wzięliśmy pod uwagę stany określone składowymi głównymi. Możemy te same stany określać składowymi przekształconymi. Równanie (4.4) powinno wytrzymać i tę próbę równie dobrze jak poprzednią. Jeśli więc skręt zdefiniujemy składowymi $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_x = \tau_y = 0, \tau_z = K_s$, to z równania (4.4) otrzymamy dla K_s wartość zgodną z poprzednio uzyskaną. Analogicznie, możemy korzystając z równania (4.4) obliczyć wartości krytyczne składowych wszelkich innych aktualnych stanów napięć.

Podamy kilka znanych z literatury postaci równania (4.4), tych mianowicie, które można - według obecnego stanu naszych wiadomości - uznać za wystarczająco dokładne.

Coulombowi (1776) przypisuje się przypuszczenie, że poślizg względnie rozdarcie występuje wskutek pokonania spójności i tarcia wewnętrznego. Wielu autorów późniejszych wykorzystało tę myśl, usiłując hipotezom wyteżenia nadać pozory teorii.

Pomijając tarcie wewnętrzne dochodzi się według powyższej idei do przekonania, że poślizg następuje w płaszczyźnie największego naprężenia stycznego wskutek tego, że naprężenie to osiąga krytyczną wartość, stałą dla wszystkich stanów napięcia. Wynika stąd, że dla wyteżenia na granicy plastyczności h i p o t e z a k r a ń c o w e g o n a p r ęż e n i a s t y c z n e g o ma postać:

$$\sigma_{\max} - \sigma_{\min} = k \quad (5.4)$$

Wiadomo nam jest, że σ_{\max} i σ_{\min} są naprężeniami głównymi. Cechą charakterystyczną tej hipotezy jest brak trzeciego naprężenia głównego o wartości średniej σ_{med} . Widoczne jest, że hipoteza (5.4) odnosi się tylko do materiałów ciągliwych; kładąc bowiem czy to: $\sigma_{\max} = k_r$, $\sigma_{\text{med}} = \sigma_{\min} = 0$, czy też: $\sigma_{\max} = \sigma_{\text{med}} = 0$, $\sigma_{\min} = -k_c$ znajdziemy $k_r = k$ tudzież $k_c = k$, czyli $k_r = k_c = k$, co według (1.4) stanowi cechę tych tworzyw. Płaszczyzny poślizgu są równoległe do kierunku średniego naprężenia głównego i położą kąt między pozostałymi naprężeniami głównymi. Hipotezie powyższej patronowali Treska, Darwin, Guest, a de Saint Venant używał jej jako warunku plastyczności (19.3). Jeśli w miejsce k wpisze- my w równaniu (5.4) wielkość σ , otrzymamy formułę na naprężenie zastępcze (3.4).

Zadanie 3.4. Wyznaczyć według (5.4) granicę plastyczności skrętu.

Odpowiedź 3.4. Kładąc $\sigma_{\max} = k_s$, $\sigma_{\text{med}} = 0$, $\sigma_{\min} = -k_s$ znajdziemy $k_s = 0,5 k$.

Duguet, Perry, Navier i inni uwzględniając w idei Coulomba również tar- cie przyjmują, że wyężenie krytyczne osiąga się, gdy wyrażenie $\tau + f\sigma$ staje się równe spójności materiału q . Tutaj $f = \text{tg } \beta$ oznacza współczyn- nik tarcia wewnętrznego, dla którego zakłada się wartość stałą, jakkol- wiew pewne fakty doświadczalne każą przypuszczać, że prawidłowiej byłoby założyć dlań wartość zmienną zależną prawdopodobnie od składowych stanu napięcia.

W równaniu tak powstałym:

$$\tau + f\sigma = q \tag{6.4}$$

σ , τ oznaczają wobec powyższego naprężenia tej orientacji n , dla któ- rej wyrażenie: $\tau + f\sigma$ staje się analitycznym maximum. Dziś wiemy już, że Coulombowska teoria tarcia stanowi często zawodne przybliżenie rzeczy- wistości doświadczalnej. Musimy jednak obiektywnie przyznać, że w historii wyężenia powyższa koncepcja jest najpiękniejsza z dotychczas nam zna- nych, nawet i spośród tych, które dogadzają lepiej faktom doświadczalnym. Jest to właściwie jedyna próba t e o r e t y c z n e g o ujęcia tego problemu.

Interesujące obliczenie ekstremum lewej strony równania (6.4) prowadzi do wniosku, że normalna odnośnej płaszczyzny poślizgowej zawiera z kie- runkami głównymi 1, 2, 3 kąty o wartościach bezwzględnych:

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}, \quad \alpha_2 = \frac{\pi}{2}, \quad \alpha_3 = \frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2},$$

przy czym - co należy pamiętać - naprężenia główne uporządkowano nierów- nością $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$. Dzięki niebanalnemu zbiegowi okoliczności mate- matycznych kierunek naprężenia średniego σ_2 nabrał przeto uprzywilejo-

wanego lub - jak inni mówią - upośledzonego znaczenia. Symetrycznie względem pozostałych kierunków głównych ułożone dwie płaszczyzny poślizgowe przechodzą przez oś naprężenia średniego. Wartości α_1, α_3 pouczają, że kąt ostry $\frac{\pi}{2} - \beta$ między tymi symetrycznie ułożonymi płaszczyznami jest przepołożony kierunkiem naprężenia najmniejszego σ_3 , kąt rozwarty $\frac{\pi}{2} + \beta$ jest przepołożony kierunkiem największego naprężenia σ_1 . Są to fakty jakościowo zgodne z wynikami olbrzymiej ilości badań tak dawniejszych jak i najnowszych.

Kładąc zgodnie z powyższym:

$$n_1^2 = \cos^2 \alpha_1 = \frac{1 + \sin \beta}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{f}{\sqrt{1 + f^2}},$$

$$n_2^2 = \cos^2 \alpha_2 = 0,$$

$$n_3^2 = \cos^2 \alpha_3 = \frac{1 - \sin \beta}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{f}{\sqrt{1 + f^2}},$$

znajdziemy wartości naprężeń płaszczyzny poślizgowej według formuł (17.2):

$$\sigma = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) + \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) \frac{f}{\sqrt{1 + f^2}},$$

$$\tau = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) \frac{1}{\sqrt{1 + f^2}},$$

i w rezultacie dla równania (6.4) nową postać matematyczną:

$$\frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3)f + \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) \sqrt{1 + f^2} = q,$$

lub

$$(\sigma_1 + \sigma_3)\sin\beta + (\sigma_1 - \sigma_3) = 2q \cos\beta.$$

Spójność q i współczynnik tarcia $f = \operatorname{tg} \beta$ możemy tu wyrugować wprowadzając dwa inne fakty doświadczalne łatwiej pomierzalne np. K_r i K_c czyli stany $\sigma_1 = K_r$, $\sigma_3 = 0$ tudzież $\sigma_1 = 0$, $\sigma_3 = -K_c$. Wstawiając te daty znajdziemy: $\sin\beta = \frac{K_c - K_r}{K_c + K_r}$, $q \cos\beta = \frac{K_c K_r}{K_c + K_r}$, czyli ostatecznie:

$$K_c \sigma_1 - K_r \sigma_3 = K_c K_r. \quad (7.4)$$

Zadanie 4.4. Wyznaczyć na podstawie (7.4) naprężenie spowodowane do jednoosiowego rozciągania σ_r lub do jednoosiowego ściskania σ_c .

Odpowiedź 4.4. Należy podzielić (7.4) przez K_c względnie K_r i na prawej stronie w miejsce K_r względnie K_c wpisać σ_r lub $-\sigma_c$.

Otrzymamy: $\sigma_r = \sigma_1 - \frac{K_r}{K_c} \sigma_3$ względnie $\sigma_c = \sigma_3 - \frac{K_c}{K_r} \sigma_1$.

Zadanie 5.4. Ile wynosi według teorii (7.4) wytrzymałość na ścinanie K_s ?

Odpowiedź 5.4. Należy położyć $\sigma_1 = -\sigma_3 = K_s$; otrzymamy $K_s = \frac{K_c K_r}{K_c + K_r}$.

W prostokątnym układzie osi $\sigma_1 \tau$ równanie (6.4) przedstawia linię prostą nachyloną względem ujemnego kierunku osi pod kątem $\beta = \arctg f$.

Już Duguet wspomniał o tym, że prawdopodobnie wskazane jest uważać współczynnik tarcia wewnętrznego f za zmienny. Wybitny uczoney niemiecki O. Mohr, nie teoretyzując sprawy na wzór Dugueta, doszedł do owej ogólniejszej postaci hipotezy, przyjmując a priori niezależność wyężenia od wartości średniego naprężenia głównego σ_2 . Przyjął on mianowicie, że związek między naprężeniami σ, τ płaszczyzny poślizgowej najprościej ustalić wykreślnie, kreśląc dla każdego stanu krytycznego z kompletu trzech kół napięciowych tyłko koło największe, tj. to o odciętej średnicy $\sigma_0 = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$ i promieniu $\tau_0 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$. Mohr wyraził przekonanie, że koła te posiadają obwiednią, która właśnie jest ilustracją jego hipotezy wyężeniowej. Dowolny punkt (σ, τ) tej obwiedniej ma z przynależnym kołem wielkim w miejscu styczności wspólne współrzędne σ i τ , które są wartościami naprężeń płaszczyzny poślizgowej względnie płaszczyzny rozdarcia. Kąt β zawarty między styczną w tym punkcie i ujemnym kierunkiem osi σ zatrzymuje u Mohra to samo znaczenie co u Dugueta. W ten więc sposób współczynnik Duguetta f jest tu zmienny i zależny od σ . Hipotezę Mohra przedstawia jego zdaniem krzywa zwrócona słabą wklęsłością ku osi σ . Na temat szczegółów tej krzywej w okolicy jej przecięcia się z osią σ Mohr i poważni dawniejsi komentatorzy jego hipotezy, jak np. A. Föppl, podali szereg jaskrawych niedorzeczności. W publikacjach nowszych dyskretnie urywa się dość wcześnie krzywą. Odnosi się przekonanie, że nowsi zwolennicy tej teorii jednak boją się tego szczególnego miejsca i wolą o nim nie mówić.

Teorię Dugueta - Mohra można zgodnie z jej wspólnym u obu autorów sensem nazwać hipotezą naprężeń poślizgowych. Układ σ, τ nie jest - czego w literaturze przedmiotu nie zauważono - stosowny do jej przedstawienia. U Dugueta równanie (6.4) stanowi wprawdzie punkt wyjścia jego teorii, jednak rozwinięcie matematyczne prowadzi w rezultacie do użycia naprężeń skrajnych σ_1 i σ_3 lub - co na jedno wychodzi - σ_0 i τ_0 . Teorię Mohra bezkrytycznie przedstawia się stale

jako obwiednię wielkich kół. Tymczasem układem znacznie prostszym do przedstawienia hipotezy naprężeń poślizgowych jest układ σ_0, τ_0 ; prościej jest bowiem w tym układzie naznaczyć punkt (σ_0, τ_0) aniżeli w układzie σ, τ koło σ_0, τ_0 . Ba, okazało się, że w układzie σ, τ istnieje pewien zbiór wielkich kół, który nie posiada obwiedniej, mimo tego, że przedstawiają one doświadczalnie stwierdzone stany krytyczne. Tej niestosowności nie kryje w sobie układ σ_0, τ_0 . Drobną niewygodę kryje w sobie jedynie fakt że kąt β musi być tu dodatkowo wyznaczony z relacji $\sin \beta = \operatorname{tg} \beta_0$, gdzie β_0 jest ujemnym nachyleniem krzywej σ_0, τ_0 . Hipotezę naprężeń poślizgowych przedstawia ostatecznie równanie $\tau_0 = f(\sigma_0)$. Jego szczególną liniową postać podaje równanie (7.4).

Zadanie 6.4. Wykazać równość $\sin \beta = \operatorname{tg} \beta_0$ dla ilustracji hipotezy Duguetta - Mohra w układach σ, τ i σ_0, τ_0 .

Odpowiedź 6.4. Nachylenie stycznej dowolnego koła wielkiego $(\sigma - \sigma_0)^2 + \tau^2 = \tau_0^2$ wynosi $\frac{d\tau}{d\sigma} = -\frac{\sigma - \sigma_0}{\tau}$. Styczna ta jest jednocześnie styczną obwiedniej, gdy $\frac{d\tau_0}{d\sigma_0} = -\frac{\sigma_0 - \sigma_0}{\tau_0}$. Te trzy związki dają między innymi:

$$\frac{d\tau_0}{d\sigma_0} = \frac{\frac{d\tau}{d\sigma}}{\sqrt{1 + \left(\frac{d\tau}{d\sigma}\right)^2}} \quad \text{czyli} \quad \operatorname{tg} \beta_0 = \sin \beta.$$

Z ostatniej relacji wynika, że przedstawianie σ_0, τ_0 jest obszerniejsze aniżeli σ, τ . Obwiednia istnieje tylko dla tych kół σ_0, τ_0 , które przedstawia część krzywej σ_0, τ_0 o nachyleniu $\operatorname{tg} \beta_0 \leq 1$. Odwzorowanie krzywej σ_0, τ_0 z obszaru $\operatorname{tg} \beta_0 > 1$ w obwiednię σ, τ jest niemożliwe, bo niemożliwe jest $\sin \beta > 1$. Należy przypuszczać, że istniejąca obwiednia dotyczy wypadków poślizgu, część nieistniejąca zaś przynależy wypadkom rozdarcia.

Modyfikację ostatniej teorii przedstawia hipoteza zmiennego naprężenia stycznego w przedstawieniu Sandela. Uzależnia on mianowicie skos maksymalny γ od zmiany objętościowej e i wyraża je składowymi stanu napięcia, stosując prawo Hooke'a. W rezultacie efekt jest taki, jak gdyby przy niezminionej jednej zmiennej τ_0 w miejsce drugiej zmiennej $\sigma_0 = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$ weszła inna symetrycznie zawierająca wszystkie trzy naprężenia, a to: $\sigma_* = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$. Według tego przypuszczenia w stanach krytycznych zachodzi zależność $\tau_0 = \varphi(\sigma_*)$. Wystarczyło od razu podać takie przypuszczenie zamiast zaczynać od γ, e i zbudowania prawem Hooke'a, które w obszarach krytycznych nie istnieje.

Podane tu trzy hipotezy można zebrać razem w równania:

$$\tau_0 = \text{const.}, \quad \tau_0 = f(\sigma_0), \quad \tau_0 = \varphi(\sigma_*), \quad (8.4)$$

$$\tau_o = \frac{1}{2}(\sigma_{max} - \sigma_{min}), \quad \sigma_o = \frac{1}{2}(\sigma_{max} + \sigma_{min}), \quad (8.4)$$

$$\sigma_* = \frac{1}{3} s = \frac{1}{3}(\sigma_{max} + \sigma_{med} + \sigma_{min}).$$

Zadanie 7.4. Załozyszmy liniową budowę hipotezy zmiennego naprężenia stycznego podać jej postać dla wytężenia na granicy wytrzymałości.

Odpowiedź 7.4. Przyjmujemy, że hipoteza czyni zadość faktom doświadczalnym uzyskanym z jednoosiowego rozciągania tudzież ściskania, tj. $\sigma_x = \frac{K_r}{3}$, $\tau_o = \frac{K_r}{2}$ oraz $\sigma_* = -\frac{K_c}{3}$, $\tau_o = \frac{K_c}{2}$. Wypisując równanie prostej przez powyższe dwa punkty otrzymamy równanie: $2(K_c + K_r)\tau_o + 3(K_c - K_r)\sigma_* = 2K_c K_r$ lub kładąc $\sigma_{max} = \sigma_1$, $\sigma_{med} = \sigma_2$, $\sigma_{min} = \sigma_3$ równanie:

$$K_c \sigma_1 + \frac{K_c - K_r}{2} \sigma_2 - K_r \sigma_3 = K_c K_r, \quad (9.4)$$

różniące się dodajnikiem środkowym lewej strony od (7.4).

Zadanie 8.4. Ile wynosi wytrzymałość K_{rrr} trójosiowego równomiernego rozciągania według trzech dotychczas przedstawionych zapatrywań?

Odpowiedź 8.4. Należy w równania (5.4), (7.4), (9.4) położyć $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = K_{rrr}$. Znajdziemy kolejno:

$$K_{rrr} = \infty, \quad K_{rrr} = \frac{K_c K_r}{K_c - K_r}, \quad K_{rrr} = \frac{2}{3} \frac{K_c K_r}{K_c - K_r}.$$

Rezultat pierwszy jest przyczyną drażliwego kłopotu dla teorii (5.4). Zważmy, że według odnosnego zastrzeżenia ważna jest ona głównie w obszarach plastycznych, bo cięży na niej sprawdzian $k_r = k_c = k$, nie istniejący w tej postaci na granicy wytrzymałości materiałów ciągliwych. Jednak równie kłopotliwy jest rezultat $k_{rrr} = \infty$. Możemy go zanegować tylko w jeden właściwy sposób; oto teoria (5.4) jest ważna w ograniczonym na razie nieznanym nam obszarze. Natomiast analogiczny rezultat $k_{ccc} = -\infty$ dla wszechstronnego równomiernego ściskania ocenia się za pomyślny dla tej teorii.

Włoski uczoney Beltrami (1885), polski - Huber (1904) i angielski - Haigh (1900) przypuszczili, że miarę wytężenia stanowi całkowita energia sprężystości W_o . Już wtedy dostrzegł Huber, że takie przyjęcie gubi powszechnie uznany rezultat nieograniczonej ujemnie wartości naprężeń dla wszechstronnego równomiernego ściskania dla wytężenia czy to na granicy sprężystości czy wytrzymałości, co daje szansę prawdopodobieństwa użycia dla tego rodzaju stanów tylko postaciowej części energii W_o'' . O zastosowaniu hipotezy do wytężenia na granicy płynności w dzisiejszym znaczeniu autorzy nie wspominają. Biegiem cza-

su (1919) Huber precyzuje swe stanowisko, proponując użyć jako miary wy-
tężenia do zmiany całkowitej energii w wypadku $s \cong 0$ oraz w wypadku $s \leq 0$
jedynie jej części postaciowej (według Föppla - 1920). Niemiecki badacz
Mises (1913), korygując wykreślną ilustrację warunku plastyczności (19.3),
doradza z uwagi na korzyści matematyczne zastąpić go warunkiem plasty-
czności (18.3). Przekonany jest przy tym, że (18.3) stanowić będzie przy-
bliżenie równania (19.3), które uważa wówczas za ściśle - odwrotnie ani-
żeli się to głosi według dzisiejszego stanu wiedzy. Propozycja Misesa
skreśla zatem ograniczenie Hubera $s \cong 0$ i pozostawia w grze jedynie
energię odkształcenia postaciowego, przy tym, odmiennie aniżeli poprzedni
autorzy, Mises ma na myśli zastosowanie swego uproszczenia do granicy pla-
styczności. Wreszcie holenderski uczony Hencky (1924) bez żadnych ograni-
czeń, zastrzeżeń i dopisków ustala równanie (18.3), czyli:

$$(\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 6(\tau_x^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2) = 2k^2 \quad (10.4)$$

jako warunek plastyczności. Na I Międzynarodowym Kongresie Mechaniki w Delft
przy dyskusji powyższego równania Huber zgłasza doń priorytet autorski z
roku 1904.

Powyższy szkic historyczny wyjaśnia, jakimi niepewnymi drogami ustala
się niekiedy w nauce tzw. prawa autorskie. Jeden autor mówi o teorii pla-
styczności, drugi rozumie, że mowa o wytężaniu. Wykazaliśmy już, jaka w
tym tkwi różnica. Jeden ogranicza zakres ważności, drugi go skreśla, je-
den mówi o wytrzymałości, drugi o plastyczności, trzeci o sprężystości.
Jeden sądzi, że przybliżeniem jest coś, co dla drugiego jest ścisłością -
i na odwrót. Jeden jest wcześniejszy, drugi późniejszy. Powyższe nieporo-
zumienia tkwią do dziś w literaturze. W rezultacie równanie (10.4) nazywa-
ją równaniem Hubera - Misesa - Hencky'ego. Jedni nazywają je - o czym by-
ła mowa - warunkiem plastyczności, drudzy hipotezą wytężenia.

Jakkolwiek stosowanie terminu energii nie ma znaczenia powyżej matema-
tycznej granicy sprężystości, będziemy równanie (10.4) w tym ustępie na-
zywać h i p o t e z ą e n e r g i i o d k s z t ą ł c e n i a p o s t a c i o w e g o .
Hipoteza ta odnosi się do materiałów ciągliwych. tkwi w niej bowiem - jak łatwo sprawdzić - warunek $k_r = k_c = k$. Wstawia-
jąc w miejsce k wielkość σ otrzymamy naprężenie zastępcze σ jedno-
osiowego stanu napięcia. Jak daleko powyżej granicy plastyczności może
być σ , w powyższej formie uważane za naprężenie zastępcze, nie jest do-
tychczas wiadome; w każdym razie nie na granicy wytrzymałości, ponieważ
tam $K_c \neq K_r$.

Zadanie 9.4. Wyznaczyć granicę plastyczności skrętu definiując go w dwa
sposoby w równaniu (10.4).

Odpowiedź 9.4. Możemy położyć dla kierunków głównych dla jednego z na-
prężeń normalnych wartość k_s , dla drugiego - k_s a wartość zerową dla po-

zostałych czterech naprężeniach. Możemy też dla jednego z naprężeń stycznych w przekrojach odchylonych o $\pi/4$ względem poprzednich podstawić k_s , a dla pięciu pozostałych naprężeń wartość zerową. Zawsze znajdziemy $k_s = \frac{k}{\sqrt{3}} = 0,577$.

Istnieją dane doświadczalne upoważniające do przyjęcia, że ze zwiększeniem wyciężenia równokierunkowość materiału nawet mimo tworzących się w sposób ciągły poślizgów jest nadal utrwalona; gubi się ona dopiero wtedy, gdy w materiale pojawiają się włóskowate rysy. Oczywiście w takich warunkach należy przyjąć (Beryński 1928), że wyciężenie materiału w równokierunkowych zależy, w ten sam matematycznie sposób, od każdej z trzech wielkości głównych, czyli - jeszcze ogólniej - od trzech niezmienników stanu odkształcenia lub napięcia. Powyższa opinia nie jest przypuszczeniem, lecz jest ścisłym twierdzeniem, nie wymagającym zresztą dowodu. Hipotezą natomiast jest przyjęcie, że trzeci z tych niezmienników nie odgrywa w obliczeniu wyciężenia żadnej roli. Jeśli jedno składowe daje się wyrazić drugimi i na odwrót, użyć możemy niezmienników jednego stanu np. napięcia, tj. σ_* . Praktycznie użyć jest ich w postaci: $\sigma_* = \frac{\sigma}{3}$ i $\tau_* = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{s^2 - 3\sigma}$. Wiadomo nam jest z zadania (10.2), że σ_* , τ_* przedstawiają naprężenia orientacji obojętnej z uwagi na kierunki główne, bo równo względem każdego z nich nachylonej. Jeśli przeto w ogóle ma sens oznaczanie wyciężenia przy pomocy naprężeń jakiejś orientacji, to dla materiału równokierunkowego może być mowa tylko o naprężeniach σ_* , τ_* . Wyrażenia σ_*^2 i τ_*^2 są proporcjonalne - jak wiadomo - względem energii odkształcenia obojętńskiego i postaciowego; możemy przeto nową hipotezę wysłowić przy użyciu tych terminów, jeśli mają one w ogóle tego rodzaju sens powyżej granicy sprężystości. Wreszcie powierzchnia trzech kół napięciowych jest proporcjonalna względem τ_*^2 , a za uogólnioną odciętą kompletu kół można uważać σ_* ; w ten sposób znajdujemy dodatkowy sposób wyrażenia hipotezy niezmienników. Jej ogólną postać określa równanie:

$$\tau_* = f(\sigma_*),$$

$$\sigma_* = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z), \quad (11.4)$$

$$\tau_*^2 = \frac{1}{9}((\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 6(\tau_x^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2)),$$

którego szczególnym wypadkiem $\tau_* = \frac{\sqrt{2}}{3} k$ jest hipoteza (10.4).

Dla uzupełnienia trzeba tu dodać, że analogicznie ogólną hipotezę usiłował ustawić Schleicher (1926) zakładając, że naprężenie zastępcze po-

staci $\sqrt{2EW_0}$, gdzie W_0 oznacza całkowitą energię sprężystości, jest funkcją zmiennej σ_* . Był niedaleki prawdy. Na takim przyjęciu pomógł się fakt, iż $\sqrt{2EW_0}$ zależy od ułamka Poissona μ ; konfrontacja tej hipotezy z pewną serią doświadczeń nad betonem wymagała przyjęcia dla μ wartości kilkakrotnie większych od 0,5, co przeczy znanemu ograniczeniu $\mu < 0,5$. Zaszedł tu fakt często powtarzający się w historii literatury wyteżenia; regulowanie funkcji określających wyteżenie stałymi sprężystości wywiera fatalny rezultat dla odnośnej hipotezy. Z tego to powodu Schleicher (1928) zarzucił tę formę swej teorii, ustawiając nową pod nazwą odmiennej postaci starej. Nowa forma, zgodna z (11.4), nie posiada już dawnych błędów.

Zadanie 10.4. Doświadczenia z żeliwem wykazały liniową postać hipotezy niezmienników; wyznaczyć na tej podstawie wytrzymałość skrętu w zależności od wytrzymałości rozciągania K_R i ściskania $K_C = 4 K_R$.

Odpowiedź 10.4. Według określeń (11.4) dysponujemy dwoma punktami szukaney prostej, tj. $\sigma_* = \frac{K_R}{3}$, $\tau_* = \frac{K_R\sqrt{2}}{3}$ i $\sigma_* = -\frac{K_C}{3}$, $\tau_* = \frac{K_C\sqrt{2}}{3}$, skąd jej równanie: $3(K_C + K_R)\tau_* + 3\sqrt{2}(K_C - K_R)\sigma_* = 2\sqrt{2}K_CK_R$. Podstawiając w to równanie współrzędne skrętu krytycznego $\sigma_* = 0$, $\tau_* = \frac{K_S\sqrt{6}}{3}$ znajdziemy $K_S = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{K_C K_R}{K_C + K_R} = 0,924 K_R$.

Zadanie 11.4. Ile wynosi naprężenie zastępcze w poprzednim zadaniu?

Odpowiedź 11.4. Przy zamianie na jednoosiowe rozciąganie jest:

$$\sigma_r = \frac{3}{2\sqrt{2}}\left(1 + \frac{K_R}{K_C}\right)\tau_* + \frac{3}{2}\left(1 - \frac{K_R}{K_C}\right)\sigma_* = 1,326\tau_* + 1,125\sigma_*.$$

Przy redukcji do jednoosiowego ściskania jest:

$$\sigma = -\frac{3}{2\sqrt{2}}\left(\frac{K_C}{K_R} + 1\right)\tau_* - \frac{3}{2}\left(\frac{K_C}{K_R} - 1\right)\sigma_* = -5,303\tau_* - 4,500\sigma_*.$$

Podaliśmy tu tylko te hipotezy, które wytrzymują krytykę nowoczesnych badań. Teorie (10.4) i (11.4) są dokładniejsze i lepiej uzasadnione aniżeli teorie (8.4). Równanie $\tau_0 = \text{const}_0$ jest szczególnym wypadkiem funkcji $\tau_0 = f(\sigma_0)$ i $\tau_0 = \varphi(\sigma_*)$; równanie $\tau_* = \text{const}_*$ jest szczególnym wypadkiem funkcji $\tau_* = F(\sigma_*)$. Istnieją stany, dla których $\tau_0 = \text{const}_0$ i $\tau_* = \text{const}_*$ nie różnią się w ogóle między sobą; odchyłka największa nie dochodzi do 12%. Najlepiej rzecz wyjaśnimy, jeśli zauważymy, że w układzie $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ pierwsza z powyższych hipotez przedstawia powierzchnię umiarowego graniastosłupa sześciościennego, a druga powierzchnię walca kołowego opisanego na tymże graniastosłupie; obie powierzchnie mają wspólną oś $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$.

Z powyższego wyniku, że powierzchnia druga jest obszerniejsza, czyli odnośna hipoteza ekonomiczniejsza. Powierzchnia pierwsza jest przeto ciałniejsza, a odnośna hipoteza bezpieczniejsza. Średnia odchyłka 6%-owa jest w wielu wypadkach dopuszczalna. Funkcja $\tau_o = \varphi(\sigma_*)$ jest dość dobrym przybliżeniem funkcji $\tau_* = F(\sigma_*)$. Druga jest powierzchnią obrotową. Pierwsza posiada sześć krzywych lub prostych krawędzi ułożonych symetrycznie względem osi $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ tej poprzedniej, między którymi rozpięte są przystające płaty powierzchni krytycznej. Przekroje normalne do osi tej powierzchni są niezależnie od typu funkcji φ foremnymi sześciobokami o bokach prostolinijnych. Sześcioboki te na ogół przecinają się z kołowymi przekrojami powierzchni F .

Niektóre sześcioboki mają położenie szczególne; tak np. sześciobok, któremu przynależy stan K_r i K_c są wpisane w odnośne koła, sześciobok stanu K_s jest opisany na odnośnym kole. Stwierdzono, że krzywa $\tau_* = F(\sigma_*)$ jest o wiele słabiej zakrzywiona aniżeli krzywe $\tau_o = f(\sigma_o)$ i $\tau_o = \varphi(\sigma_*)$; również grubość smugi doświadczalnej F jest znacznie mniejsza aniżeli smug f i φ .

Oryginalność teorii poślizgowej $\tau_o = f(\sigma_o)$ uwydatnia się - między innymi - w kształcie przedstawiającej ją powierzchni. Przekrój tej powierzchni jest sześciobokiem nieforemny, ułożonym z sześciu łuków lub też prostych; przeciwległe wierzchołki tego sześcioboku mają jednak różne oddalenia od osi $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ powierzchni, tak że sześciobok nie ma sześciu lecz trzy osie symetrii. Wskutek takiej postaci powierzchni rozdzwięk jej czy to z powierzchnią $\tau_o = \varphi(\sigma_*)$, czy też $\tau_* = F(\sigma_x)$ jest dość silny.

Można przypuszczać, że teoria $\tau_o = f(\sigma_o)$ może mieć znaczenie w tych wypadkach, w których materiał zatracił dzięki znacznemu wytężeniu go swą pierwotną równokierunkowość. Będzie tak ewentualnie na granicy wytrzymałości, a mianowicie wtedy, gdy umówimy się uważać za nią nie ten stan, w którym pojawiły się pierwsze włoskowate pęknięcia, lecz ten, w którym zniweczona została całkowicie nośność układu.

Teoria poślizgowa $\tau_o = f(\sigma_o)$ ma jednakże tę wyższość nad innymi, iż ustala położenie płaszczyzn poślizgu względnie rozdarcia, co w pewnych wypadkach ma duże znaczenie. Dla teorii $\tau_* = \text{const}_*$ przyjmuje się dla płaszczyzn poślizgu położenie $n_1^2 = n_2^2 = n_3^2 = 1/3$. Dla teorii $\tau_* = F(\sigma_x)$ uczyniono już wprawdzie (Burzyński - 1929) próbę ustalenia tych płaszczyzn, jednakże wymaga ona jeszcze dodatkowych obserwacji doświadczalnych.

Używalność przedstawionych hipotez gra oczywiście również dużą rolę. Gdy dysponujemy naprężeniami głównymi i gdy udało się je uporządkować np. nierównością $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ użycie każdej z hipotez nie nastręcza trudności. Hipotezy stosujące współrzędną τ_o są w tym wypadku w y g o d n i e j s z e aniżeli te ze współrzędną τ_* , co jasne jest z uwagi na różnicę budowy matematycznej tych wielkości. Gdy jednak stan napięcia określony jest sześciu składowymi dowolnymi $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_x, \tau_y, \tau_z$ hypo-

tezy niezmiennikowe są możliwe do natychmiastowego użycia. Dla pozostałych należy wpierv dokonać czynności wyznaczenia i uporządkowania naprężeń głównych, co w wypadku liczb szczegółowych nastęrcza dużo kłopotu, a w wypadku liczb ogólnych jest w ogóle niemożliwe do przeprowadzenia. W ten więc sposób hipotezy niezmiennikowe stanowią tu j e d y n y środek rachunkowy.

Zadanie 12.4. Jaką postać przyjmie hipoteza krańcowego naprężenia stycznego dla dwuosiowego stanu napięcia określonego składowymi dowolnych kierunków x, y, z ?

Odpowiedź 12.4. Składowe dowolne czynią według założenia zadość warunkowi $s'' = 0$. Składowe główne według zadania 6.2 wynoszą:

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) + \frac{1}{2}\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2(\sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x + \sigma_x\sigma_y) + 4(\tau_x^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2)}$$

nadto - zgodnie z tematem - 0. Te trzy naprężenia główne należy uporządkować według wielkości, czego dokonano w zadaniu 6.2, po czym należy utworzyć równanie $\sigma_{\max} - \sigma_{\min} = k$. Widzimy, że rozróżnić trzeba trzy ewentualności. Dla $s' \geq 0, s < 0$ jest $-\sigma_2 = k$, dla $s' \geq 0, s > 0$ jest $\sigma_1 = k$, wreszcie dla $s' < 0, s \geq 0$ jest $\sigma_1 - \sigma_2 = k$.

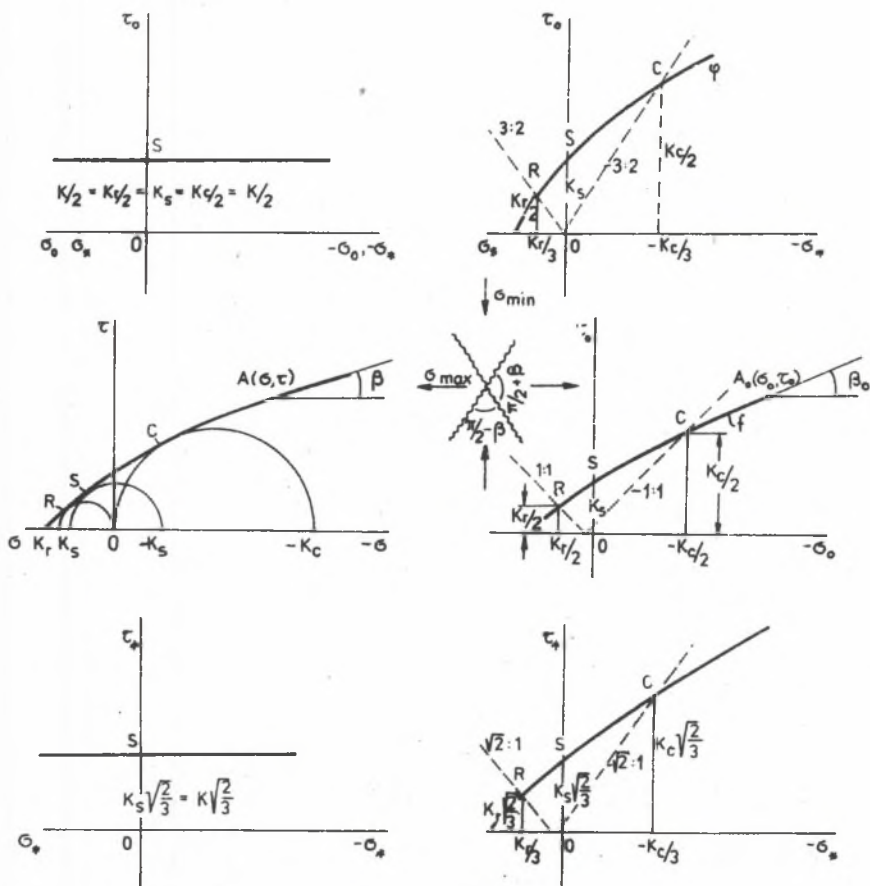
Wprowadzając znak bezwzględnej wartości dla s możemy powyższe ująć w dwie ewentualności: Dla $s' \geq 0$ jest:

$$\frac{1}{2} \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2(\sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x + \sigma_x\sigma_y) + 4(\tau_x^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2)} = k$$

dla $s' < 0$ jest

$$\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2(\sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x + \sigma_x\sigma_y) + 4(\tau_x^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2)} = k$$

Rys. 5.4 przedstawia omówione hipotezy. Punkty R, C, S są obrazami stanów krytycznych w jednoosiowym rozciąganiu, ściskaniu i skręcie. Przy danej krzywej wyężenia znajdujemy te punkty kreśląc z początku układu aktualnych współrzędnych odpowiednio nachylone promienie. Nachylenie to wynika z definicji odnośnego stanu napięcia i stosunku przynależnych im aktualnych współrzędnych, więc $\tau_0/\sigma_0, \tau_0/\sigma_*$ czy wreszcie τ_*/σ_* . Górna część rysunku przedstawia teorię krańcowego naprężenia stycznego $\tau_0 = \text{const}_0$ i hipotezę zmiennego naprężenia stycznego $\tau_0 = \varphi(\sigma_*)$. W środkowej części rys. 5.4 przedstawiono teorię poślizgową we współrzędnych poślizgowych σ, τ i tę samą teorię we współrzędnych zmodernizowanych σ_0, τ_0 . Wreszcie dolna część rysunku przedstawia hipotezę niezmienników $\tau_x = F(\sigma_*)$ z jej szczególnym wypadkiem $\tau_* = \text{const}_*$.



Rys. 5.4

Jesteśmy nader często w sytuacji, w której znamy jedynie dwa parametry doświadczalne K_R i K_C . Odgrywają one - co jeszcze raz podkreślamy - bardzo ważną rolę w studium wyężenia i należy je wyznaczać z możliwie największą precyzją doświadczalną. Znaczna ilość stanów technicznie ważnych, np. K_S z obrazem S, mieści się między tymi punktami. Możemy je wyznaczyć rachunkowo, zakładając - z nieznacznym nadmiarem pewności - prostolinijny przebieg wykresu. Pożądane jest posiadać też dane doświadczalne dotyczące obszarów położonych na zewnątrz omówionego, więc np. daty K_{RR} i K_{CC} z doświadczeń nad równomiernym dwuosłowym rozciąganiem i takim samym ściskaniem. Gdy dat tych nie posiadamy, możemy dla obszaru $\sigma_0 > \frac{K_R}{2}$ względnie $\sigma_* > \frac{K_R}{3}$ korzystać z ekstrapolacji powyższego założenia liniowego, natomiast dla $\sigma_0 < -\frac{K_C}{2}$ względnie $\sigma_* < -\frac{K_C}{3}$ z braku cze-

goś lepszego musimy z konieczności założyć $\tau_0 = \text{Const}_0$ względnie $\tau_* = \text{Const}_*$, tj. przyjąć nieekonomicznie, ale pewnie prostą równoległą do osi σ_0 względnie σ_* przez punkt C jako przedłużenie wykresu.

Jeśli obciążenie niszczące układ materialny, to znaczy niweczące całkowicie jego udźwig pomniejszyemy np. pięciokrotnie, to tak pomniejszone obciążenie nazywamy *b e z p i e c z n e* lub też *d o p u s z c z a l n e*, a o układzie mówimy, że jego stopień *p e w n o ś c i* lub *b e z p i e c z e ń s t w a* wynosi pięć. Główne techniczne zadanie mechaniki układów rzeczywistych polega na wyznaczaniu właśnie stopnia pewności *u k ł a d ó w* materialnych. W wielu wypadkach tworzymy namiastkę tak postawionego zadania i oznaczamy stopień wytężenia *m a t e r i a ł u*. Gdy naprężenia rosną proporcjonalnie wraz z obciążeniami, zabezpieczenie wytężenia materiału jest istotnie zgodne z takim samym zabezpieczeniem nośności układu. Na ogół jednak tak nie jest. Dwukrotnie mniejszym obciążeniom nie odpowiadają dwukrotnie mniejsze wytężenia. Na ogół określanie dopuszczalnych naprężeń jako ułamka naprężeń krytycznych jest mniej ekonomiczne od określania dopuszczalnych obciążeń jako takiego samego ułamka obciążeń niszczących. Po prostu związek między obciążeniem a naprężeniem zastępczym wyraża się krzywą zwróconą wypukłością ku osi wytężenia. Z tych to powodów powinniśmy w miarę możliwości oznaczać raczej udźwig bezpieczny niż wytężenie bezpieczne.

Ogólnie biorąc, jest obojętne czy za punkt wyjścia przyjmiemy przy oznaczaniu bezpiecznego wytężenia datę K , k , czy κ . Skoro dla miękkiej stali przedstawionej na rys. 1.4 jest $K_r = 3600$, $k_r = 2400$, $\kappa = 1800 \text{ kg/cm}^2$, to przyjmując w odniesieniu do tych dat współczynniki pewności $N=3$, $n=2$, $\nu = 1,5$ znajdziemy dla *b e z p i e c z n e g o n a p r ę ż e n i a z a s t ę p c z e g o* bez różnicy wartości:

$$\sigma_{\gamma} = \frac{K_r}{N} = \frac{k_r}{n} = \frac{\kappa_r}{\nu} = 1200 \text{ kg/cm}^2.$$

Jednakże wiadomo nam jest, że dla metali ciągliwych nie dla wszelkich stanów potrafimy wyznaczyć parametr wytrzymałościowy K ; gdy jest on niekiedy dowolnie wielki absurdem technicznym byłoby przyjmować dla odnośnych σ również dowolnie duże wartości. Parametr K jest zaś dla wszelkich materiałów niepewny. Wreszcie nie mamy wystarczających podataw do twierdzenia, że powierzchnia wytężenia K jest dla wszelkich stanów podobna do odnośnej k czy też κ . W rezultacie więc powszechnie się utarło, że dla materiałów ciągliwych przyjmujemy zastępcze naprężenia bezpieczne jako ułamek naprężenia na granicy płynności, dla kruchych zaś jako ułamek naprężenia na granicy wytrzymałości, czyli:

$$\sigma = \frac{k}{n}, \quad \sigma = \frac{K}{N}. \quad (12.4)$$

Jest to umowa, której nie musimy się zawsze ściśle trzymać. Należy pamiętać o tym, że jedyne jednolite stanowisko przedstawia obliczenie obciążenia jako określonego ułamka udźwigu układu.

Współczynnik pewności n względnie N zależy od całego szeregu różnych okoliczności. Wspomnieliśmy już, że dokładność obliczeń z dziedziny mechaniki układów rzeczywistych pozostawia wiele do życzenia przede wszystkim dzięki naszej niewystarczająco dokładnej znajomości prawa wiążącego i dzięki niedostatkom teorii szczególnie w obszarach dużych odkształceń.

Nasza znajomość wyężenia materiału pozostawia również wiele do życzenia. Wpływa na to poza czynnikiem ostatnio wymienionym niejednorodność materiału, jego niedostateczna równokierunkowość, wadliwość w realizowaniu założonego stanu napięcia i podobne czynniki. Rozmiary geometryczne układu materialnego nie stanowią zawsze pozycji niewątpliwej; zużycie powierzchni, korozja, wpływy termiczne tworzą tu często niespodzianki. Wreszcie nie zawsze potrafimy ściśle ustalić względnie przewidzieć wielkości sił zewnętrznych, działających na rozważany układ. Z reguły wymienione czynniki albo ich większość niepomyślniej układają się dla tworzyw kruchych aniżeli dla ciągliwych. W rezultacie uwzględniając jeszcze, że z natury rzeczy jest $N > n$, przyjmujemy n w przedziale od 1,5 do 2,5, zaś N od 4 do 8.

Powyższe wartości n względnie N obieramy dla wypadków statycznych. Istnieją jednak i inne przyczyny, o których dotychczas nie było tu mowy, a które bardzo wydatnie wpływają na wyężenie. Pewne z nich uwzględnić można wprost w obliczeniu naprężeń, jak np. uderzenie; inne, jak np. przemienność naprężeń wymagają oddzielnego nowego stadium wyężenia. Będzie o nich mowa oddzielnie gdzie indziej. Ta druga grupa wpływów, zmieniająca własności wytrzymałościowe tworzyw, prowadzi do dalszego, nawet kilkakrotnego pomniejszenia naprężeń dopuszczalnych. Najprościej korzystać należy ze specjalnie opracowanych tabel, które dla określonych materiałów ustalają w zależności od ich przyszłego rodzaju pracy wprost bezpieczne naprężenia σ .

Ogólny tok postępowania po ustaleniu wyężenia bezpiecznego, a zatem po ustaleniu wartości bezpiecznego naprężenia zastępczego jest następujący: Składowe stanu napięcia $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_x, \tau_y, \tau_z$ są funkcjami miejsca (x, y, z) , obciążeń układu P , rozmiarów geometrycznych układu l i stałych materiałowych C . Niewiadomą stanowi jeden rozmiar l , mianowicie - albo wszystkie inne są dane, albo też wszystkie wyrażają się jednym, np. przy ustalonym kształcie układu. Do grupy rozmiarów zaliczamy również współrzędne określające położenie obciążeń, które tu ryczałtowo oznaczono literą P . Pod stałymi materiałowymi rozumiemy współczynniki prawa wiążącego. Skoro tak matematycznie określone składowe wstawimy w formułę określającą funkcję wyężenia, a więc np. w funkcję oznaczającą naprężenie zastępcze σ , to z kolei owa funkcja uzależniona zostanie od współrzędnych x, y, z , obciążeń P , rozmiaru l , stałych prawa wiążącego C a nadto

stałych wytrzymałościowych K . Wyznaczywszy ekstremum tej funkcji znajdziemy, że wyraża się ono już tylko obciążeniami P rozmiarem l i stałymi C, K . Przyrównawszy je przeto do określonej na wstępie wartości bezpiecznej otrzymamy równanie, z którego wyznaczymy niewiadomy rozmiar l w zależności jedynie od danych obciążeń i stałych materiałowych; niektóre z tych ostatnich, mianowicie typu C , mogą ewentualnie odpaść całkowicie z rachunku.

W analogiczny sposób postępujemy przy wyznaczaniu bezpiecznego udźwigu P . Tutaj wszystkie rozmiary są z góry dane, a niewiadomą stanowi nie obciążenie bezpieczne P , lecz właśnie niszczące P_N . Przedstawiamy przeto składowe stanu napięcia - jak poprzednio - jako funkcje P, l, C, x, y, z i wstawiamy je w formułę określającą wyężanie czy też naprężanie zastępcze. Wyznaczywszy ekstremum odnośnej funkcji jak uprzednio, nadajemy mu wartość krytyczną K przy jednoczesnym wstawianiu w miejsce P nieznanej wartości P_N . Z tak powstałego równania wyznaczamy obciążenie niszczące P_N ; okaże się ono uzależnione od rozmiarów l i stałych materiałowych C, K . Zatem bezpieczne obciążenie wynosi $P = P_N/N$; tak wyznaczone P okaże się przy tym samym N większe od wynikłego z postulatu bezpiecznego naprężenia zastępczego $\sigma = K/N$.

Inny, bardziej subtelny sposób rozwiązania ostatniego zadania polega na tym, iż obciążenie łączne P układu rozbijamy na stałe G i ruchome Q , po czym zakładamy: $a \cdot G + bQ = \frac{P_N}{N}$. Współczynnik $a > 1$ uwzględnia niedokładność rozmiarów geometrycznych, błędy ciężarów właściwych, wpływ drgań ciężarów stałych; we współczynniku $b > 1$ mieści się niedokładność obciążeń użytkowych, niepewność zmian temperatury, błędy w wyznaczeniu naporu wiatru i innych obciążeń zmiennych, jak np. śniegu, wpływ niektórych sił bezwładności. Wielkość N jest w takich warunkach niewiele większa od 1.

Temat 1.4. Przystudiować wyczerpująco literaturę dotyczącą zachowania wytrzymałościowego różnych materiałów ze specjalnym uwzględnieniem stanów końcowych.

Temat 2.4. Zaznajomić się z poglądami na temat powstawania zjawiska szyjki.

Temat 3.4. Pewien stan krytyczny wyrażają trzy składowe główne o danych wartościach a, b, c . Umieścić to spostrzeżenie w układzie $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Uzyska się najwidoczniej z jednego tego spostrzeżenia sześć punktów. Zastanowić się nad ich położeniem, oddaleniem od środka tych punktów. Jakże nasuwają się wnioski?

R o z d z i a ł I I .

PRĘT PROSTY W PRZYPADKACH PODSTAWOWYCH

5. OPIS GEOMETRYCZNY I UWAGI WSTĘPNE

Kształt układu materialnego odgrywa w mechanice ciał rzeczywistych znacznie większą rolę aniżeli w mechanice ciał sztywnych. Wpływają na to z jednej strony względy natury czysto utylitarnej, z drugiej czysto teoretycznej. Te pierwsze wymagają przyporządkowania właściwego mianownictwa obiektom stosowanym w konstrukcjach, więc odróżniania pręta od płyty, płyty od powłoki, powłoki od kuli itp. Te drugie wynikają z matematycznego przebiegu rozwiązania. Okazało się, że z kształtem układu związane są ściśle pewne określone funkcje, więc np. harmoniczne z prętem, biharmoniczne z tarczą, cylindryczne z walcem, kuliste z kulą itp. Właściwości tych funkcji pozwalają w obrębie praktycznie przynależnego jej układu wprowadzać pewne uproszczenia, interpolacyjne przybliżenia i - co najważniejsze - pewne nader cenne uogólnienia.

Układem najbardziej rozpowszechnionym i stosunkowo mało skomplikowanym jest tzw. **p r y z m a t y c z n y p r ę t p r o s t y**. Układ ten znany nam jest z wykładów mechaniki teoretycznej. Przypomnijmy przeto krótko jego własności geometryczne.

Wyobraźmy sobie dowolną zamkniętą krzywą płaską, obejmującą p o l e A. Przy przesuwaniu jej wzdłuż prostej z, prostopadłej do jej płaszczyzny, krzywa ta opisze powierzchnię walcową. Obetnijmy ją przekrojami początkowym, np. z = 0, końcowym z = l, czyniąc przy tym l d u ż e w p o r ó w n a n i u z r o z m i a r a m i l i n i o w y m i d p o l a A. Rozumiemy to następująco: Liczbę δ nazywamy małą w porównaniu z liczbą 1, gdy δ^2 jest pomijalne w porównaniu z 1. Otóż czynimy $d = \delta \cdot l$. Wypełnimy wreszcie ten twór geometryczny continuum materialnym. Otrzymamy w ten sposób układ materialny zwany pryzmatycznym prętem prostym. Ograniczają go dwa wspomniane przekroje z i walcowa p o b o c z n i c a. Pozostałe dwie osie x, y prostokątnego układu współrzędnych x, y, z leżą w przekroju początkowym z = 0 pręta. Możemy je bez ujmy dla całego szeregu różnych operacji przesuwac równolegle do dowolnie obranego innego przekroju z.

Pole przekroju A jest jedną z ważnych metrycznych własności pręta. Istnieją i inne naturalne jego własności równie ważne. Znane z mechaniki układów sztywnych równania:

$$\int x \, dA = x_s A, \quad \int y \, dA = y_s A \quad (1.5)$$

określają współrzędne x_s, y_s środka geometrycznego tego pola. Prostą $x = x_s, y = y_s$ nazywamy osią pręta. Jak się wielokrotnie okaże, bardzo nader celowe jest zaoszczędzić przyjmować wprost oś z , tj. prostą $x = y = 0$. Wtedy układ współrzędnych posiada własność:

$$\int x dA = 0, \quad \int y dA = 0. \quad (2.5)$$

Ukształtowanie pola A charakteryzują dwa kształtniki¹⁾ (momenty bezwładności) I_x, I_y i bocznik (moment zboczenia) D_z , tj. wielkości:

$$I_x = \int y^2 dA, \quad I_y = \int x^2 dA, \quad D_z = - \int xy dA \quad (3.5)$$

o wymiarze długości w czwartej potęgce. Wielkości

$$I_x - y_s^2 A, \quad I_y - x_s^2 A, \quad D_z + x_s y_s A \quad (4.5)$$

są od współrzędnych x_s, y_s niezależne, oznaczają bowiem dwa kształtniki i bocznik względem osi przesuniętych równolegle do środka geometrycznego przekroju. Jak nam wiadomo z rozważań geometrii mas, możemy osiom x, y nadać kierunki główne z uwagi na ich punkt przecięcia. Wynikają one z założenia:

$$\int xy dA = 0. \quad (5.5)$$

Oś z stanowi zawsze jedną z trójki głównych osi pręta. Bardzo cenny i całkowicie naturalny jest taki dobór układu współrzędnych, który spełnia jednocześnie postulaty (2.5) i (5.5). Użycie go prowadzi do wybitnych uproszczeń matematycznych przy traktowaniu rozmaitych zagadnień.

Powyższe pojęcia, zaczerpnięte z mechaniki układów sztywnych, nie wyczerpują opisu naturalnego układu materialnego, który nazwalimy prostym prętem. Istnieją i inne, które wypłyną na jaw dopiero w toku tego kursu. W stosownych miejscach podkreślimy ich rolę.

Pragniemy się zająć statyką pręta rzeczywiście tego. Zakres materiału jest bardzo wielki. Wobec tego chcemy go zaraz na wstępie należyście uporządkować. Wydaje nam się celowe ograniczyć się na razie do rozpatrzenia przypadków podstawowych. Za takie uważamy te, w których pobocznicą pręta wolna jest od obciążeń (powierzchniowych), a siły obciążające (masowe) pręta mogą być pominięte. W przypadkach tych przeto siły działające na układ sprowadzają się do dwóch wza-

¹⁾ Autor stosuje wprowadzone przez siebie nazwy kształtnik, bocznik, średnik odpowiednio w miejsce momentu bezwładności, dewiacji, statycznego (por. str.286, spis publikacji, poz. [26]) - przyp. I.W.

jennie równoważących się zbiorów, z których jeden działa na przekrój $z=0$, drugi na przekrój $z = l$ pręta. Każdy z tych zbiorów sprowadza się do jakiejś siły i jakiegoś momentu. Dla całego układu, a więc dla pręta długości l wielkości te mają charakter zewnętrzny. Zależnie od ujawnionych z tekstu konkretnego zagadnienia warunków brzegowych są one albo na obu końcach pręta wielkościami czynnymi, tj. obciążeniami, albo na jednym końcu stanowią obciążenia, na drugim zaś mają charakter bierny, tzn. tworzą odpór, albo wreszcie na obu końcach są odporami.

Założywszy dla celów tego rozdziału wartość zasady nakładania (superpozycji) możemy ową siłę i ów moment na każdym z przekrojów ograniczających układ celowo rozłożyć. Otrzymamy w ten sposób kilka oddzielnych przypadków podstawowych, których rezultaty możemy w celowy sposób sumować, wracając z powrotem do przypadku ogólniejszego. Zajmiemy się roztrząsaniem tych zagadnień w dalszej części.

Pod rezultatami rozumiemy w powyższym zdaniu siły i naprężenia, przemieszczenia i odkształcenia. Aby zasada superpozycji mogła być stosowana, muszą przede wszystkim przemieszczenia pręta być małe w porównaniu z jego odnośnymi rozmiarami. Jeśli więc δ oznacza liczbę małą w porównaniu z liczbą 1 , muszą być przemieszczenia u, v co najwyżej rzędu $\delta \cdot d \approx \delta^2 l$, przemieszczenie zaś w co najwyżej rzędu $\delta \cdot l \approx d$. Postulat ten stanowi konieczny, ale nie zawsze wystarczający warunek stosowalności zasady nakładania.

Wiadomo nam jest, że czy to siłę, czy moment o określonej wartości, określonym kierunku i określonym punkcie zaczepienia możemy w dowolnie wiele sposobów zrealizować. Nie jest możliwe zająć się wszelkimi możliwymi rozmieszczeniami sił powierzchniowych na przekroju końcowym pręta, prowadzącymi do z góry określonej wypadkowej siły lub wypadkowego momentu. Weźmiemy przeto pod uwagę tylko pewne szczególne rozmieszczenia. Ograniczymy się w ten sposób w tym rozdziale do rozważania zagadnień klasycznych, za które uważa się w literaturze przedmiotu pewne rozwiązania francuskiego uczonego de Saint-Venanta.

Cytowane przez nas w ustępie drugim twierdzenie tegoż samego autora o zanikaniu różnic skutków równowartych zbiorów sił poucza nas zaraz, że powyższe ograniczenie nie upośledza praktycznych zastosowań tego rodzaju rozwiązań. Wobec uczynionego niedawno istotnego założenia o rzędzie rozmiaru poprzecznego d pręta w porównaniu z jego długością l widzimy, że jedynie krótkie skrawki końcowe pręta długości szacunkowej d wymagać będą naszej dodatkowej uwagi, dodatkowej korekty rozwiązania, ewentualnego lokalnego wzmocnienia konstrukcyjnego. Na pozostałej zasadniczej długości $l - 2d$ pręta podane przez nas rozwiązanie będzie praktycznie poprawne i wystarczająco ściśle dla każdego bez wyjątku sposobu rozmieszczenia sił na przekrojach ograniczających układ.

Jest nader ważne pamiętać nie tylko o dobroczynnej roli twierdzenia de Saint-Venanta, lecz również i o zastrzeżeniach figurujących w tym twier-

dzeniu. Pragnąc wyraźnie oddzielić kwestie podstawowe od szczegółów uzupełniających, sprawę lokalnego spiętrzenia stanu napięcia we wspomnianych krótkich skrawkach pręta, skutki nadmiernego skrócenia pręta, wpływu lokalnych (jak i ciągłych) zmian geometrycznych układu i inne kwestie dodatkowe omówimy w innym oddzielnym rozdziale.

Wiemy już z poprzedniego rozdziału, że każde poprawne rozwiązanie z dziedziny mechaniki układów odkształcalnych musi spełniać pewne postulaty geometryczne i pewne mechaniczne. Do pierwszych należą warunki nierozdzielności sąsiadujących dowolnie małych α w konsekwencji też skończonych części układu i warunki podporowe na brzegu układu. Do drugich należą warunki równowagi dowolnie małych α w konsekwencji też skończonych części układu i warunki obciążenia na brzegu układu. Wspomnieliśmy już, że w kursie niniejszym, przeznaczonym do pewnego specjalnego użytku, nie jesteśmy w stanie rozwinąć tych precyzyjnych metod matematycznych, które w sposób ścisły czynią zadość wszystkim scharakteryzowanym wyżej wymogom. Od wypadku więc do wypadku poprzestawać będziemy na stosownym przybliżeniu.

Usiłujemy w mechanice pręta odkształcalnego w granicach możliwości wzorować się na metodach mechaniki układów sztywnych. W szczególności, gdy chodzi o geometryczną stronę zagadnienia, spróbujemy przemycić z mechaniki teoretycznej dwa podstawowe tam pojęcia kinematyczne - przesunięcia i obrotu. Usiłujemy - z większym lub mniejszym skutkiem - przypisać c a l e m u przekrojowi A przemieszczenia określone s z e ϵ c i o m a tylko wielkościami. Traktując przekrój jak sztywny - choćby pod niektórymi względami - kartonik chcemy jego przemieszczenia wynikać z odkształcenia pręta złożyć z trzech przesunięć i trzech obrotów. Odkształcalność układu pragniemy ujawnić w tym, że przesunięcia te i obroty uczynimy funkcjami zmiennej z , mierzonej - jak zaznaczyliśmy - wzdłuż pręta; uczynimy je przeto w z g l ϵ d n y m i przesunięciami i w z g l ϵ d n y m i obrotami. Wielkości te nazywać będziemy u o g ó l n i o n y m i p r z e m i e s z c z e n i a m i. Zaopatrzymy je w dalszych ustępach stosownymi mianami szczegółowymi. Okaze się - co można z góry przypuszczać - że nie wyczerpią one opisu odkształcenia układu; wystarczą jednak do wielu celów.

Bardzo istotny w tej kalkulacji będzie fakt, że w powyższy sposób sześć uogólnionych przemieszczeń przyporządkujemy jako skutki również sześciu uogólnionym przyczynom, za które uważać będziemy siłę podłużną, dwie składowe siły poprzecznej, moment skręcający i dwie składowe momentu zginającego. Będziemy usiłowali oddzielnym przyczynom przypisać oddzielne skutki. Nie zawsze się to uda. Zważmy, aby to zrozumieć, że opisane skutki geometryczne mogą być przecież wywołane i innymi przyczynami natury nie-mechanicznej, jak np. termicznej, chemicznej, montażowej itp.

Zagadnienia nasze polegać będą - między innymi - na znalezieniu składowych stanu napięcia, wywołanych obecnością powyższych sił i momentów wewnętrznych. Pojęcia te - jak nam wiadomo - związane są nieodłącznie z

wykonaniem przekroju pręta normalnie do jego osi. W najogólniejszym przypadku na dowolny przekrój z działac mogą naprężenia τ_y, τ_x, σ_z równoległe w podanej kolejności do osi x, y, z układu współrzędnych. Istotne dla rozwiązania klasycznego jest założenie, że - wobec powyższego - owe siły i momenty wewnętrzne wywodzą się jedynie z tych trzech naprężeń, że przeto w pręcie prostym w przypadkach podstawowych w każdym miejscu układu zachodzi równość:

$$\sigma_x = \sigma_y = \tau_z = 0. \quad (6.5)$$

Założenie to - jak sobie przypominamy z ustępu drugiego - jest zgodne z przyjęciem, że stan napięcia w przypadkach podstawowych pręta prostego jest co najwyżej dwuosiowy. Jednocześnie widzimy, że w ten sposób uwalniamy pobocznice pręta od obciążeń w kierunku osi x tudzież y (patrz zadanie 2.2).

Nie od rzeczy będzie podać w tym miejscu pewne wyjaśnienie. Wspomnieliśmy w ustępie drugim, że wyznaczenie stanu napięcia w ciele rzeczywistym jest zagadnieniem statycznie niewyznaczalnym. Rozumiemy to w ten sposób, iż warunki równowagi nie wystarczają do rozwiązania tego zadania; muszą one być uzupełnione warunkami nierozdzielności. W teorii pręta ten sposób pojmowania rzeczy uległ pewnej subtelnej modyfikacji. Tradycyjnie wbrew matematycznej oczywistości, uważa się tam, że znajomość wszystkich działających na układ sił i momentów zewnętrznych a w konsekwencji i wewnętrznych jest identyczna ze znajomością stanu napięcia wywołanego tymi wielkościami w układzie. W teorii pręta przeto do zagadnień hyperstatycznych zalicza się te wypadki, w których warunki równowagi nie wystarczają do znalezienia wszystkich sił i momentów zarówno zewnętrznych jak i wewnętrznych. Zapomina się tu o tym, że warunki nierozdzielności stanowiły zawsze konieczne uzupełnienie równań przy znajdowaniu stanu napięcia, a pamięta się o tym, że są one niekiedy konieczne do znalezienia sił i momentów układu. Ten ciasniejszy sposób definiowania hyperstatyczności jest tak szeroko i powszechnie zakorzeniony, że z konieczności będziemy go respektować. Pod układem prętowym statycznie niewyznaczalnym będziemy przeto rozumieć układ niewyznaczalny pod względem sił względnie momentów. Dodatkowo zaś, zależnie od charakteru niewiadomych odróżniać będziemy układy zewnętrznie hyperstatyczne od wewnętrznie hyperstatycznych. Wyjaśnienie powyższe dotyczy nie tylko pręta w przypadkach podstawowych, lecz w ogóle pręta w dowolnym zagadnieniu i to prostego lub krzywego. Często celowe jest zamienić zagadnienie zewnętrznie niewyznaczalne na stosowne wewnętrznie niewyznaczalne. Zabieg ten - jak w przyszłości zauważymy - przeprowadza się bardzo łatwo.

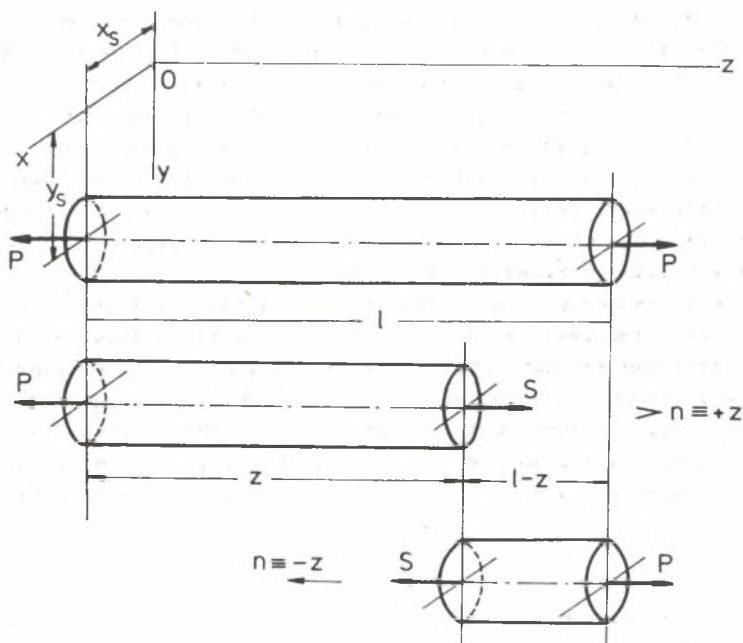
Ważne jest pamiętać, że zagadnienia mechaniki układów odkształcalnych nie powstają jedynie dzięki zaistnieniu obciążeń. W p ł y w y n a t u r y n i e m e c h a n i c z n e j powodują w układach n i e w y z n a c z a l n y c h powstawanie również sił lub momentów. Można po- ch o p n i e s ą d z i ć, że skoro i w tych wypadkach rzecz sprowadza się - jak w zagadnieniach pierwszej kategorii - do wyznaczania tych sił, to w gruncie rzeczy między obu typami zagadnień nie ma różnicy. Otóż różnica ta ist- n i e j e. U j a w n i a s i ę o n a w s z c z e g ó l n y c h o p e r a c j a c h m y ś l o w y c h, j a k i e t o w a - r z y s z y ć m u s z ą u s t a w i a n i u k o n i e c z n y c h d o r o z w i ą z a n i a r ó w n a ń. S z c z e g ó ł y t e w y j d ą n a j a w p r z y t r a k t o w a n i u o d n o ś n y c h p r z y k ł a d ó w.

Wreszcie na zakończenie chcemy podać jeszcze jedną uwagę. Jak wyraźnie zaznaczyliśmy, rozwiązania nasze będą należały do tej kategorii, w której na całej powierzchni ograniczającej układ przyjmuje się za znane siły po- w i e r z c h n i o w e z e w n ę t r z n e, a t o z e ń o w e n a p o b o c z n i c y i p e w n e o k r e ś l o n e n a p r e k r o j a c h $z = 0$ t u d z i e ż $z = 1$. P r z y u c z y n i e n i u z a d o ś ć t e g o r o d z a j u w a r u m k o b r z e g o w y m n i e m o ż e m y j u ż n a t e j ż e p o w i e r z c h n i b r z e ż n e j w d o w o l n y s p o s ó b w p ł y w a ć n a p r z e m i e s z c z e n i a. S t a j ą s i ę o n e z k o n i e c z n o ś c i w y n i k i e m z a łożenia tak a n i e i n a c z e j r o z m i e s z c z o n y c h s i ł n a p r e k r o j a c h o g r a n i c z a - j ą c y c h u k ł a d. C o n a j w y ż e j d o u z y s k a n y c h p r z e m i e s z c z e ń, w y n i k a j ą c y c h z o d - k s z t a ł c a n i a u k ł a d u, m o ż e m y d o d a ć p r z e m i e s z c z e n i a w y n i k ł e z r u c h u u k ł a d u j a k o s z t y w n e j c a ł o ś c i. P o p r o s t u w y g ł ą d a t o t a k, j a k g d y b y ś m y u z y s k a n e o d - k s z t a ł c e n i a u z u p e ł n i l i z e r o w y m i d o d a j n i k a m i (p a t r z z a d a n i e 2.1).

Przemieszczenia wynikłe z ruchu układu jako sztywnej całości podano na wstępie punktu 1. Mają one postać niekompletnie liniowych funkcji miej- s c a, b o z a w i e r a j ą r a p t e m s z e ś ć p a r a m e t r ó w $u_0, v_0, w_0, \varphi, \chi, \psi$. Zgodnie z naszą uwagą możemy przeto wpływać dodatkowo tylko na owych sześć para- m e t r ó w. W o b e c t e g o r o d z a j i l i c z b a w a r u n k ó w p o d p o r o w y c h j a k i e m o ż e m y s p e ł - n i ć j e s t w y b i t n i e o g r a n i c z o n a. M o ż e m y n p. n a k a ż - d y m z p r e k r o j ó w k o ń c o w y c h u s t a l i ć p o j e d n y m t y l k o p u n k t e, a z a t e m u s t a l i ć s z e ś ć w s p ó ł r z ę d n y c h, t j. p o d e p r z e ć k o ń c e p r ę t a p u n k t o w o. M o ż e m y n a j e d n y m t y l k o k o ń c u u s t a l i ć j e d e n p u n k t i p r z y n a l e ż n ą w t y m m i e j s c u n o r m a l n ą, n a c o z u ż y j e m y z n o w u s z e ś ć p a r a m e t r ó w i z r e a l i z u j e m y w t e n s p o s ó b u t w i e r d z e n i e, l e c z i t y m r a z e m p u n k t o w e. J u ż o b e c n i e p o d k r e ś l a m y, że ten punktowy charakter warunków podporowych w rozwiązaniu klasycznym może być przyczyną pewnych kłopotów, co wyraźniej wyjdzie na j a w w i n n y c h u s t ę p a c h t e g o r o z d z i a ł u.

6. RÓWNOMIERNE ROZCIĄGANIE LUB ŚCISKANIE

Zbiór sił działających na przekrój końcowy $z = l$, równowarty jest sile zewnętrznej P o linii działania pokrywającej się z osią pręta i jej dodatnim - jak na rys. 1.6 - lub ujemnym kierunkiem. Wobec tego zbiór sił działających na przekrój początkowy $z = 0$ musi być równowarty takiej samej sile zewnętrznej P o linii działania również pokrywającej się z osią pręta i jej ujemnym lub dodatnim kierunkiem. Gdy bowiem układ trwa w równowadze, to w równowadze pozostają również siły nań działające.



Rys. 1.6

Wypadek ten znany nam jest pod niektórymi względami z wykładów mechaniki teoretycznej. Przypominamy krótko te dotychczasowe wiadomości. Chcąc znaleźć wpływy wewnętrzne, dzielimy układ dowolnym przekrojem z na dwie części i jedną z nich odrzucamy, rozpatrując tylko pozostałą. Ta operacja pozwala nam zamienić wpływy wewnętrzne na zewnętrzne. Ponieważ w stałym układzie materialnym, pozostającym w równowadze, każda jego część również

znajduje się w równowadze, przeto do wydzielonej części możemy zastosować warunki równowagi. W rozważanym wypadku okazuje się, że na przekrój z działa siła:

$$S = P \quad (1.6)$$

wzdłuż osi pręta.

Należy pamiętać o tym, że jedynie dla części układu jest ona siłą zewnętrzną. Wtedy znak jej ustalamy odnosząc jej zwrot do kierunku aktualnej osi układu, więc w tym wypadku do osi z . Dla całego układu, a więc dla pręta długości l - a ten w istocie jest przedmiotem naszych rozważań - siła S jest siłą wewnętrzną. Stąd stosowanie innego oznaczenia. Znak siły wewnętrznej (lub momentu wewnętrznego) ustalamy, odnosząc jednocześnie jej zwrot i zwrot normalnej z e w n ę t r z n e j n przekroju do kierunków aktualnych osi układu. W rozważanym prymitywnym wypadku reguła powyższa prowadzi do stwierdzenia, że siła S jest dodatnia względnie ujemna zależnie od tego, czy skierowana ona jest od względnie do płaszczyzny przekroju. Zatem na rys. 1.6 przedstawiono przypadek $S > 0$.

Siłę w e w n ę t r z n ą o omówionym położeniu nazywamy s i ł ą p o d ł u ż n ą względnie - szczególnie - siłą r o z c i ą g a j ą c ą lub ś c i s k a j ą c ą zależnie od jej znaku dodatniego lub ujemnego. Mamy przed sobą przypadek r ó w n o m i e r n e g o rozciągania lub ściskania pręta prostego, gdy siła S jest niezależna od zmiennej z . Jest to najprostszyp przypadek podstawowy.

Po tym krótkim przypomnieniu wiadomości nabytych wcześniej przejdźmy do rozważania zagadnienia na gruncie mechaniki układów odkształcalnych.

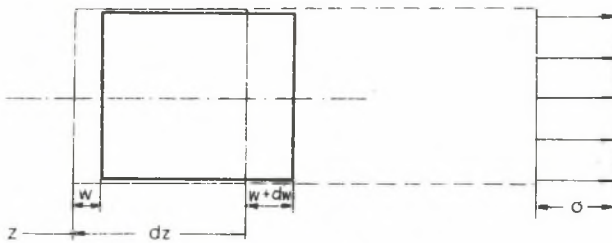
Wiemy już z poprzednich rozważań, że do konkurencji dopuszczamy co najwyżej trzy składowe stanu napięcia, a to τ_y, τ_x, σ_z . Zauważmy, że zbiór elementarnych sił, pochodzących od obecności naprężeń stycznych, mógłby ewentualnie doprowadzić do obecności sił poprzecznych i momentu skręcającego. Wykluczając je obok (6.5) przyjmujemy dodatkowo najprościej

$$\tau_y = \tau_x = 0. \quad (2.6)$$

uwalniając w ten sposób pobocznice pręta od obciążeń jeszcze i w kierunku osi z (patrz zadania 2.2 i 3.2). W ten sposób zakładamy: j e d n o o s i o w y stan napięcia w każdym miejscu pręta z jedyną różną od zera składową σ_z . Będziemy ją w dalszym ciągu oznaczać krótko σ . Ponieważ naprężenie to wywołane jest obecnością niezależnej od zmiany z siły S , przeto przyjmujemy, że σ zależeć może co najwyżej od zmiennych x, y . Zależność tę musimy ustalić tak, by respektowane zostały postulaty mechaniki układów odkształcalnych.

Przyjmijmy najprościej, że przekroje pręta przesuwają się wzdłuż osi z jak sztywne kartony. Niech przemieszczenie przekroju z wynosi w , prze-

wieszczenie zaś przekroju sąsiedniego z + dz niech będzie wobec tego równe w + dw - jak na rys. 2.6. Wobec tego element dz doznaje wydłużenia dw. Każde włókno podłużne



Rys. 2.6

dz doznaje przeto zdłużu $\epsilon_z = \epsilon = \frac{dw}{dz} = w'$. Wielkość w , charakteryzująca zachowanie się w s z y s t k i c h wł ó k i e n zawartych między dwoma przekrojami, oddalonymi o wpływową jednostkę, a zatem wielkość charakteryzująca zachowanie się całego przekroju nazywać będziemy wydłużeniem przęta. Prostopa przyjętego przez nas mechanizmu tkwi w tym, że wydłużenie w' nie zależy od z m i e n n y c h x, y . Oczywiście wydłużeniu w' towarzyszyć będzie w jednoosiowym stanie napięcia swobodne boczne zwięzenie $-\mu w'$. Odnosne przemieszczenia u, v z reguły nie interesują nas w teorii rozciąganego czy też ściskanego przęta. W każdym razie przedstawiona koncepcja zapewnia nierozdzielność elementów przęta.

Napężenie σ jednoosiowego stanu napięcia wynosi:

$$\sigma = Ew'. \quad (3.6)$$

Siły elementarne σdA tworzą zbiór równoległy, tj. zbiór, dla którego można ustawić trzy warunki redukcji - jeden sił i dwa momentów, tj. równania:

$$\int \sigma dA = S, \quad \int x \sigma dA = Sx_s, \quad \int y \sigma dA = Sy_s, \quad (4.6)$$

w którym należy wyrugować σ relacją (3.6). Pierwsze z tych równań daje:

$$w' = \frac{S}{EA}, \quad (5.6)$$

gdzie $'$ oznacza pochodną zetową. Do tego samego rezultatu prowadzą dwa następne, jeśli zwrócimy uwagę na określenia (1.5). Widzimy przy tej sposobności, że formułowanie (4.6) bez ujmę dla ogólności wyrażnie uprościłoby się, gdybyśmy ca. z pokryli wprost z osią przęta.

Wracając z rezultatem (5.6) do (3.6) znajdziemy:

$$\sigma = \frac{S}{A}. \quad (6.6)$$

W przypadku zatem podstawowym zarówno wydłużenie w' jak i naprężenie σ nie zależą również od zmiennej z , skąd uzupełnienie rys. 2.6 wykresem σ . Wobec tego równania (2.2) równowagi dowolnego elementu pręta są spełnione.

Uczyniliśmy zadość w s z e l k i m stawianym przez mechanikę układów odkształcalnych postulatom. Formuły (5.6) i (6.6) podają więc ściśle rozwiązanie zagadnienia - z założeniem jednak, że przekroje końcowe $z = 0$ tudzież $z = l$ są również obciążone równomiernie. Gdy tak nie jest krótkie skrawki pręta trzeba będzie wyłączyć z rozwiązania. Nader cenną geometryczną cechą podanego rozwiązania jest zachowanie trwałej płaskości przekroju. Pozwala to nam układ złożony z kilku różnych prętów i rozmaicie obciążonych, lecz o wspólnej osi, złożyć po odkształceniu w przekrojach pośredniczących bez luk na zasadzie prostego rachunku pośredniczącego, wyrażającego wspólnosc przemieszczeń w końcu jednego i początku drugiego pręta.

Rozwiązanie nasze ważne jest w obszarze s p r ę ż y s t y m a dla materiałów ciągliwych w dobrym przybliżeniu do granicy plastyczności. Celowo jest uzupełnić je formułą dla e n e r g i i s p r ę ż y s t o ś c i n a g r o m a d z o n e j w e w p ł y w o w e j j e d n o s t c e d ł u g o ś c i p r ę t a.

Względne przesunięcie dwóch przekrojów oddalonych od dz wynosi dw . Jest ono według (5.6) proporcjonalne względem siły S i do niej równoległe. Powtarzając więc rozumowanie podane w punkcie trzecim znajdziemy dla energii odkształcenia wartość $dW = \frac{1}{2} S dw$, skąd wyznaczyć można poszukiwaną formułę dla $W' = \frac{dW}{dz}$. Stosując dodatkowo wzór (5.6) znajdziemy trojką postać poszukiwanego wyrażenia, a to:

$$W' = \frac{1}{2} S w' = \frac{1}{2} \frac{S^2}{EA} = \frac{1}{2} E A w'^2, \quad (7.6)$$

przy czym znak ' oznacza pochodną zetową.

Podaliśmy t r z y i s t o t n e f o r m u ł y dla zagadnienia rozciągania lub ściskania prostego pręta, a to (5.6), (6.6) i (7.6). Uzupełnimy je dodatkowymi wyjaśnieniami.

Formuła (6.6) określa stan napięcia. Przy danych S , A użycie jej polega na s p r a w d z e n i u w y t ę ż e n i a, tj. na zbadaniu czy wyznaczone formułą naprężenie σ czyni zadość nierówności:

$$(c) \leq \sigma_0, \quad (8.6)$$

w której σ_0 oznacza bezwzględną wartość naprężenia bezpiecznego przy rozciąganiu względnie ściskaniu. Przy tej sposobności dodatkowo wyjaśniamy, że przy rozciąganiu σ_0 zależy od indywidualności materiału i charakteru działania obciążeń - ponadto zaś przy ściskaniu jeszcze od smukłości pręta. O przemienności obciążeń, o roli smukłości pręta będzie mowa w innych rozdziałach tego kursu.

Przy danych A , σ_0 formuła (6.6) służy do wyznaczenia b e z p i e c z n e g o u d ż w i g u pręta, który wynosi

$$(P) = (S) = A\sigma_0. \quad (9.6)$$

Wreszcie przy danych S , σ_0 stosujemy ją do z a p r o j e k t o w a n i a p r z e k r o j u

$$A = \frac{(S)}{\sigma_0}, \quad (10.6)$$

względnie jego rozmiarów liniowych. Widoczne jest, że przekrój A jest w prętach rozciąganych lub ściskanych m i a r ą i c h n o ś n o ś c i.

Przykład 1.6. Słup żeliwny projektujemy w kształcie rury o przekroju kołowo-pierścieniowym. Obciążenie słupa wynosi $P = - 76$ ton, naprężenie bezpieczne ma wartość $\sigma_0 = 300$ kg/cm^2 , ścianka ma grubość $a = 7$ cm. Wyznaczyć średnice wewnętrzną d_1 i zewnętrzną d_2 przekroju.

Odpowiedź 1.6. Wprowadzając $d = \frac{d_1 + d_2}{2}$ mamy tu:

$$A = \frac{ad\pi}{2} = \frac{(P)}{\sigma_0}, \quad \text{skąd} \quad d = \frac{2 \cdot 76000}{7 \cdot 300 \pi} = 23 \text{ cm},$$

więc

$$d_1 = d - \frac{a}{2} = 195 \text{ mm}, \quad d_2 = d + \frac{a}{2} = 265 \text{ mm}.$$

Formuła (5.6) służy bezpośrednio do wyznaczenia wydłużeń względnie skróceń dowolnych skończonych części pręta. Ich znajomość może z kolei przy danych warunkach podporowych posłużyć do wyznaczania przemieszczeń w dowolnych miejscach pręta. Iloczyn EA nazywamy s z t y w n o ś c i ą r o z c i ą g a n i a względnie ś c i s k a n i a p r ę t a. Istotnie, ze wzrostem EA maleje w! przy przejściu do mechaniki układów sztywnych założylibyśmy iż EA jest nieograniczenie wielkie.

Przykład 2.6. Wyznaczyć skrócenie słupa w poprzednim zadaniu wiedząc, że długość jego wynosi $l = 3,35$ m a stała sprężystości żeliwa $E = 1\ 000\ 000$ kg/cm^2 .

Odpowiedź 2.6. Zważywszy, że w' nie zależy od zmiennej z przesunięcie końca słupa względem początku wynosi $w = \int_0^l w' dz = \frac{Pl}{EA}$; czyli po uwzglę-

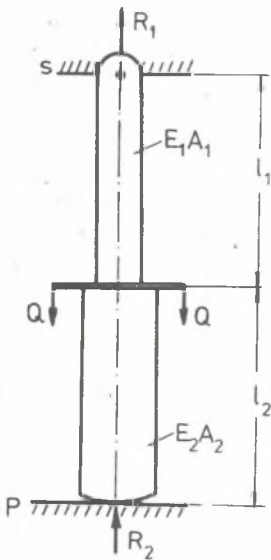
dnieniu $A = \frac{d_2^2 - d_1^2}{4} = 253 \text{ cm}^2$ i reszty dat $w = -1 \text{ mm}$. Skrócenie słupa wynosi przeto raptem 1 mm.

Powyższy przykład poucza, że przemieszczenia wynikłe z rozciągania lub ściskania prętów są nader małe. Obliczanie ich może mieć znaczenie przy prętach bardzo długich, stosowanych np. w wiertnictwie naftowym, w wyciągach głębokich kopalń węgla itp.

Wybitna rola wzoru (5.6) ujawnia się przy rozwiązywaniu zagadnień statycznie niewyznaczalnych.

Przykład 3.6. Układ składający się z dwóch różnych prętów zawieszono na niepoddającym się stropie s i podparto niepodatną płytą p - po czym obciążono symetrycznie siłami Q .

Znaleźć odpory R_1 i R_2 .



Rys. 3.6

Odpowiedź 3.6. Siły $2Q$, R_1 , R_2 działają wzdłuż wspólnej osi układu. Dostarczają wobec tego tylko jednego warunku równowagi, a to $R_1 + R_2 = 2Q(a)$. Brakujące równanie nierozdzielności wstawimy wzięwszy pod uwagę odkształcalność układu. Zastosowanie ma tu formuła (5.6), albowiem w dowolnym przekroju układu stwierdzić można obecność siły podłużnej S . Wynosi ona $+R_1$ w górnej i $-R_2$ w dolnej części układu. Przekrój pośredniczący między $\frac{R_1 l_1}{E_1 A_1}$ górnej względnie skrócenia $\frac{R_2 l_2}{E_2 A_2}$ dolnej części układu. Zabez-

pieczenie nierozdzielności tych części każe napisać brakujące równanie $\frac{R_1 l_1}{E_1 A_1} = \frac{R_2 l_2}{E_2 A_2}(b)$. Równania (a) i (b) rozwiązują zadanie.

Podajmy tu celową uwagę: Jeśli R_1 i R_2 uważamy za reakcje podpór, to zadanie powyższe stanowi przykład zagadnienia z e w n ę t r z n i e hyperstatycznego. Gdy zaś R_1 i R_2 uważamy za siły podłużne układu, to zadanie powyższe jest w e w n ę t r z n i e niewyznaczalne. W przykładzie powyższym zamiany dokonaliśmy w sposób nader prymitywny. Nie zawsze tak bywa.

Przykład 4.6. W okresie bardzo silnych mrozów ułożono na znacznej długości prostoliniowej trasy szyny kolejowe bez stosowania dylatacji. Jaki

stan napięcia powstanie w szynie w okresie letnich, wyjątkowo wielkich upałów?

Odpowiedź 4.6. Przyjmijmy różnicę temperatury w chwili montażu i obliczenia naprężenia w wysokości niemal $t^{\circ}\text{C} = 100^{\circ}\text{C}$, współczynnik rozszerzalności termicznej dla stali w wysokości nieco większej aniżeli $\alpha = 0,00001$, a więc okrągło $\alpha t = 0,001$, nadto $E = 2\ 000\ 000\ \text{kg/cm}^2$. Każdy dowolny przekrój szyny - z powodu identycznych warunków po jego lewej i prawej stronie - pozostanie w miejscu. Rzecz przeto przedstawia się tak jak gdybyśmy odcinek szyny dowolnej długości l , umieścili między dwiema nieprzesuwnymi sztywnymi ścianami - i podgrzali go o $t^{\circ}\text{C}$. Gdyby tych przeszkód nie było, pręt wydłużyłby się o $w = l \alpha t$. Zatem ściany wywierają na jego końce równoważące się siły R , które powodują ściskanie pręta siłą $S = -R$. Nie możemy tu wstawić żadnego równania równowagi, bo nawet to ewentualne jedno staje się identycznością $R - R = 0$. Zagadnienie jest więc hyperstatyczne. Trzeba po prostu napisać, iż siła S wywołuje skrócenie pręta równe niedosłżemu termicznemu wydłużeniu. Zatem $\frac{Rl}{EA} = l \alpha t$, skąd $R = EA \alpha t$. Praktyczniej jest obliczyć $\sigma = \frac{S}{A} = -E \alpha t = -2000\ \text{kg/cm}^2$, co stanowi wycięzenie znacznej wartości.

Podaliśmy powyżej przykład zagadnienia hyperstatycznego, wynikłego z działania na układ przyczyny natury termicznej, a więc niemechanicznej. Jakkolwiek kalkulacja myślowa, jaką tu zastosowaliśmy, może być z powodzeniem użyta w ogóle do zadań niewyznaczalnych, jest ona jednak typowa a w każdym razie nieodzowna przede wszystkim dla swej niemechanicznej kategorii. Istota spekulacji polega tu na zwolnieniu podpory od siły biernej i zamianie jej na stosowaną czynną działającą wzdłuż oswobodzonego przemieszczenia. Rzecz ta coraz to wyraźniej ujawniać się będzie przy traktowaniu przykładów innych podrozdziałów.

Przykład 5.6. Wyznaczyć energię dW' rozciąganego pręta wychodząc z definicji (11.3) i (12.3).

Odpowiedź 5.6. Energia jednoosiowego stanu napięcia zamagazynowana w jednostce objętości wynosi - jak w zadaniu 8.3 - $W_0 = \frac{\sigma^2}{2E}$. W elemencie długości dz wynosi ona przeto $dW = \int \frac{\sigma^2}{2E} dA dz$, czyli po podstawieniu (6.6) i scałkowaniu na polu A - $dW = \frac{S^2}{2EA} dz$, skąd wynika W zgodne z (7.6).

Przykład 6.6. Obliczyć energię sprężystości dla układu traktowanego w przykładach 1.6 i 2.6.

Odpowiedź 6.6. Którąkolwiek z postaci formuły (7.6) zastosujemy, otrzymamy $W = \int_0^l W' dz = \frac{P^2 l}{2EA} = 38\ \text{kGm}$. Istotny w tym wyniku jest fakt, iż energia ta jest proporcjonalna do kwadratu siły zewnętrznej P .

Przykłady powyższe nie wyczerpują tematu. Można sobie wyobrazić rozmaite ciekawe i praktycznie ważne układy zbudowane z prętów prostych, z których każdy dla siebie będzie stanowił przypadek podstawowy, tu traktowany. Mogą to być np. wieszary, kratownice i inne układy wyznaczalne lub niewyznaczalne. Ostrożność zaleca nam omówić je w innych rozdziałach po wyczerpującym przedstawieniu różnych dostatecznie ogólnych metod postępowania. Okaze się, że między różnymi tymi układami trzeba będzie czynić nader subtelne różnice natury matematycznej, do czego nie jesteśmy jeszcze należycie przygotowani. Tamże bardzo obszerne zastosowanie znajdzie również pojęcie energii odkształcenia.

Bardziej celowe w tym miejscu będzie uzupełnienie naszych rozważań na obszary posprężyste. W obszarach odkształceń trwałych czynimy założenie, że i tutaj w rozciąganych lub ściskanych prętach powstaje jednoosiowy stan napięcia ze składową σ niezależną od miejsca w przekroju.

W strefie $\sigma = \pm k$, tj. ściśle plastycznej - jeśli taka istnieje - jest:

$$(\sigma) = kA, \quad (11.6)$$

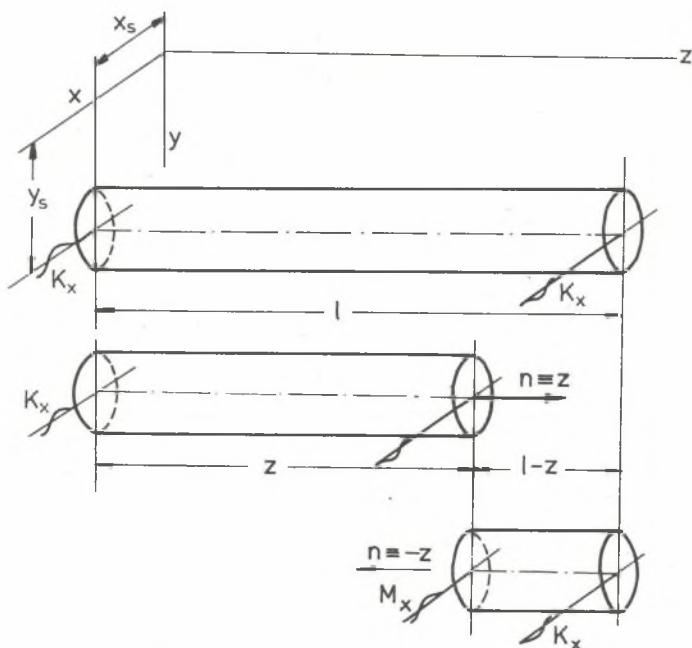
przy czym k jest naprężeniem na granicy plastyczności. Wydłużenie ϵ jest tu nieoznaczone. Można je określić w niektórych prętach układów niewyznaczalnych, rozważając ich nierozdzielność z pozostałymi prętami tego układu, trwających jeszcze w stanie sprężystym. Równanie (11.6) wyraża warunek plastyczności dla rozciąganych lub ściskanych prętów.

W strefie dowolnej zależności $\sigma = f(\epsilon)$ owa nieoznaczoność nie ma oczywiście miejsca. Przy zbyt wielkich naprężeniach powstają tu dwie wątpliwości zasadniczego znaczenia.

Pierwsza dotyczy zmiany rozmiarów poprzecznych pręta, modyfikującej definicję naprężenia. Była o tym mowa w czwartym rozdziale. Modyfikacja ta eliminuje tego rodzaju zagadnienia z grupy przypadków podstawowych, które w tym rozdziale rozważamy. Druga wątpliwość prowadzi również do identycznego wniosku. Wynika ona w wypadku materiałów ciągliwych ze zjawiska powstawania zwężki miejscowej, zwanej szyjką. Stan napięcia jest tu z pewnością trójosiowy. Poza tym zaś zjawisko to nie znalazło dotychczas mechanicznego wyjaśnienia; uchyla się przeto od naszych rozważań.

7. PROSTE RÓWNOMIERNE ZGINANIE

Zbiór sił działających na przekrój końcowy $z = l$, równowarty jest momentowi zewnętrznemu K_x , którego płaszczyzna jest prostopadłą do płaszczyzny tego przekroju, a jej normalną jest oś x . Inaczej mówiąc wektor K_x jest równoległy do osi x jak na rys. 1.7. Równoważący zbiór sił działających w przekroju początkowym $z = 0$ sprowadza się wobec tego również do przeciwnie skierowanego momentu zewnętrznego K_x . Wektory te dla prostoty rysunkowej przecięliśmy z osią pręta.



Rys. 1.7

Przypomnimy krótko wiadomości nabyte na powyższy temat w mechanice układów sztywnych. Wpływy wewnętrzne znajdziemy, dzieląc pręt dowolnym przekrojem z i odrzucając jedną z powstałych części. Operacja ta zamienia wielkości wewnętrzne na zewnętrzne, a tym samym umożliwia stosowanie równań równowagi do części drugiej, pozostawionej. Wynika z nich, że na przekrój z działa moment

$$M_x = K_x \quad (1.7)$$

równoległy do osi x . Dla rozważanej części jest on wielkością zewnętrzną. Jej znak ustalamy przeto, odnosząc zwrot M_x do aktualnej osi, jaką w tym wypadku jest oś x . Dla całego układu, a więc dla pręta długości l - ten zaś w istocie jest przedmiotem naszych zainteresowań - jest M_x wielkością wewnętrzną. Z tego to powodu zastosowaliśmy mimo ilościowej zgodności (1.7) odmienne oznaczenia.

Znak momentu M_x ustalamy, odnosząc jednocześnie jego zwrot i zwrot normalnej zewnętrznej n przekroju do kierunków aktualnych osi układu. Gdy normalna zewnętrzna przekroju jest zgodna z dodatnim kierunkiem osi z , to M_x jest dodatnie, gdy jego zwrot jest zgodny z dodatnim kierunkiem osi x . Gdy normalna zewnętrzna przekroju jest zgodna z ujemnym kierunkiem osi z , to M_x jest dodatnie, gdy jego zwrot jest zgodny z ujemnym kierunkiem osi x . Na rys. 1.7 założyliśmy więc takie obciążenie K_x , iż zaszedł wypadek $M_x > 0$.

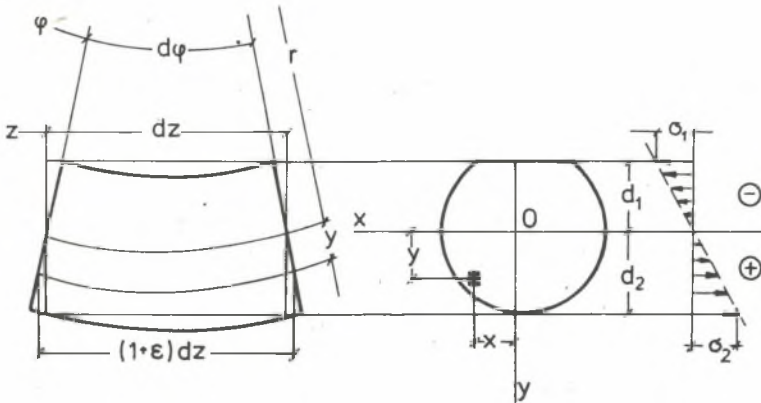
Moment wewnętrzny o omówionym położeniu nazywamy momentem zginającym. Mówimy o przypadku równomiernego zginania, gdy - jak to obecnie ma miejsce - moment zginający jest niezależny od zmiennej z , a więc jest stały na całej długości pręta l . Przypadek ten należy do grupy podstawowych. Dla prostoty będziemy w tym ustępie pisać krótko $M = M_x$.

Przejdziemy z kolei do rozważań na gruncie mechaniki układów odkształcalnych.

Widzimy z ustępu piątego, że w grupie przypadków podstawowych dopuszczamy do konkurencji co najwyżej naprężenia τ_y, τ_x, σ_z . Ponieważ zbiór równoległych do osi x tudzież y elementarnych sił $\tau_y dA$ a także $\tau_x dA$ mogłyby ewentualnie spowodować obecność sił poprzecznych i momentu skręcającego, przeto wykluczając tę możliwość założymy obok (6.5) dodatkowo najprościej (2.6). Oba te założenia uwalniają całkowicie pobocznice pręta od obciążeń. Jednocześnie widzimy, że - jeśli tylko przypuszczenia nasze są słuszne - stan napięcia w równomiernym zginaniu jest jednoosiowy. Jedyna różna od zera składowa σ_z nie zależy od zmiennej z , bo przyczyną ją wywołującą - M - jest stała. Składową tę w dalszym ciągu oznaczать będziemy krótko σ . Będziemy przeto usiłowali zbudować zginanie z równoległych ciągów σ - podobnie jak to uczyniliśmy w przypadku rozciągania. Skoro jednak przy rozciąganiu miały one stałą wartość w każdym punkcie przekroju, to słusznie wnioskujemy, że różnica leżeć będzie w tym, że ciągi te z konieczności muszą być obecnie funkcją miejsca (x, y) w przekroju. Zachodzi pytanie, czy nie mogą one być funkcją tylko jednej zmiennej, np. y , czy więc możliwe jest zgięcie proste.

Działanie momentu zginającego objawi się zakrzywieniem włókien pręta. Czyniąc zadość postulatowi nierozdzielności układu przyjmijmy, że zakrzy-

wienie to spowodowane obrotem każdego przekroju jak sztywnego kartonu zachodzi dokoła prostej położonej w płaszczyźnie odnośnego przekroju. Zajmiemy się przypadkiem prostego zginania. Zginanie nazywać będziemy zginaniem prostym lub pojedynczym, jeśli oś powyższego obrotu będzie równoległa do wektoru momentu M . Obierzmy na nią oś x - zwracając od razu uwagę na to, że chwilowo położenie tej prostej jest wprawdzie zdefiniowane, ale nie jest nam jeszcze znane. Warstwa włókien położona w płaszczyźnie xz nie dozna - według powyższego określenia - odkształcenia. Nazywać ją będziemy warstwą obojęt-



Rys. 2.7

tną. Ślad jej w płaszczyźnie przekroju nazwiemy linią obojętną. Przeto oś x jest linią obojętną. Element pręta długości dz przyjmie kształt klinca - jak na rys. 2.7. Przekrój z obróci się o kąt φ , przekrój zaś sąsiedni $z + dz$ o kąt $\varphi + d\varphi$. Jeśli promień zakrzywienia r mierzyć będziemy od warstwy obojętnej, to zachodzić będzie związek:

$$\frac{1}{r} = \frac{d\varphi}{dz} = \varphi' \quad (2.7)$$

Włókna położone w głębokości y pod warstwą obojętną doznają zdłużu $\varepsilon_z = \varepsilon$; przeto włókno tam umieszczone pierwotnej długości dz przyjmie długość $(1 + \varepsilon)dz$. Z podobieństwa dwóch wycinków kołowych wynika proporcja $(1 + \varepsilon)dz : dz = (r + y) : y$ skąd w połączeniu z (2.7) wynika równość

$$\varepsilon = \varphi' y, \quad (3.7)$$

gdzie znaczek ' oznacza pochodną zetową. Równanie to wyraża założony drobny obrót przekroju; wyraża ono zachowania p ł a s k o ś c i przekroju po dokonanej deformacji. Wielkość φ' określającą zachowanie się geometryczne w s z y s t k i c h w ł ó k i e n zawartych między dwoma przekrojami oddalonymi o pomyślaną jednostkę długości, a zatem wielkość charakteryzującą zachowanie się c a ł e g o p r z e k r o j u n a z y w a ć b ę d z i e m y z a k r z y w i e n i e m p r ę t a.

W jednoosiowym stanie napięcia wydłużeniu włókien w kierunku osi z towarzyszyć będzie swobodne poprzeczne ich zwężenie $-\mu\varphi'y$ w kierunkach x oraz y . Zatem przekrój pozostając płaskim nie zachowuje się jednak jak sztywna pod każdym względem całość; w płaszczyźnie swej dozna on odkształcenia. Odkształcenie to w teorii prętów litych na ogół mało nas interesuje. Reasumując zauważmy, że przedstawiona koncepcja geometryczna zapewnia nierozdzielność elementów pręta.

Naprężenie σ jednoosiowego stanu napięcia wynosi:

$$\sigma = E \varphi' y. \quad (4.7)$$

Elementarne siły σdA , działające na przekrój, tworzą zbiór równoległy. Warunki redukcji - jeden sił i dwa momentów - mają postać

$$\int \sigma dA = 0, \quad \int x \sigma dA = 0, \quad \int y \sigma dA = M, \quad (5.7)$$

wyrażającą brak siły podłużnej i momentu M_y , lecz jedynie momentu $M_x = M$. Podstawiając tu (4.7) i uważając na to, że iloczyn $E \varphi'$ można wyłączyć przed znak całki znajdziemy:

$$\int y dA = 0, \quad \int x y dA = 0, \quad E \varphi' \int y^2 dA = M, \quad (6.7)$$

tj. trzy równania, z których dwa pierwsze zgodnie z wymaganiami geometrii analitycznej określają położenie osi x w płaszczyźnie xy , a trzecie określa zakrzywienie φ' .

Zajmijmy się najpierw odcyfrowaniem położenia linii obojętnej x w prostym zginaniu. Pierwsze z równań zgodnie z (2.5) wyjaśnia, iż oś x przechodzi przez środek geometryczny przekroju. Z pęku tego rodzaju prostych mamy wybrać tę, która czyni jednocześnie zadość drugiemu równaniu. Z pozorów wydaje się, że drugie z tych równań nie daje dostatecznego wyjaśnienia, albowiem obliczenie boczniaka wymaga znajomości nadto osi y . Aby wątpliwości te rozwiązać wyobraźmy sobie, że dla którejjkolwiek z prostych x o własności $\int y dA = 0$ dobraliśmy d w i e do niej prostopadłe osie y wzajemnie odległe o długość a . Dla jednej z nich jest spełniony postulat $\int x y dA = 0$. Wtedy dla drugiej analogiczne wyrażenie $\int (x + a) y dA = \int x y dA + a \int y dA$ również - jak widzimy - znika, bo znikają oddzielnie oba dodajniki tego wyrażenia. W rozważanych warunkach jest prze-

to obojętne, który z punktów osi x przyjmiemy za początek osi y . Skoro więc oś x przechodzi przez środek geometryczny przekroju, dla prostoty przesunemy również oś y przez ten punkt. Wiemy jakie znaczenie posiada warunek (5.5).

Ostatecznie przeto możemy stwierdzić: W zgięciu prostym linia obojętna jest jedną z głównych osi środkowych ukształtowania (bezwładności) przekroju. Pamiętajmy jednak o tym, że a priori założyliśmy, że linia ta pokrywa się z osią wektora M . Więc zgięcie pojedyncze można wywołać tylko wtedy, gdy moment zginający działa dokoła jednej z głównych osi przekroju. W przypadku prostego zginania zakrzywiona oś pręta umiejscowia się w płaszczyźnie pary zginającej.

Ustalwszy w ten sposób położenie linii obojętnej x możemy przejść do ostatniego z równań (6.7). Stosując w oznaczeniu (3.5) uproszczenie pisoni $I_x = I$ znajdujemy

$$\varphi' = \frac{M}{EI} \quad (7.7)$$

Ponieważ M jest niezależne od z , przeto takim też jest φ' , z czego wynika, iż oś pręta przechodzi w łuk koła. Wracając z powyższym ważnym wynikiem do (4.7) otrzymamy:

$$\phi = \frac{M}{I} y. \quad (8.7)$$

Rezultat ten czyni zadość warunkom równowagi (2.2). Uczyniliśmy przeto zadość w s z e l k i m wymogom stawianym przez mechanikę układów odkształcalnych. Rozwiązanie (7.7) i (8.7) jest przeto ś c i s ł y m rozwiązaniem zagadnienia prostego zginania, jednakże przy zastrzeżeniu, że momenty $K_x = K$ na obu końcach pręta pochodzą od powierzchniowych zbiorów sił, zgodnych również z rozmieszczeniem (8.7). Gdy tak nie jest, krótkie skrawki pręta trzeba wyłączyć z rozwiązania.

Ważną cechą geometryczną rozwiązania jest zachowanie trwałej płaskości przekroju. Pozwala to zbudować układ złożony z kilku różnych i różnie obciążonych prętów, a posiadających wspólną oś bez luk po ich zakrzywieniu przy użyciu prostego warunku pośredniczącego, stwierdzającego wspólność kąta φ na końcu jednego i początku drugiego pręta.

Formuła (7.7) poucza, iż w obszarze sprężystym względny obrót $d\varphi$ dwóch sąsiadujących przekrojów jest proporcjonalny względem przyczyny M i do niej równoległy. Powtarzając więc rozumowanie ustępu trzeciego możemy dla energii sprężystości zawartej w odcinku pręta długości elementarnej dz dać wyrażenie $dW = \frac{1}{2} M d\varphi$, czyli przy zużytkowaniu (7.7)

$$W' = \frac{1}{2} M \varphi' = \frac{1}{2} \frac{M^2}{EI} = \frac{1}{2} EI \varphi'^2, \quad (9.7)$$

przy czym znak ' oznacza pochodną zetową. Formuła powyższa określa energię odkształcenia zawartą w przypadku prostego zginania między dwoma przekrojami pręta, oddalonymi o pomyślaną jednostkę długości.

Wzory (7.7), (8.7) i (9.7) stanowią w obszarze sprężystym komplet formuł dla rozważanego przez nas zagadnienia. Celowe jest w miejsce (8.7) podać inną, jeszcze prostszą, czym się obecnie przy omawianiu wzorów dodatkowo zajmiemy.

Iloczyn EI nosi nazwę **s z t y w n o ś c i z g i n a n i a** (prostego). Istotnie zakrzywienie φ' jest tym mniejsze, im większe jest EI . Pręt nie doznałby zakrzywienia bez względu na wielkość momentu M , gdyby EI było nieograniczenie wielkie byłby idealnie sztywny - jak w mechanice układów sztywnych. O tej sztywności decyduje nie pole A , jak w przypadku rozciągania, lecz jego kształtnik I względem linii obojętnej. Pragnąc więc otrzymać wielką sztywność musimy polu A nadać taką konfigurację, by uzyskać wielkie I . Zależnie od sposobu wytwarzania wagi, ceny i innych cech materiału udaje nam się to w większym lub mniejszym stopniu. Ogólnie biorąc usiłujemy przeważną część materiału umieścić w znacznej odległości od przyszłej linii obojętnej. Belka kratowa równoległa jest przykładem pręta, w którym zamierzenia powyższe wychodzą jakkrawo na jaw. Tworzywo skupione jest tu w pasach górnym i dolnym, część pozostałą tworzą krzyżulce, które wetawiamy tylko z konieczności dla utrzymania łączności między pasami. Innego właściwego przykładu dostarcza walcowany z miękkiej stali dźwigar dwuteowy zwykły, a tym bardziej ezerokostopowy. Dźwigary walcowane mają profile znormalizowane przez huty, które podają dla nich całkowity opis geometryczny, zawierający między innymi też pozycję I .

Do analogicznych uwag konstrukcyjnych prowadzi analiza formuły (8.7). Naprężenie σ jest proporcjonalne do odległości y włókna od linii obojętnej x . Wynika stąd wykres naprężeń podany na rys. 2.7. Największego wyciężenia doznają włókna **s k r a j n e**, tj. te, których odległość od linii obojętnej jest największa. Linia obojętna dzieli przekrój na dwie strefy - rozciąganą i ściskaną. W jednej z nich cis, w drugiej ciąg przyjmuje największą możliwą wartość, a to

$$\sigma_1 = - \frac{M}{I} d_1, \quad \sigma_2 = + \frac{M}{I} d_2.$$

Ilorazy I/d_1 i I/d_2 mają charakter czysto geometryczny; zależą one bowiem tylko od postaci przekroju A . Wprowadźmy przeto nowe pojęcie

$$x_{1,2} = \frac{I}{d_{1,2}} \quad (10.7)$$

o wymiarze długości w trzeciej potędze, które nazwiemy nośnikami prostego zginania (wskaźnikiem zginania, momentem wytrzymałości przy zgięciu). Naprężenia włókien skrajnych przyjmą obecnie postać:

$$\sigma_1 = -\frac{M}{X_1}, \quad \sigma_2 = +\frac{M}{X_2},$$

lub zwyczajową krótką

$$\sigma = \frac{M}{X}, \quad (11.7)$$

w której dla prostoty pisowni pominęliśmy wskaźniki i znaki.

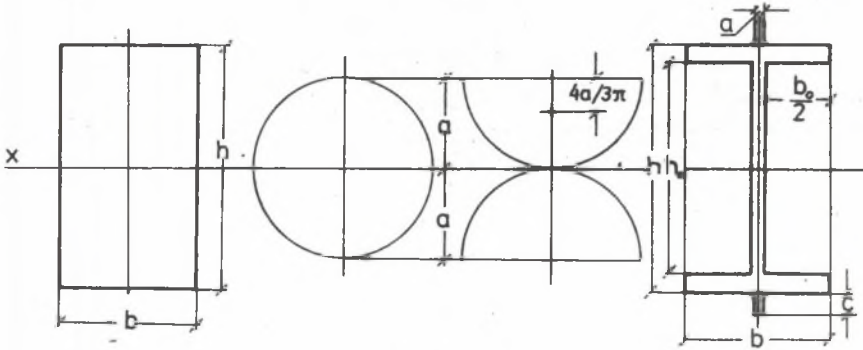
Znajomość nośników X_1, X_2 wystarcza do znalezienia naprężeń σ_1, σ_2 włókien; ta z kolei wystarcza do znalezienia - jeśli to w ogóle będzie potrzebne - naprężeń w dowolnych miejscach y przekroju, albowiem bryła naprężeń ograniczona jest płaszczyzną jak na rys. 2.7. Wobec tego formuła (11.7) stanowi użytkową, bardzo cenną i powszechnie stosowaną postać wzoru (8.7).

Nośnik X jest miarą u d z w i g u pręta zginanego. Chcąc uzyskać możliwie wielką nośność, winniśmy przekrój uformować tak, by uzyskać przy danym A możliwie wielkie X . Postępować więc trzeba podobnie jak przy tworzeniu wielkiego I , jednakże - wobec roli wielkości d we wzorze (10.7) - z tą uwagą, by materiałowi umieszczonemu we włóknach skrajnych nadać postać w y d ł u z o n ą równoległą do linii obojętnej. Postępując w ten sposób uzyskamy to, że przy przekształcaniu postaci geometrycznej przekroju z ustalonym A ze wzrostem I rosnąć r ó w n i e ż będzie X . Nadmierne poszerzanie musi jednak mieć swój kres. Rozmiary poprzeczne pręta powinny być w obu kierunkach x, y tego samego rzędu. Nadmierne zwiększenie jednego w porównaniu z drugim przekształca pręt w ustrój płytowy, w którym stan napięcia jest odmienny od tu przedstawionego. Tablice dźwigarów walcowanych zawierają między innymi również pozycję X .

Przykład 1.7. Podać nośnik prostokąta i koła.

Odpowiedź 1.7. Dla prostokąta jest $I = \frac{bh^3}{12}$, $d_{1,2} = \frac{h}{2}$, wobec tego $X_{1,2} = \frac{bh^2}{6}$. Dla koła jest $I = \frac{a^4\pi}{4}$, $d_{1,2} = a$, wobec tego $X_{1,2} = \frac{a^3\pi}{4}$. Wyniki te warto zapamiętać, zwracając uwagę na usytuowanie rozmiarów profilu względnie linii obojętnej x jak na rys. 3.7.

Przykład 2.7. Pięń drewniany rozcięto symetrycznie wzdłuż i po obróceniu z powrotem złączono jak na rys. 3.7. Ile zyskano na sztywności i nośności?



Rys. 3.7

Odpowiedź 2.7. Kształtnik nowego profilu wynosi:

$$I = 2\left(\frac{a^4\pi}{8} - \frac{a^2\pi(4a)^2}{2} + \frac{a^2\pi(a - \frac{4a}{3\pi})^2}{2}\right) = \frac{5a^4\pi}{4} - \frac{8a^4}{3},$$

albowiem współrzędna środka połowki koła względem średnicy jest równa $\frac{4a}{3\pi}$.
 Nośnik nowego profilu $x_* = \frac{I}{a} = \frac{5a^3\pi}{4} - \frac{8a^3}{3}$. Zatem wspólny zysk dla kształtownika i nośnika wynosi:

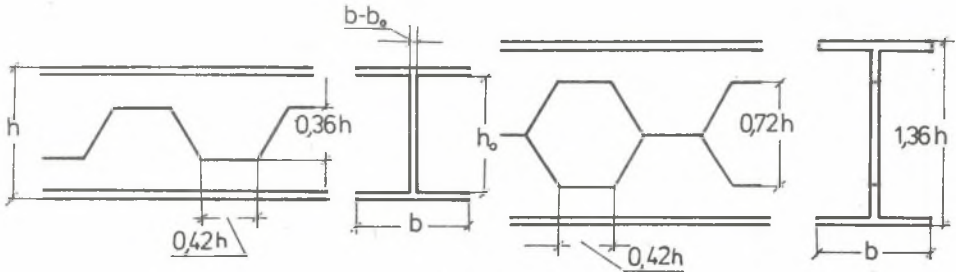
$$\frac{I_* - I}{I} = \frac{x_* - x}{x} = 4 - \frac{32}{3},$$

czyli ponad 60% ich wartości poprzednich.

Przykład 3.7. Szerokostopowy dźwigar o rozmiarach b, h, b_0, h_0 postanowiono wzmocnić, dospawując doń symetrycznie wstęgi stalowe o rozmiarach a, c jak na rys. 3.7. Czy nośność istotnie wzrośnie? Jaki winien być co najmniej stosunek a/b jeśli $b_0 = 0,94 b, h_0 = 0,86 h, c = ah = 0,21h$?

Odpowiedź 3.7. Kształtnik i nośnik przekroju pierwotnego wynoszą: $I = \frac{1}{12}(bh^3 - b_0h_0^3) = \frac{1}{30}bh^3, x = \frac{2I}{h} = \frac{1}{15}bh^2$. Po dospojeniu wstęg przyjmą one wartość $I = I + I', x_* = \frac{I + I'}{h + \frac{I'}{2c}}$, gdzie $I' = \frac{ac^2}{6} (4c^2 + 6ch + 3h^2)$. Zatem sztywność z pewnością wzrośnie. Nośność zaś wzrośnie lub zmaleje zależnie od nierówności $x_* \geq x$ czyli nierówności $I'h \geq 2Ic$, która przyjmuje tu postać $ah(4c^2 + 6ch + 3h^2) \geq bh^3 - b_0h_0^3$. W warunkach określonych tekstem udźwig wzrośnie, gdy będzie $\frac{a}{b} > \frac{12}{30} \frac{h^2}{4c^2 + 6ch + 3h^2} = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4a^2 + 6a + 3} = \frac{9}{100}$. Szerokość ścianki dźwigara wynosi tu $\frac{6}{100} b$. Gdy więc dołączymy wstęgi mniej aniżeli półtorakrotnie szersze od grubości ścianki, to nieopatrnie zmniejszymy jego udźwig, marnując materiał i koszty robocizny.

Przykład 4.7. Dźwigar dwouteowy z poprzedniego przykładu przecięto wzdłuż regularnej linii łamanej jak na rys. 4.7.



Rys. 4.7

Rozcięte części rozsunęto i stosownie względem siebie przesunięto po czym zespojono, uzyskując dźwigar wyższy o 0,36 h. Co uzyskano?

Odpowiedź 4.7. W rozdziale niniejszym mowa jest o prętach posiadających stały przekrój. Przyjmijmy zaś przekrój składający się z dwóch liter T, uważając okresową resztę tylko za połączenie tych dwu części. Kształtnik tak powstałego przekroju jest równy:

$$I_* = \frac{1}{12}(b(h + 0,36h)^3 - b_0(h_0 + 0,36h)^3 - (b-b_0)(0,72h)^3) \approx \frac{1}{15} bh^3,$$

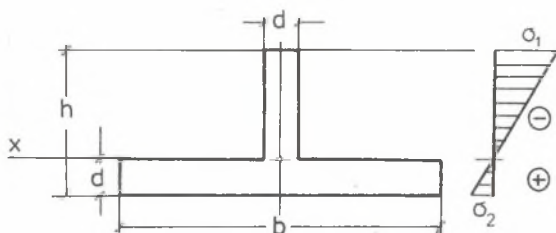
gdym dla nie przeciętego dwouteownika był równy $I \approx \frac{1}{30} bh^3$. Nośnik nowy wynosi $x_* = \frac{2I_*}{h + 0,36h} \approx \frac{1}{10} bh^2$, gdy poprzedni wynosił $x = \frac{1}{15} bh^2$. Zyskano zatem na sztywności ponad 100%, na udźwigu zaś prawie 50%.

Kształtując przekrój poprzeczny zginanego pręta zwrócić musimy uwagę na ważną dodatkową okoliczność. Zwróciliśmy w punkcie czwartym uwagę na to, że materiały kruche posiadają wybitnie większą wytrzymałość K_c na ściskanie aniżeli na rozciąganie K_r . Gdy więc przekroje z tworzyw ciągliwych formujemy tak, by linia obojętna połowiła ich wysokość, u kruchych postąpimy ekonomicznie tak, by spełnić równość $\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{K_c}{K_r}$, a zatem równość $\frac{x_2}{x_1} = \frac{K_c}{K_r}$ i wreszcie - z tytułu określenia (10.7) - równość:

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{K_c}{K_r}, \quad (12.7)$$

gdzie d_1 jest wysokością strefy ściskanej, d_2 zaś rozciąganej.

Przykład 5.7. Żeberkowy (teowy) przekrój z żeliwa $K_c/K_r = 3$ postanowiono ukształtować tak, by grubość żebra była równa grubości płyty d , by ponadto linia obojętna pokrywała się z krawędzią półki. Wyznaczyć wykładniki stosunków h/d i b/d .



Rys. 5.7

Odpowiedź 5.7. Oddalenie geometrycznego środka przekroju od jego dolnej krawędzi $\frac{1}{2} \frac{bd + h^2 - d^2}{b + h - d}$ winno być równe d , zgodnie zaś z (12.7) powinno też być $\frac{h-d}{d} = 3$. Z dwu równań $h^2 - 2hd - bd + d^2 = 0$, $h = 4d$ wynika $b/d = 9$, $h/d = 4$ jak na rys. 5.7.

Dochowanie warunku (12.7) przy użyciu materiałów o bardzo małej wytrzymałości na rozciąganie nie jest praktycznie możliwe, bo prowadzi do konstrukcyjnie i teoretycznie niefortunnych kształtów przekroju. W takich wypadkach wprowadzamy założenie upraszczające $K_r = 0$ i strefę rozciągającą pręta wykonujemy z drugiego ciągliwego materiału, zabezpieczając oczywiście współdziałanie obu. Na tego rodzaju idei zasada się konstrukcja i teoria belki stal-betonowej. Przekrojem ekonomicznym pręta stal-betonowego jest przekrój teowy, z tym jednakże, że jego stopa stanowi tu strefę ściskaną, a żebro spełnia rolę zabezpieczającego współdziałanie schronienia dla wkładek stalowych, umieszczonych w nim możliwie daleko od linii obojętnej. Nie demonstrujemy tu przykładu obliczenia takiego ustroju jako tematu zbyt odległego od naszego kursu, zajmuje się nim oddzielny przedmiot nauk inżynierskich.

Formuła (11.7) zależnie od danych i niewiadomych służyć może do sprawdzenia wyciężenia, do wyznaczenia bezpiecznego momentu, wreszcie do zaprojektowania przekroju. Naprężenia bezpieczne stref rozciąganej i ściskanej zginanych prętów są nieco różne od odnośnych naprężeń bezpiecznych, rozciąganych względnie ściskanych prętów. Pochodzenie tej różnicy wyjaśnimy w następnym punkcie.

Przykład 6.7. Moment zginający wynosi $M = 1$ tm. Przyjmując dla drzewa naprężenie bezpieczne $\sigma_0 = 90$ kg/cm², a dla stali $\sigma_0 = 1400$ kg/cm² zaprojektować przekrój prostokątny o wykładniku $h/b = 1.4$.

Odpowiedź 6.7. Dla przekroju prostokątnego jest $X = \frac{bh^2}{6} = \sim \frac{b^3}{3}$; zatem $b = \sqrt[3]{\frac{3M}{\sigma_0}}$. Dla drzewa zatem jest $b = 15$ cm, $h = 21$, dla stali zaś $b = 60$ mm, $h = 84$ mm.

Przykład 7.7. Uzupełniając daty poprzedniego przykładu wykładnikami $h_0/h = 0.86$, $h_0/b = 0.94$ wyznaczyć rozmiary stalowego przekroju dwuteowego. Jak wielka jest oszczędność na materiale?

Odpowiedź 7.7. Według przykładu 3.7 mamy tu $X = \frac{bh^2}{15} = \sim \frac{b^3}{7,5}$, zatem $b = \sqrt[3]{\frac{7,5M}{\sigma_0}} = \sim 80$ mm, $h = \sim 115$ mm. Grubość stopki wynosi 8 mm, a ścianki 5 mm. Pole przekroju wynosi tu $17,8$ cm², gdy poprzednio wynosiło $50,4$ cm², tj. niemal 3 razy więcej.

Formuła (7.7) może służyć bezpośrednio do obliczenia zakrzywienia pręta. Niekiedy, gdy względy konstrukcyjne ograniczają to zakrzywienie, służyć ono też może do wyznaczenia koniecznych rozmiarów przekroju. Jej znaczenie uwidacznia się jednak najwyraźniej przy rozwiązywaniu zagadnień hyperstatycznych.

Przykład 8.7. Obliczyć promienie krzywiznowe w dwu poprzednich przykładach przyjmując, że stała E wynosi dla drzewa $100\ 000$, dla stali 2000000 kg/cm².

Odpowiedź 8.7. Dla przekroju prostokątnego jest $I = \frac{bh^3}{12}$, dla dwuteowego zaś o użytych wykładnikach jest $I = \frac{bh^3}{30}$. Znajdziemy więc dla pręta drewnianego $r = 116$ m, dla stalowych zaś $r = 59$ m względnie $r = 81$ m.

Z przykładu powyższego wynikają interesujące wnioski: Stosunek $\frac{r}{h}$ wynosi tu dla drzewa 550 dla stali zaś 700. Ponieważ przemieszczenia pręta są odwrotnie proporcjonalne do r , przeto widzimy, że - zgodnie z założeniami teoretycznymi - są one małe w porównaniu do rozmiarów poprzecznych pręta. Z drugiej strony zaś widzimy, że stałe wysokowartościowe, tj. stałe, dla których dopuszczamy wysokie naprężenie bezpieczne, mają niestety ograniczony zakres konstrukcyjny w tych wypadkach, w których musimy zwracać baczną uwagę na przemieszczenia układu. W rozpatrywanych przykładach pręty stalowe okazały się mniej sztywne od drewnianego. Zyskalibyśmy wybitnie na sztywności dopuszczając dla nich tylko $\sigma_0 = 1000$ kg/cm².

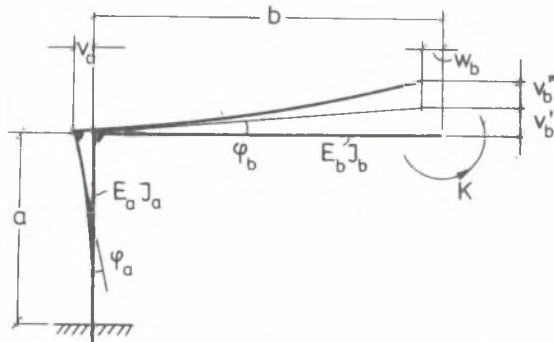
Przykład 9.7. Jak się zmieni stan napięcia i sztywność pręta drewnianego w przykładzie 6.7, jeśli wzmocnimy go z obu stron wyższymi blachą stalową grubości $c/2 = 1,5$ mm.

Odpowiedź 9.7. Moment zginający $M = 1$ tm rozdzieli się na drzewo i stal. Zadanie jest niewyznaczalne statycznie, albowiem dysponujemy jednym tylko równaniem statycznym $M_d + M_s = M(a)$. Skoro jednak blacha współdziała z drzewem, zakrzywienie obu musi być zgodne, skąd wynika warunek nierozdzielności $\frac{M_d}{E_d I_d} = \frac{M_s}{E_s I_s}$ (b) jako drugie równanie. Z obu znajdziemy

$$M_d = M \cdot \frac{E_d I_d}{E_d I_d + E_s I_s} = \frac{5}{7} M \quad M_s = M \frac{E_s I_s}{E_d I_d + E_s I_s} = \frac{2}{7} M,$$

skąd $\sigma_d = \frac{6M_d}{nh^2} = 65$ kg/cm² nadto $\sigma_s = \frac{6M_s}{ch^2} = 1300$ kg/cm². Warto tu zwrócić uwagę na stosunek $\sigma_s/\sigma_d = E_s/E_d = 20$. Promień zakrzywienia wzrósł do wartości $r = \frac{E_d I_d + E_s I_s}{M} = 162$ m.

Przykład 10.7. Wyznaczyć przemieszczenia końca swobodnego układu jak na rys. 6.7, obciążonego momentem K .



Rys. 6.7

Odpowiedź 10.7. Każdy z prętów pod działaniem równomiernego zginania momentem $M = K$ przyjmie postać łuku kołowego. Przekrój utwierdzony nie dozna ani przesunięcia ani obrotu. Przekrój końcowy pręta a obróci się o $\varphi_a = \frac{Ka}{E_a I_a}$. Wobec tego złączony i nim sztywnie pręt b obróci się o ten kąt $\varphi_b = \varphi_a$, wskutek czego koniec swobodny dozna przemieszczenia $v_b' = \varphi_b b = \frac{Kab}{E_a I_a}$. Promień zakrzywienia pręta a wynosi $r_a = \frac{E_a I_a}{K}$. Wynika stąd przemieszczenie jego końca $v_a = \frac{a^2}{2r_a} = \frac{Ka^2}{2E_a I_a}$. Tyle samo wynosi przemieszczenie $w_b = v_a$ końca b . Wreszcie dla pręta b jest $r_b = \frac{E_b I_b}{K}$, a stąd $v_b'' = \frac{b^2}{2r_b} = \frac{Kb^2}{2E_b I_b}$. Ostatecznie koniec swobodny układu dozna przemieszczeń $w_b = \frac{Ka^2}{2E_a I_a}$ tudzież $v_b = v_b' + v_b'' = \frac{Kab}{E_a I_a} + \frac{Kb^2}{2E_b I_b}$.

Oba one są proporcjonalne względem K .

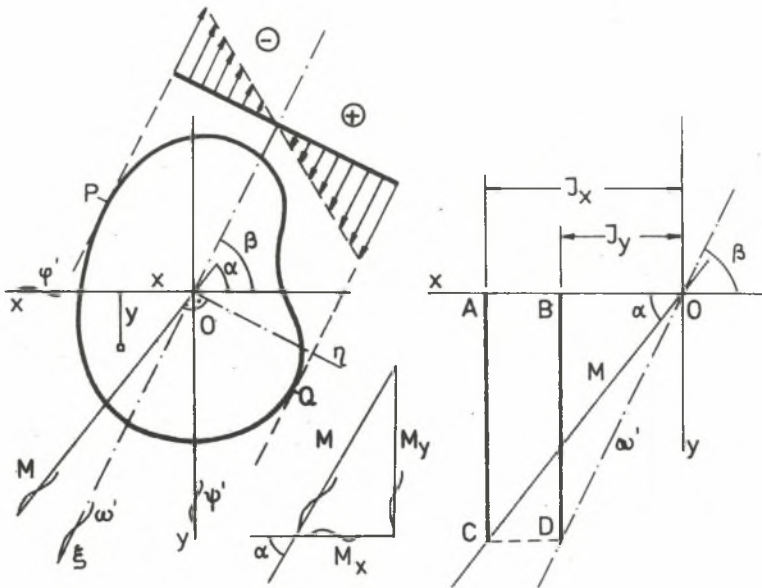
W innym rozdziale podamy metody, które dla układów zachowujących się w ostatnio podkreślony sposób bardzo szybko prowadzić będą do celu. Odgrywa w nich niepoślednią rolę pojęcie energii sprężystości.

Przykład 11.7. Obliczyć energię odkształcenia W prostego zginania wychodząc z definicji (11.3) i (12.3).

Odpowiedź 11.7. Stan napięcia jest jednoosiowy, przeto $dW = \int \frac{\sigma^2}{2E} dAdz$ lub po uwzględnieniu (8.7) $dW = dz \cdot \frac{M^2}{2EI^2} \int y^2 dA = \frac{M^2}{2EI} dz$, skąd W zgodne z (9.7). Energia pręta długiego l wynosi $W = \frac{M^2 l}{2EI}$.

8. UKOŚNE RÓWNOMIERNE ZGINANIE

Zginanie nazywamy *ukośne* lub *podwójne*, gdy wektor momentu zginającego M nie pokrywa się z żadną z dwu głównych osi x, y ukształtowania przekroju. Rozpatrzmy obecnie ten przypadek, zakładając znów, że należy on do grupy przypadków podstawowych a więc gdy moment zginający M jest stały i równy momentowi zewnętrznemu K , czyli gdy zginanie jest równomierne.



Rys. 1.8

Niechże na rys. 1.8 osie x, y będą osiami głównymi zaznaczonego tam przekroju. Przyjawszy prawy układ osi x, y , z widzimy, że dodatni kierunek osi z skierowany jest przed płaszczyznę rysunku. Niech normalna zewnętrzna n przekroju pokrywa się z tą osią. Najwidoczniej przeto składowe główne

$$M_x = M \cos \alpha, \quad M_y = M \sin \alpha, \quad (1.8)$$

podanego na rysunku momentu zginającego M są dodatnie. Nie umniejsza to - oczywiście - ogólności naszych rozważań. Zastosujemy dla rozwiązania zagadnienia zasadę superpozycji.

Gdyby momenty M_x i M_y działały oddzielnie, każdy z nich wywołałby oddzielne zakrzywienie, zbudowane na wzór (7.7), tj.:

$$\varphi' = \frac{M_x}{EI_x}, \quad \psi' = \frac{M_y}{EI_y}. \quad (2.8)$$

Każde oddzielne zginanie byłoby proste, tj. wektor φ' byłoby zgodnie równoległy do M_x , wektor zaś ψ' zgodnie równoległy do M_y . Zasada superpozycji prowadzi do wniosku, iż moment całkowity $M = \left| \sqrt{M_x^2 + M_y^2} \right|$ wywoła te same zakrzywienia składowe, czyli całkowite $\omega' = \left| \sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2} \right|$.

Wprowadzając skrót

$$\frac{1}{I} = \left| \sqrt{\frac{\cos^2 \alpha}{I_x^2} + \frac{\sin^2 \alpha}{I_y^2}} \right|, \quad (3.8)$$

możemy całkowitemu zakrzywieniu nadać postać:

$$\omega' = \frac{M}{EI}. \quad (4.8)$$

Wyrażenie I nie wyraża tu jednak kształtnika względem jakiejś znanej nam osi, ma z nim jedynie wspólny wymiar. Położenie wektora ω' określa punkt przecięcia się wektorów φ' , ψ' , tj. środek geometryczny przekroju, poza tym jego nachylenie β względem osi x . Obliczyć je można ze związku $\operatorname{tg} \beta = = \psi'/\varphi'$, który po uwzględnieniu (1.8) i (2.8) przyjmie postać:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{I_x}{I_y} \operatorname{tg} \alpha. \quad (5.8)$$

Znajomość funkcji tg pozwala wyznaczyć \cos i \sin . Łatwo znaleźć:

$$\cos \beta = \frac{I}{I_x} \cos \alpha, \quad \sin \beta = \frac{I}{I_y} \sin \alpha, \quad (6.8)$$

gdzie I określa skrót (3.8). Nie ma nic niezwykłego w tym, że β zależy od ukształtowania przekroju. Natomiast za bardzo korzystny zbieg okoliczności matematycznych należy pożytywać fakt, iż nie zależy od wielkości momentu M , tylko od jego orientacji α .

Przy $I_x \neq I_y$ jest najwidoczniej $\beta \neq \alpha$. Odmienne zatem aniżeli w zgięciu prostym, przekroje pręta pozostając płaskimi obracają się dokoła prostych ω' nie pokrywających się z wektorem M . Inaczej mówiąc, prostopadła do ω' płaszczyzna zakrzywionej osi pręta jest odczynioną od płaszczyzny pary zginającej o kąt $\beta - \alpha$.

Zakrzywienie ω' jest jednym z skutków przyczyny M . Z wielu praktycznych i teoretycznych względów to uogólnione przemieszczenie ω' rozkładamy często na części składową i bocznią. Pod przemieszczeniem składowym rozumiemy część równoległą do przyczyny, pod bocznym zaś część prostopadłą do przyczyny. Wynoszą one tu $\omega_{||} = \omega' \cos(\beta - \alpha)$ tudzież $\omega_{\perp} = \omega' \sin(\beta - \alpha)$. Rozwijając tu obie funkcje trygonometryczne i uwzględniając równości $\omega' \cos \beta = \varphi'$, $\omega' \sin \beta = \psi'$, nadto określenia (2.8) znajdziemy:

$$\omega'_{||} = \frac{M_x}{EI_x} \cos \alpha + \frac{M_y}{EI_y} \sin \alpha, \quad \omega'_{\perp} = -\frac{M_x}{EI_x} \sin \alpha + \frac{M_y}{EI_y} \cos \alpha. \quad (7.8)$$

W literaturze przedmiotu podaje się wykreślną konstrukcję kąta β . Owa uporzędkowanie podawana konstrukcja polega na wyznaczeniu średnic sprzężonych pewnej elipsy. Uważając ją za piękny wprowadzenie ale tylko historyczny zabitek, podajemy oryginalną prostą metodę znalezienia kąta β . Na dodatniej osi x odcinamy w dowolnie przyjętej podziałce kształtniki I_x, I_y , w końcach A, B tych odcinków kreślimy przynależne rzędne, a z początku O kierunek α momentu M . Znaleziony w ten sposób punkt C odrzucamy równoległe do osi x w D , zyskując nachylenie β . Istotnie z konstrukcji tej wynika równość $I_x \operatorname{tg} \alpha = I_y \operatorname{tg} \beta$ zgodny z (5.8).

Moment M_x wywoła w punkcie (x, y) przekroju naprężenie $\sigma_z = + M_x y / I_x$. Analogicznie moment M_y wywoła tam naprężenie $\sigma_z = - M_y x / I_y$. Znak pierwszej formuły nie budzi wątpliwości. Znak drugiej wynika stąd, że dla $M_y > 0$ strefą rozciąganą jest część $x < 0$, a ścisnącą część $x > 0$ przekroju. W rezultacie moment całkowity M wywoła w punkcie (x, y) przekroju naprężenie

$$\sigma = \frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x, \quad (8.8)$$

dla którego znaczek z pominięto. Użyto go przed chwilą celem zwrócenia uwagi na to, że skutki częściowe mogą być dodane algebraicznie, bo są one naprężeniami podłużnymi tej samej orientacji z .

Bryła naprężeń ograniczona jest płaszczyzną. Krawędź przecięcia się jej z płaszczyzną przekroju jest linią obojętną, tj. miejscem geometrycznym punktów o własności $\sigma = 0$. Jest to najwidoczniej prosta $y = x \frac{I_x}{I_y} \frac{M_y}{M_x}$ lub

po uwzględnieniu (1.8) prosta $y = x \operatorname{tg} \beta$, więc ostatecznie prosta ω' . Zatem - jak w zgięciu pojedynczym - przekrój obraca się dokoła linii obojętnej. Naprężenia rosną (co do bezwzględnej wartości) wraz z oddaleniem od tej linii. Wynika stąd uzupełnienie rys. 1.8 wykresem naprężeń, wynikającym z przecięcia bryły naprężeń płaszczyzną prostopadłą do linii obojętnej.

Gdy przekrój ograniczony jest krzywą posiadającą analitycznie określone równanie, ciągłą styczną, skrajne liczebnie naprężenia obliczamy poszukując ich analitycznego ekstremum. Podstawiając mianowicie w (8.8) równanie brzegu $y = f(x)$, określimy σ jako funkcję $\sigma = F(x)$ zmiennej x . Gdy łuki ograniczające kontur mają załamania, należy nakreślić linię obojętną celem przekonania się, dla których łuków poszukiwać ekstremum. Gdy brzeg przekroju nie jest określony krzywą analityczną, należy wyznaczyć linię obojętną i nakreślić równoległe do niej styczne do konturu. Na rys. 1.8 w punktach P i Q cieżar i ciąg osiągają skrajne wartości. Gdy kontur jest ograniczony odcinkami prostoliniowymi, największe wartości ciężaru i ciągu znajdujemy zawsze w załamaniach brzegu, posiadających największe oddalenie od linii obojętnej. Może się to oczywiście zdarzyć również w załomach przekroju ograniczonego łukami różnych krzywych.

Możemy oczywiście w każdym z omawianych wypadków nadać rezultatom końcowym postać formalnie zgodną z (11.7) tzn. wyznaczyć w poszczególnych przykładach *n o ś n i k u k o ś n e g o z g i n a n i a*. Możemy też usiłować zdefiniować go ogólnie formułą analogiczną do poznanej wcześniej (10.7). Naszkicujemy poniżej tok postępowania.

Obróćmy na rys. 1.8 osie układu współrzędnych o kąt β . W ten sposób oś ξ zajmie położenie linii obojętnej ω' ; oś η jest do niej prostopadła. Współrzędne punktu stare x, y i nowe ξ, η związane są znanymi relacjami

$$x = \xi \cos \beta - \eta \sin \beta, \quad y = \xi \sin \beta + \eta \cos \beta. \quad (9.8)$$

Rugując nimi x i y we wzorze (8.8), uwzględniając (1.8) i porządkując względem ξ i η znajdziemy:

$$\sigma = M \xi \left(\frac{\cos \alpha \sin \beta}{I_x} - \frac{\sin \alpha \cos \beta}{I_y} \right) + M \eta \left(\frac{\cos \alpha \cos \beta}{I_x} + \frac{\sin \alpha \sin \beta}{I_y} \right).$$

Wykorzystując tu (6.8) znajdziemy, że pierwszy dodatek odpada, drugi zaś przyjmuje prostą postać:

$$\sigma = \frac{M}{I} \eta, \quad (10.8)$$

gdzie I wyrażone jest w (3.8). Otrzymaliśmy przeto formułę analogicznie zbudowaną jak (8.7) w prostym zginaniu. Naprężenia w ukośnym zginaniu są -

co już wcześniej stało się dla nas oczywiste - proporcjonalne względem od-
dalenia od linii obojętnej. Wobec tego wprowadzając znów pojęcie włókien
skrajnych określimy uogólniony nośnik χ i formułę:

$$\sigma = \frac{M}{\chi}, \quad (11.8)$$

zbudowaną jak (11.7). Okażemy w następnym punkcie rozdziału, że nośnik ten
możemy wykręć na równie prostej drodze konstrukcji wykreslnej.

Zakrzywienie φ' i ψ' są odpowiednio zgodnie równoległe do momentów M_x
i M_y . Pozwala to w tej chwili wypisać wyrażenie dla energii sprężystości
 W' nagromadzonej w pomyślanej jednostce długości pręta. Mamy po prostu:

$$W' = \frac{1}{2} M_x \varphi' + \frac{1}{2} M_y \psi' = \frac{1}{2} \frac{M_x^2}{EI_x} + \frac{1}{2} \frac{M_y^2}{EI_y} = \frac{1}{2} EI_x \varphi'^2 + \frac{1}{2} EI_y \psi'^2. \quad (12.8)$$

przy czym znak ' oznacza pochodną zetową. Do identycznego wyniku dojdzie-
my pisząc $W' = \frac{1}{2} M \omega''$ jeśli w formule (7.8) uwzględnimy relacje (1.8). Na-
leży wystrzegać się pochodnego sądu, który nasuwa wygląd formuły (12.8), ja-
koby energia sprężystości podlegała również zasadzie superpozycji. Powyż-
szą prostotę wykazał wzór (12.8) jedynie dzięki temu, że udało się nam
wyspekulować pojęcie prostego zginania i w konsekwencji zgięcie ukośne roz-
łożyć na dwa proste. Zawdzięczamy zaś to obiorowi szczególnych osi współ-
rzędnych, jakimi są **t y l k o i t y l k o g ł ó w n e ś r o d-
k o w e** osie ukształtowania. Należy w przyszłości pamiętać o tym matema-
tycznym dobrodziejstwie.

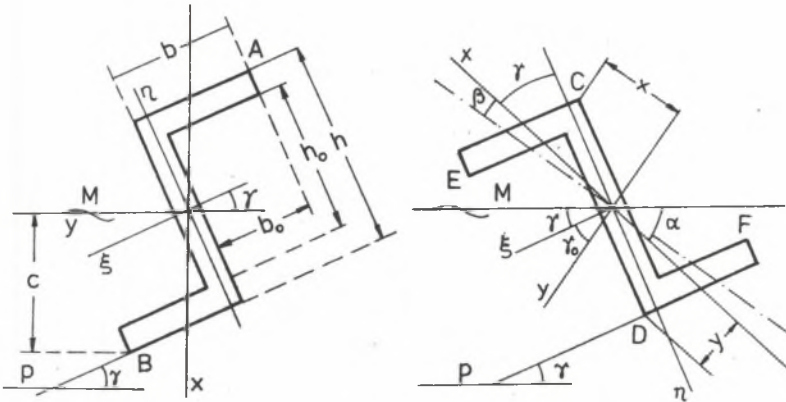
Przykład 1.8. Jak się zmieniają naprężenia w przykładzie 6.7, gdy pła-
szczyzna pary zginającej zajmie położenie prostokątne względem prostoką-
ta?

Odpowiedź 1.8. Znaczy to, że kąt nachylenia wektora M względem osi x
wyznaczyć należy z założenia $\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{h}$ lub $\cos \alpha = \frac{h}{d}$ lub też $\sin \alpha = \frac{b}{d}$ gdzie
 $d = \sqrt{b^2 + h^2} = \sim 1,7 b$. Ponieważ $I_x = \frac{bh^3}{12}$, $I_y = \frac{b^3h}{12}$ przeto $\operatorname{tg} \beta = \frac{I_x}{I_y}$
 $\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{b} \operatorname{ctg} \alpha$, skąd $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$, czyli linią obojętną jest tu druga przekąt-
nia prostokąta. Wobec tego największe wyteżenie znaleźliśmy w wierzchoł-
kach prostokąta $(\frac{b}{2}, -\frac{h}{2})$ i $(-\frac{b}{2}, \frac{h}{2})$. Wyrażając je naprężenia $\sigma = + \frac{12M}{bh^2d}$ gdy
w przykładzie 6.7 było $\sigma = + \frac{6M}{bh^2}$. Stosunek naprężeń tych wynosi więc $\frac{2h}{d} =$
 $= \sim 1,6$. Przez założoną zmianę naprężenia wzrosły o 60%.

Przykład 2.8. Ile wynosi nośnik zginania dla przekroju eliptycznego o
półosiach a, b ?

Odpowiedź 2.8. Z równania konturu $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ (a) mamy $\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2}{a^2} \frac{x}{y}$
 (b). Wobec $I_x = \frac{ab^3\pi}{4}$, $I_y = \frac{a^3b\pi}{4}$ jest $\sigma = \frac{4}{ab\pi} \left(\frac{M_x}{2} y - \frac{M_y}{2} x \right)$ (c). Z warunku ekstremum $\frac{d\sigma}{dx} = 0$ mamy $\frac{dy}{dx} = \frac{M_y}{M_x} \cdot \frac{b^2}{a^2}$, co w połączeniu z (b) daje $\frac{y}{x} = -\frac{M_x}{M_y}$ (d). Równania (a) i (d) dają współrzędne poszukiwanych punktów konturu, a to $x = \pm \frac{ab M_y}{\sqrt{y^2 M_x^2 + b^2 M_y^2}}$, $y = \mp \frac{ab M_x}{\sqrt{a^2 M_x^2 + b^2 M_y^2}}$. Po podstawieniu ich w (c) otrzymamy poszukiwane extrema $\sigma = \mp \frac{4}{a^2 b^2 \pi} \sqrt{a^2 M_x^2 + b^2 M_y^2}$. Nośnik zginania wynosi tu więc $\frac{M}{\mp \sigma} = \frac{a^2 b^2 \pi}{4 \sqrt{a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha}}$ i jest - jak widzimy - zależny od rozmiarów a, b przekroju i położenia α momentu M .

Przykład 3.8. Para zginająca M leży w płaszczyźnie pionowej. Zetowy przekrój $b_0/b = h_0/h = 0,88$, $b/h = 0,50$ ją przejmujący, postanowiono umieścić na podstawie nachylonej pod $\gamma = 22 \frac{1}{2}$ względem poziomu - więc jako np. płatew dachu hali fabrycznej. Powstała wątpliwość, które z położen przekroju jest prawidłowe.



Rys. 2.8

Odpowiedź 3.8. Zatem wektor M jest równoległy do prostej poziomej p , od której odmierzamy kąt nachylenia γ . Na rys. 2.8 naszkicowano dwa położenia przekroju. Prawidłowe położenie jest to, dla którego wyteżenie jest mniejsze. Na razie wyznaczmy parametry główne. Przyjmąwszy osie odniesienia ξ, η np. jak na prawej stronie rysunku mamy: $I_\xi = \frac{1}{12} (bh^3 - b_0 h_0^3)$, i podobnie $I_\eta = \frac{1}{12} (b^3 h - b_0^3 h_0)$ - bo drugi dodajnik I_η tj. $+\frac{1}{4} b b_0 (b_0 h - b h_0)$

z powodu $b_0/b = h_0/h$ odpada - wreszcie $D_\xi = \frac{1}{8} b b_0 (h^2 - h_0^2)$. Uwzględniając wykładnik stosunku 0,88 znajdziemy:

$$I_\xi = \sim \frac{1}{30} b h^3 = \frac{4}{15} b^4, \quad I_\eta = \sim \frac{1}{30} b^3 h = \frac{1}{15} b^4, \quad D_\xi = \sim \frac{1}{40} b^2 h^2 = \frac{1}{10} b^4.$$

Nachylenie kierunków głównych względem osi ξ wyznacza relacja $\operatorname{tg} 2\gamma_0 = \frac{2D_\xi}{I_\xi - I_\eta} = 1$, skąd $2\gamma_0 = 45^\circ$. Zatem jedna z osi głównych odchyłona jest od osi odniesienia ξ o kąt $\gamma_0 = \gamma = 22 \frac{1}{2}^\circ$. Przyjęliśmy ją dla wygody rachunkowej jako oś y ; oś x na prawej części rysunku dobrano zgodnie z przyjętą w toku wywodu teoretycznego z układu prawego, na lewej - z konieczności - z lewego. Okazuje się, że lewe ułożenie jest prawidłowe, bo prowadzi do zgięcia pojedynczego dokoła osi wielkiego kształtnika, prawe zaś jest wadliwe, bo prowadzi do nieekonomicznego zgięcia podwójnego, określonego kątem $\alpha = 90^\circ - (\gamma + \gamma_0) = 45^\circ$.

Ażeby ocenić różnice wyętwienia obliczamy główne kształtniki z formuły $I_{x,y} = \frac{1}{2} (I_\xi + I_\eta) \mp \frac{1}{2} \sqrt{(I_\xi - I_\eta)^2 + 4D_\xi^2}$, która daje $I_x = \sim \frac{1}{40} \cdot b^4$, $I_y = \sim \frac{3}{10} \cdot b^4$. Linia obojętną w położeniu lewym jest oś momentu; w prawym wyznacza ją według (5.8) $\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{12}$. Największego wyętwienia doznają w położeniu lewym włókna skrajne A i B. Ich współrzędna wynosi $c = \frac{h}{2} \cos \gamma + \frac{b+b_0}{2} \cdot \sin \gamma = 1,285 b$, zatem skrajne naprężenie wynosi: $\sigma = \mp \frac{M}{I_y} c = \mp 4,28 \frac{M}{b^3}$. W położeniu prawym najbardziej wyętwionymi miejscami są punkty C i D o współrzędnych:

$$x = \pm \frac{h}{2} \cos \gamma \mp \frac{b-b_0}{2} \sin \gamma = \pm 0,901 b, \quad y = \mp \frac{h}{2} \sin \gamma \mp \frac{b-b_0}{2} \cos \gamma = \mp 0,438 \cdot b.$$

Naprężenie w tych miejscach wobec $M_x = M_y = M \sqrt{2}/2$ wynosi według (8.8) $\sigma = \mp 14,51 \frac{M}{b^3}$, tj. niemal $3 \frac{1}{2}$ razy więcej aniżeli w położeniu lewym. Przy szkicowym traktowaniu rysunku wątpliwość może budzić w położeniu prawym wyętwienie punktów E i F o współrzędnych:

$$x = \pm \frac{h_0}{2} \cos \gamma \pm \frac{b+b_0}{2} \sin \gamma = \pm 1,173 b, \quad y = \mp \frac{h_0}{2} \sin \gamma \pm \frac{b+b_0}{2} \cos \gamma = \pm 0,532 b.$$

Znajdziemy tu niższą wartość naprężenia, a to $\sigma = \pm 12,28 \frac{M}{b^3}$; i ta jednak jest prawie 3 razy większa od skrajnej w zgięciu proatym. Przykład ten wystarczająco poucza, dlaczego usilnie unikamy ukośnego zginania.

Przykład 4.8. Obliczyć zakrzywienia pręta w poprzednim przykładzie.

Odpowiedź 4.8. W zgięciu pojedynczym jest $\omega' = \psi = \frac{10}{3} \frac{M}{Eb^4}$. W zgięciu ukośnym stosując wzory (3.8) i (4.8) oraz (7.8) znajdziemy całkowite zakrzywienie $\omega' = \frac{85}{3} \frac{M}{Eb^4}$, więc $8 \frac{1}{2}$ razy większe; składowe zakrzywienie wynosi: $\frac{65}{3} \frac{M}{Eb^4}$ a więc $6 \frac{1}{2}$ razy większe, wreszcie przybiera zakrzywienie boczne $-\frac{55}{3} \frac{M}{Eb^4}$. Przez obrócenie profilu stosunki doznają przeto prerażającej zmiany.

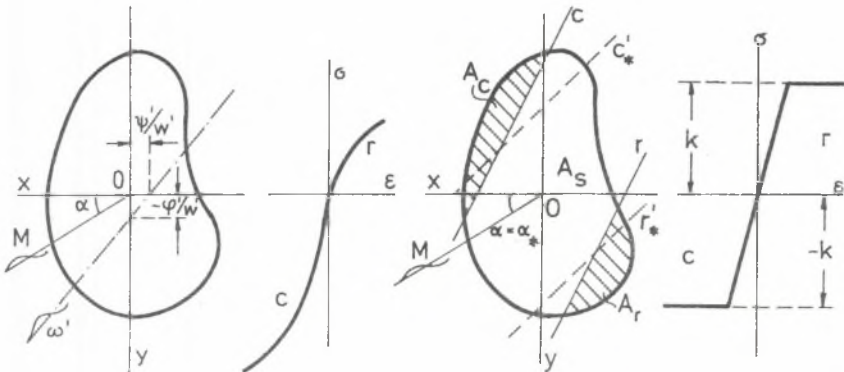
Przykład 5.8. Wyznaczyć energię W' , wychodząc z definicji (11.3) i (12.3).

Odpowiedź 5.8. Stosując (8.8) otrzymamy:

$$dW = dz \cdot \int \frac{\sigma^2}{2E} dA = dz \cdot \frac{1}{2E} \cdot \int \left(\frac{M^2}{I^2} y^2 - 2 \frac{M_x M_y}{I_x I_y} xy \right) dA.$$

Uwzględniając (3.5) wraz z (5.5) znajdziemy (12.8) jak być powinno.

Uzupełnimy rozważania punktów siódmego i ósmego dla wypadków, gdy materiał nie jest liniowo sprężysty lub też gdy ze wzrostem momentu zginającego została przekroczona granica proporcjonalności materiału. Prawo Hooke'a musi być w tych wypadkach zastąpione, względnie uzupełnione innym prawem wiążącym.



Rys. 3.8

Przyjmijmy, że jest nim przedstawiony w lewej części rys. 3.8 związek

$$\sigma = f(\epsilon), \quad (12.8)$$

wykrvty z j e d n o r o d n e g o j e d n o o s i o w e g o r o z c i ą g a n i a i ś c i s k a n i a. Gwoli ogólności nie krępujemy się przy tym żadnymi uproszczeniami, więc w szczególności przyjmujemy $f.(-\epsilon) \neq -f.(\epsilon)$ jak to się zdarza np. zawsze dla tworzyw kruchych.

Teorię równomiernego zginania pryzmatycznego pręta oprzemy na d w ó c h istotnych założeniach. Przyjmujemy, że przekroje pręta, p o z o s t a j ą c p ł a s k i m i, o b r a c a j ą s i ę d o k o ł a p r o s t y c h ω' - a nadto, że wywołany zgięciem s t a n n a p i ę c i a j e s t j e d n o o s i o w y. Najwidoczniej przeto przemycamy oba te fakty z dotychczasowego zginania liniowo-sprężystego. Omówimy bliżej oba te założenia.

Założenie niezmiennie płaskiego przekroju j e s t t e o r e t y c z n i e u z a s a d n i o n e; zostało ono również wielokrotnie potwierdzone doświadczeniem. Gdyby oś obrotu przekroju była nam znana, moglibyśmy w dowolnym jej punkcie umieścić - dla celów analitycznego traktowania - początek osi x, y i przyjmąwszy je tam dowolnie, rozłożyć wektor ω' na część x -ową φ' i y -ową ψ' . Nie możemy się spodziewać, że owa oś, więc owa linia obojętna, przejdzie przez środek geometryczny przekroju; przeczy temu zupełna dowolność funkcji (12.8). Z tego samego powodu nie możemy się również spodziewać jakichś dobrodziejstw ze strony głównych osi ukształtowania. Skoro jednakże bez układu odniesienia nie można zadania w ogóle traktować, przyjmujemy z konieczności byle jakie. Może nim ewentualnie być układ środkowy główny - po prostu ze względu na naturalność jego opisu. W tym układzie oś ω' zajmie jakieś bliżej nam nieznanne położenie. Z kinematyki wiadomo nam jest, że w powyższych warunkach obrót ω' dokoła mimośrodkowej osi złożyć można z obrotu ω' dokoła osi równoległej środkowej i przesunięcia w' prostopadłego do płaszczyzny obu równoległych. Wreszcie ów obrót ω' rozłożyć można - jak już wspomniano - na części φ' i ψ' .

Ostatecznie więc założenie niezmiennie płaskiego przekroju wyraża równanie:

$$\epsilon' = w' + \varphi'y - \psi'x, \quad (13.8)$$

zawierające wszystkie znane nam z dotychczasowych rozważań dodajniki. Gdy znać będziemy parametry φ', ψ', w' , znane też nam będzie położenie linii obojętnej z jej definicji $\epsilon = 0$, a zatem równanie

$$\psi'x - \varphi'y = w'. \quad (14.8)$$

Ściśle biorąc winniśmy pisać nie w' , lecz w'_0 , zaznaczając, że w'_0 oznacza przesunięcie punktu $x = y = 0$. W ten sposób uczynilibyśmy też różnicę między $\epsilon = \frac{\partial w}{\partial z}$ a w'_0 . Skoro jednak nie mamy zamiaru całkować równania (13.8), tj. szukać w , możemy poprzestać na uproszczonej pisowni.

W mojej pracy "O rozwinięciu potencjału sprężystości i zastosowaniach" (Akademia Nauk Technicznych - Warszawa 1932) wykazałem, że założenie jednoosiowego stanu napięcia w omawianym zagadnieniu j e s t n i e z g o d-

ne z matematycznie ścisłą teorią, wykazującą tu stan trójosiowy. Istnieje jednak dwa powody, dla których chcemy z niego w dalszym ciągu korzystać. Przede wszystkim rozwiązanie ścisłe jest bardzo zawiłe. Ponadto jednak - i to stanowi przeszkodę natury zasadniczej - nie znamy dla żadnego materiału, nie podlegającego prawu Hooke'a, zastępujących go relacji wiążących dla trójosiowego stanu napięcia. Wspominałem już o tym w punkcie trzecim. Przyjmujemy więc z konieczności dla celów przybliżonego rozwiązania związek (12.8), w którym zdefiniowane przez (13.8) ε jest zależne od zmiennych x, y .

Wypiszmy obecnie na wzór (5.7) trzy równania redukcyjne

$$\int f(\varepsilon) dA = 0, \int y f(\varepsilon) dA = M_x, \int x f(\varepsilon) dA = -M_y, \quad (15.8)$$

w których $dA = dx dy$. Równania te po wykonaniu całkowań posłużą nam do znalezienia trzech niewiadomych - φ', ψ', w' - zagadnienia. Okazuje się, że zależą one nie tylko od konfiguracji przekroju i kierunku α momentu, lecz - niestety - ponadto od jego wielkości M . Ze zmianą przeto momentu linia obojętna również zmienia tu swoje położenie i to - ogólnie biorąc - wraz z kierunkiem.

Wróciwszy z φ', ψ', w' do σ określamy je w każdym punkcie (x, y) przekroju. Musimy na zakończenie dodatkowo w każdym oddzielnym przypadku wykazać, że w żadnym punkcie przekroju ze wzrostem momentu nie małe je bezwzględna wartość naprężenia, co wobec ewentualnej zmiany kierunku linii obojętnej może się zdarzyć. Zwróciliśmy już bowiem uwagę na to w trzecim punkcie, przy sposobności wyjaśniania rys. 4.3, że odciążanie odbywa się według prawa odmiennego od prawa dociążania (12.8). Zagadnieniem odwróconym tj. zadaniem malejącego M nie chcemy się tu zajmować.

Szczególny wypadek omówionego tu zadania stanowi zgięcie elasto-plastyczne. Najprostszą jego postać otrzymamy założywszy, iż funkcja $\sigma = f(\varepsilon)$ przebiega jak na prawej stronie rys. 3.8. Tu również rozwiązanie budujemy na założeniu niezmiennie płaskiego przekroju (13.8) i przyjęciu jednoosiowego stanu napięcia. Jak wynika z dokładniejszych rozważań to drugie założenie - z powodu przebiegu deformacji plastycznej bez zmiany objętości - jest tu w obrębie całego przekroju ścisłe.

Przy pewnej wartości momentu - zależnie od ukształtowania przekroju - po obu stronach linii obojętnej albo początkowo tylko po jednej a nieco potem i po drugiej w włóknach skrajnych naprężenia osiągną wartość $\bar{\sigma}_k$ na granicy płynności. Wartości tej mimo wzrostu bezwzględnej wartości ε przekroczyć one - zgodnie z podanym wykresem - nie mogą. W rezultacie przekrój podzielony zostaje na trzy strefy - środkową sprężystą o polu A_s i dwie skrajne plastyczne o polach A_c i A_r .

Związek (12.8) przybiera tu więc postać:

$$A_C, \sigma = f_C(\varepsilon) = -k; A_S, \sigma = f_S(\varepsilon) = E\varepsilon; A_R, \sigma = f_R(\varepsilon) = +k, \quad (16.8)$$

przy czym układ współrzędnych możemy i tu dobrać dowolnie, tak że ε wraz z relacją (13.8) z figurującym tam wolnym dodajnikiem w' . Strefy A i A_S tudzież A_R i A_C rozdzielają więc proste c i r o równaniach

$$\psi'x - \varphi'y = w' \pm \frac{k}{E}. \quad (17.8)$$

Równaniem linii obojętnej będzie nadal (14.8). Gdy znać będziemy φ', ψ' , w dokonamy podziału pola A na części A_C, A_R i A_S . Zastosujemy wobec tego warunki (15.8), kładąc pod znakiem całki:

$$f(\varepsilon) = f_C(\varepsilon) + f_S(\varepsilon) + f_R(\varepsilon) \quad (18.8)$$

i rozbijając obszar całkowania A na wykazane części. Trzy te warunki kreślają właśnie φ', ψ', w' , a tym samym ustalają rozwiązanie.

Może się okazać, że proste dzielące obszar przebiegają się i obraca w płaszczyźnie przekroju. Gdy więc moment ma wartość M , zajmuje ono położenie c, r . Gdy moment zwiększy się do wartości M_* , przyjmą one położenie nierównoległe c_*, r_* , mimo tego, iż kierunek momentu $\alpha_* = \alpha$ nie ulega zmianie. Gdy przy tej sposobności okaże się, że proste c_*, r_* odcina część pierwotnych obszarów A_C, A_R , podane rozwiązanie traci swą ważność albowiem uzyskaliśmy je przy milczącym założeniu, że naprężenia wszędzie bez wyjątku punktów przekroju nie maleją, co w odciętych skłach ma właśnie miejsce.

Naszkicowane tu postępowanie i zastrzeżenia budzą refleksje. Potrafimy podać mniej lub więcej dokładną teorię równomiernego zginania dla układów zbudowanych z nieliniowo-sprężystych materiałów, nie potrafimy jednak miennie niż w zgięciu liniowo-sprężystym - podać ogólnych wzorów końcowych. Od wypadku do wypadku musimy badać każdy przekrój oddzielnie z dągnięciem do wątpliwym skutkiem. Nie potrafimy ogólnie rozdzielić zginania prostego ukośnego, bo ze zmianą wielkości momentu proste może przebiegać w ukośne lub na odwrot. W zgięciu elasto-plastycznym obszar wymaga podziału na trzy strefy, a parametry do tego służące są końcowym wynikiem rachunku. Odciążanie przekroju wymaga innego rozwiązania aniżeli dociążanie. Odciążanie wymaga dodatkowo jeszcze bardziej zawiłego obliczenia.

Powyższe przyczyny powodują naszą rezygnację z rozważań ogólnych i sząją do zajęcia się przypadkami szczególnymi, w których dodatkowo zająć się nie będą budzić żadnych wątpliwości a tym samym liczba pozostałych niewiadomych wyraźnie zmaleje.

Należy tu przede wszystkim praktycznie ważny wypadek pręta o przekroju symetrycznym względem osi y , zginanego parą $M_x = M$ leżącą w płaszczyźnie symetrii pręta, a więc zginającej dokoła osi x . W tych warunkach nastąpi bez wątpienia zginania pojedyncze; linia obojętna będzie równoległa do osi x .

Weźmy pod uwagę wypadek dowolnego pręta wiążącego (12.8). Obierzmy oś x z a l i n i ą o b o j ę t n ą. Oś y obierzmy dla wygody tak, by strefą ściskaną był obszar $y < 0$, czyli rozciągana obszar $y > 0$. Włókna skrajne mają współrzędne y_c i y_r , przy czym:

$$y_r - y_c = d, \quad (19.8)$$

jeśli d jest wysokością przekroju. Jeśli linię obojętną zidentyfikujemy z osią x , to zdłuże włókna dowolnego i włókien skrajnych przedstawiają znane już nam proste wyrażania:

$$\varepsilon_c = \varphi' y_c, \quad \varepsilon = \varphi' y, \quad \varepsilon_r = \varphi' y_r. \quad (20.8)$$

Zmienną szerokość b przekroju przedstawia funkcja:

$$b = g(y), \quad (21.8)$$

tak że elementarne pole wynosi $dA = g(y) dy$. Dwa równania (5.7) redukcji $\int \sigma dA = 0$, $\int y \sigma dA = M$ przyjmą wobec $\sigma = f(\varphi' y)$ postać:

$$\int_{y_c}^{y_r} f(\varphi' y) g(y) dy = 0, \quad \int_{y_c}^{y_r} y f(\varphi' y) g(y) dy = M, \quad (22.8)$$

trzecie zaś $\int x \sigma dA = 0$ jest z powodu symetrii identycznie spełnione. Całki (22.8) są funkcjami granic całkowania y_c , y_r , a nadto parametru φ' . Łącząc więc pierwsze z równań (22.8) z równością (19.8) znajdziemy stąd y_c i y_r jako funkcje zakrzywienia φ' , więc

$$y_c = c(\varphi), \quad y_r = r(\varphi). \quad (23.8)$$

a tym samym naprężenia włókien skrajnych

$$\sigma_c = f(\varphi' y_c) = C(\varphi), \quad \sigma_r = f(\varphi' y_r) = R(\varphi). \quad (24.8)$$

Wstawiając zaś rezultaty (23.8) do drugiego z równań (22.8) otrzymamy

$$M = f(\varphi'), \quad (25.8)$$

lub też na odwrót φ' jako funkcję M . Możemy wreszcie wyznaczyć dodatkowo środek geometryczny przekroju, obliczając jego współrzędną

$$y_s = \frac{1}{A} y \, dA = \frac{1}{A} y g(y) \, dy = h(\varphi'), \quad (26.8)$$

a ponieważ punkt ten zajmuje względem przekroju niezmiennie położenie, przeto - odwrotnie - odcinek y_s określa względem niego zmienne położenie linii obojętnej x .

Zwracamy w tym miejscu dla zupełności uwagę na pewien szczegół matematycznej natury. Nadanie założeniu o sztywnym obrocie przekroju postaci (20.8) jest - wobec braku dodajnika w' - identyczne z przyjęciem osi x za oś obrotu, czyli linię obojętną. Ponieważ linia ta zajmuje położenie zmieniające się wraz ze zmienną M , przeto zachodzi potrzeba określenia jej zmiennego położenia. Spełniamy to - jak przed chwilą wyjaśniliśmy - podając odcinek (26.8) jakkolwiek wystarcza do tego celu jedna ze współrzędnych (23.8).

Można postąpić jednak również inaczej. Ustalmy bez względu na M położenie osi x . Tym samym współrzędne y_c i y_r są również ustalone. Wtedy jednak oś obrotu nie pokrywa się z osią x . Równanie (20.8) zdłużu musimy rozszerzyć o dodajnik w' , który stanowi niewiadomą zastępującą poprzednie y_s . Liczba niewiadomych w tym odmiennym sposobie postępowania nie ulega więc zmianie.

W podanym rozwiązaniu tkwi milczące założenie, iż odkształcenia w obrębie wąskiej partii środkowej przekroju mają charakter sprężysty. Dwom różnym wartościom momentu M i M_* odpowiadają dwa różne położenia linii obojętnej x i x_* , czyli przecięcie się odnośnych brył naprężeń. Rzut krzywki przecięcia na płaszczyznę przekroju oznaczmy przez ξ . Strefa zawarta między prostym x i ξ jest strefą odciążoną. Właśnie założyliśmy, że jest ona strefą odkształceń sprężystych.

Ważność podanego wyżej rozwiązania ogranicza się do przedziału, w którym niemianowana liczba $\varphi'd$ jest mała w porównaniu do 1. Najistotniejszy rezultat tego rodzaju obliczenia stanowi wykrycie związku (25.8), zastępującego tu prostą formułę (7.7). Dla przekrojów podwójnie symetrycznych wydaje się słusznym być przypuszczenie, że F będzie nieparzystą funkcją φ' , zatem funkcją o własności $F(-\varphi') = -F(\varphi')$. Gdybyśmy bowiem dla takiego przekroju przeprowadzili obliczenia dla momentu z odwróconym znakiem, zakrzywienie powinno zmienić jedynie znak bez zmiany bezwzględnej wartości. Mimo tego więc, iż rozwinięcie funkcji $f(\varepsilon)$ zawierać może zarówno parzyste jak i nieparzyste potęgi zmiennej ε , rozwinięcie funkcji $F(\varphi')$ zawierać będzie w takich wypadkach jedynie nieparzyste potęgi φ' . Stylizując rzecz potocznie, czyni to takie wrażenie, jak gdyby liniowa postać (7.7) związku (25.8) była "dłużej" ważna aniżeli prawo Hooke'a. Polegają na tym błędy rozlicznych autorów, wnioskujących z pomiaru M i φ' na laboratoryjnych beleczkach betonowych o prostokątnym, zatem podwójnie symetrycznym przekroju, że beton podlega prawu Hooke'a.

Dla wspomnianych, podwójnie symetrycznych przekrojów wzory upraszczają się. W szczególności dla przekroju prostokątnego, odgrywającego dużą rolę w doświadczeniach nad zginaniem, wobec uproszczenia zależności (21.8) do postaci $b =$ stałej równania (22.8) i (26.8) przybierają postać:

$$\int_{y_c}^{y_r} f(\varphi'y) dy = 0, \quad M = b \int_{y_c}^{y_r} yf(\varphi'y) dy, \quad (27.8)$$

$$y_0 = \frac{y_r + y_c}{2} = h(\varphi). \quad (28.8)$$

Dalsze uproszczenie nastąpi po wprowadzeniu ewentualnej własności $f(-\varepsilon) = -f(\varepsilon)$. Wtedy bowiem pierwsze z równań (27.8) zredukuje się do równości $y_r + y_c = 0$, wobec czego równanie (28.8) skróci się do $y_0 = 0$. Stanie się tak nie tylko dla przekroju prostokątnego.

W miejsce zmiennej y mogliśmy z równie dobrym skutkiem użyć w przedstawionej teorii zmiennej $\varepsilon = \varphi'y$. Zmiana taka jest szczególnie celowa przy interpretowaniu wyników doświadczalnych. W doświadczeniu bowiem z momentem M i zakrzywieniem φ' pomiarowi podlegają nie rozmiary y_c, y_r , lecz zdłuże $\varepsilon_c, \varepsilon_r$. Przekształcenie podanych tu wzorów nie następuje żadnym trudności. Tak np. równość (19.8) przybierze postać:

$$\varepsilon_r - \varepsilon_c = \varphi' \cdot d. \quad (29.8)$$

Równie prosto zmienią swój wygląd i wszystkie inne. W szczególności formuły (27.8), podane dla przekroju prostokątnego, przejdą we wzory:

$$\int_{\varepsilon_c}^{\varepsilon_r} f(\varepsilon) d\varepsilon = 0, \quad M\varphi'^2 = b \int_{\varepsilon_c}^{\varepsilon_r} \varepsilon f(\varepsilon) d\varepsilon, \quad (30.8)$$

często cytowane w literaturze przedmiotu.

Gdyby założenie jednoosiowego stanu napięcia w zginanych prętach z dowolnego materiału było słuszne, moglibyśmy przeprowadzić tu obliczenia odwrócić. Gdy dotychczas rezultat eksperymentu jednorodnego eksploatawaliśmy dla celów zagadnienia niejednorodnego, moglibyśmy na odwrót wyniki badania nad stanem niejednorodnym wykorzystać dla znalezienia prawa jednorodnego. Istotnie, niektórzy badacze z obserwacji zdłuży $\varepsilon_c, \varepsilon_r$ zakrzywienia φ' i momentu M spodziewają się znaleźć prawo $\sigma = f(\varepsilon)$.

Dla przekroju prostokątnego obliczenie to da się szybko przeprowadzić. Możemy mu nadać tok następujący: Uważajmy zgodnie z pro-

tokołem laboratoryjnym wielkości M , ε_c , ε_r za funkcje jednocześnie mierzonego zakrzywienia φ' i zróżniczkujemy względem niego równania (29.8) tudzież (30.8), pamiętając o stosowanej w tym wypadku regule różniczkowania:

$$\frac{\partial}{\partial p} \int_a^{b(p)} f(x, p) dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial p} dx + f(b, p) \frac{db}{dp} - f(a, p) \frac{da}{dp}.$$

W rozstrzęsanym wypadku funkcje podcałkowe w (30.8) są niezależne od parametru φ' , natomiast granice całkowania ε_c , ε_r są jego funkcjami. Wobec tego poszukiwane równania przyjmą postać:

$$\varepsilon_r' - \varepsilon_c' = d, \quad \varepsilon_r' f(\varepsilon_r) = \varepsilon_c' f(\varepsilon_c), \quad (31.8)$$

$$b \varepsilon_r \varepsilon_r' f(\varepsilon_r) - \varepsilon_c \varepsilon_c' f(\varepsilon_c) = (M^2),$$

przy czym znakiem ' oznaczyliśmy pochodną względem φ' . W powyższych równaniach położmy krótko $f(\varepsilon_c) = \sigma_c$, $f(\varepsilon_r) = \sigma_r$. Rozwiązując dwa pierwsze z nich względem ε_c' , ε_r' znajdziemy

$$\varepsilon_c' = - \frac{\sigma_r d}{\sigma_r - \sigma_c}, \quad \varepsilon_r' = - \frac{\sigma_c d}{\sigma_r - \sigma_c}.$$

Podstawiając powyższe w trzeciej z równań (31.8), jak i uwzględniając (19.8) i (20.8) otrzymamy:

$$bd^2 \frac{\sigma_c \sigma_r}{\sigma_r - \sigma_c} = - \frac{1}{\varphi'} (M\varphi'^2). \quad (32.8)$$

Wiążąc ten rezultat ponownie z drugim z równań (31.8) znajdziemy:

$$\sigma_c = - \frac{1}{bd^2} (2M + \varphi' \frac{dM}{d\varphi'}) (1 - \frac{d\varepsilon_r}{d\varepsilon_c}), \quad \sigma_r = \frac{1}{bd^2} (2M + \varphi' \frac{dM}{d\varphi'}) (1 - \frac{d\varepsilon_c}{d\varepsilon_r}). \quad (33.8)$$

W ten sposób naprężenia warstw skrajnych σ_c i σ_r przedstawiliśmy jako funkcje zakrzywienia φ' . Gdy zaś zdłuże ε_c i ε_r są również funkcjami φ' , przeto na odwrót możemy wyrazić φ' jako funkcję ε_c , jak również jako funkcję ε_r . Podobnie możemy postąpić z momentem M . W wyniku powyższej matematycznej interpretacji formuły (33.8) są równowarte dwom krótkszym:

$$\sigma_c = f(\varepsilon_c), \quad \sigma_r = f(\varepsilon_r). \quad (34.8)$$

Ponieważ ze wzrostem M zdłuze ε'_c względnie ε_r przebiegają w sposób ciągły przez ujemny względnie dodatni obszar wartości, przeto obie formuły (34.8) są równoważne jednej jedynej (12.8), określającej prawo jednorodne - oczywiście w zakresie osiągalnym przy doświadczeniu nad zginaniem.

Gdy przypadkiem zachodzi wypadek $f(-\varepsilon) = -f(\varepsilon)$, wzory (33.8) upraszczają się wobec zależności $\varepsilon'_r + \varepsilon'_c = 0$ do postaci:

$$\sigma_{c,r} = \mp \frac{2}{bd^2} (2M + \varphi' \frac{dM}{d\varphi}). \quad (35.8)$$

Gdy wreszcie materiał jest liniowo sprężysty, ma miejsce równość $\frac{dM}{d\varphi} = \frac{M}{\varphi}$, a rezultat (35.8) upraszcza się do znanego nam już wyniku (11.7), w którym jest $\chi = \frac{bd^2}{6}$, zgodnie z treścią przykładu (1.7).

W rzeczywistości - jak to zaakcentowaliśmy - stan napięcia przy zginaniu prętów z dowolnego materiału jest trójosiowy. Mierzone w trakcie doświadczenia zdłuze ε nie pochodzą od działania jedynie naprężenia $\sigma = \sigma_z$, lecz również od innych naprężeń. Jeśli nawet - co ma miejsce - ograniczymy się do badania materiałów równokierunkowych, okaże się, że naprężeniami tymi są nie tylko normalne. Poza znak funkcyjny f wkładnie się ponadto postać przekroju. Dokonane przez nas interesujące obliczenie ma zatem charakter przybliżony. Niemniej w połączeniu z innymi jeszcze pomiarami - np. poprzecznej deformacji przekroju - ma ono duże znaczenie dla poznania stałych materiałowych wyższych rzędów.

Przy pewnej szczególnej wartości M_g momentu następuje złamanie pręta. Zwyczajowo oblicza się przy pomocy momentu z ł a m i ą c e g o M_g i nośnika χ nową wielkość:

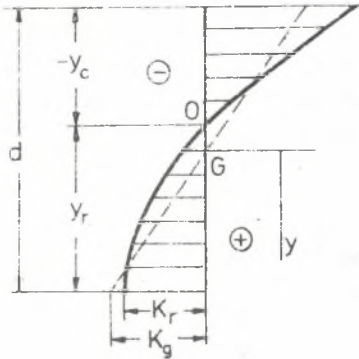
$$K_g = \frac{M_g}{\chi}, \quad (36.8)$$

którą zwykło się nazywać w y t r z y m a ł o ść i ą odnośnego m a t e r i a ł u n a z g i n a n i e. Ułamek tej wielkości

$$\sigma_g = \frac{K_g}{N} \quad (37.8)$$

nazywamy n a p r ęż e n i e m b e z p i e c z n y m p r z y z g i n a n i u. W przykładach punktu siódmego oznaczyliśmy je przez σ_0 . Niezmianowana liczba N wyraża współczynnik bezpieczeństwa; była już o nim mowa w ustępie czwartym. Nie ma w zasadzie nic nadzwyczajnego w tym, że z jednej z d e f i n i o w a n e j wielkości obliczamy drugą.

Sprawiamy tu sobie jednak przy tej sposobności nieco kłopotów, które musimy w tym miejscu wyjaśnić.



Rys. 4.8

Weźmy dla wyrazistości pod uwagę jakiś materiał kruchy, dla którego krzywą $\sigma = f(\varepsilon)$ przedstawia rys. 3.8. Gdyby stan napięcia przy zginaniu był istotnie jednoosiowy, krzywą tę moglibyśmy w stosownej podziałce φ' przenieść wprost na przekrój jako wykres naprężeń σ , albowiem $\varepsilon = \varphi' y$. Ilustruje to rysunek 4.8, na którym G oznacza położenie środka geometrycznego przekroju, a O położenie linii obojętnej. Ponieważ postulat (12.7) nie zawsze bywa spełniony, gdyż ponadto ma on nieścisły sens dla wypadków dowolnej zmienności $\sigma = f(\varepsilon)$, prze-

to z reguły złamanie pręta następuje przez przerwanie skrajnych włókien strefy rozciąganej, gdy więc naprężenie σ_r osiągnie wartość K_r .

Operacja (36.8) wyraża spekulację następującą: Zastąpmy wykres krzywoliniowy naprężeń przebiegiem prostoliniowym - jednak takim, by nie zmienić wartości momentu łamiącego M_g . W ten sposób iloraz K_g ma sens nie tylko elementarnej operacji matematycznej, ale nabiera też pewnego realnego znaczenia, któremu przydzielamy wspomniane wyżej miano. Z esowatego przebiegu wykresu wynika, iż owa rachunkowa wielkość K_g jest większa od rzeczywistej K_r . Powyższe wyjaśnienie nierówności $K_g > K_r$ znaleźć można w każdym podręczniku - ale na tym też się ono tam kończy. W istocie zaś rzecz wymaga znacznie głębszego naświetlenia.

Z pewnością wolelibyśmy dysponować zamiast wzorem (36.8) formułą

$$K_r = \frac{M_g}{\chi_K}, \quad (38.8)$$

w której K_r przedstawia podstawową sprecyzowaną datę materiałową. Wtedy wielkość $\frac{K_r}{N}$ przedstawiałaby równie ugruntowane pojęcie. Ten poprawny z naukowego punktu widzenia sposób wymagałby jednak zdefiniowania nośnika wytrzymałościowego χ_K . Ten zaś jest mimo wymiarowej równości nie tylko - jak nośnik sprężysty χ - zależny od geometrycznych rozmiarów i postaci przekroju, lecz - jak z przedstawionej teorii wynika - również od postaci prawa $\sigma = f(\varepsilon)$. W rezultacie stosunek $\chi_K / \chi > 1$ jest przy tej samej postaci przekroju różny dla różnych materiałów, a dla tego samego materiału różny przy różnych postaciach przekroju. W konsekwencji tego faktu wytrzymałość na zginanie $K_g = K_r \chi_K / \chi$ nie jest datą charakteryzującą materiał w pewnym stadium mechanicznym, lecz układa materiałny określonej postaci. Inaczej mówiąc należy przy podawaniu wartości K_g określić nie tylko materiał, lecz również ukształtowanie przekroju. Na ogół przyjmujemy, że jest nim prostokąt. Z braku cze-

goś stosowniejszego operujemy tą datą również dla przekrojów innej postaci, zabezpieczając się nieznacznym zwiększeniem stopnia pewności N .

Możemy extensometrem pomierzyć na zginanej beleczce próbnej ϵ_r w chwili pęknięcia i stwierdzić, że w wykresie jednorodnego rozciągania $\sigma = f(\epsilon)$ zdłużowi tak zmierzonemu odpowiada naprężenie różne od wydedukowanego z niedawno przedstawionej teorii zginania, a oznaczonego na rys.4.8 na wzór stosowanego w literaturze - niesłusznie - znakiem K_r . Różnicę tę już przewidzieliśmy. Stan napięcia jest tu trójosiowy, a nie jednoosiowy - jak się powszechnie zakłada. Pręt nie pęka przy naprężeniu $\sigma_z = K_r$, lecz przy wytężeniu K_r , zatem przy wytężeniu, którego miara tj. naprężenie zastępcze osiąga wartość K_r . Będziemy przeto znacznie bliżsi prawdy, gdy przyjmiemy, że wydedukowany z teorii zginania wykres $\sigma = f(\epsilon)$ podaje przebieg naprężenia zastępczego; z pewnością tak jest w warstwie $y = y_r$. Z powyższego wynika jednak, że również data K_r zależy nie tylko od materiału, lecz również w pewnej mierze od postaci przekroju. Niepewność i tym razem skompensować musimy zwiększeniem liczby N .

Zachowanie się zginanych prętów z pewnych gatunków wyborowego szkła wymaga dodatkowego wyjaśnienia. Funkcja $\sigma = f(\epsilon)$ dla jednoosiowego stanu napięcia jest tu nieomal do obu końców wykresu linią prostą. Wobec tego stan napięcia przy zginaniu jest aż do złamania pręta jednoosiowy. Między naprężeniami niszczącymi K_r i K_g nie powinna wobec tego zachodzić żadna różnica. Tymczasem pewną różnicę stwierdzamy. Przepuszczalne wyjaśnienie leży w tym, iż cienka warstewka brzeżna pręta szklanego posiada inne własności mechaniczne aniżeli zasadnicza środkowa. Własność tę można by już wykryć rozciągając pręty różnych średnic. Wykrylibyśmy ją oczywiście też zginając pręty różnych średnic. Okazałoby się jednak, że wobec inaczej wyrażających się sztywności i nośników przy rozciąganiu i zginaniu powyższy wpływ inaczej wyraża się przy rozciąganiu a nieco inaczej przy zginaniu. Wynika stąd nieznaczna różnica między K_r i K_g .

Ostatnie wyjaśnienie wystarczyć nam musi w obecnym stanie naszych wiadomości o mechanicznych własnościach materii rzeczywistej na wiele jeszcze lat. Gdyby z czasem okazało się ono niewystarczające, stanęlibyśmy przed przykrym przesileniem naukowym na terenie mechaniki układów odkształcalnych. Musielibyśmy przyjąć, że stany niejednorodne są czymś zgoła innym aniżeli jednorodne. Musielibyśmy zmienić podstawy teoretyczne tej nauki, np. zakładając, że stan napięcia w dowolnym punkcie układu materialnego zależy nie tylko od tego, jakim jest stan odkształcenia, lecz nadto od tego, jakim on chce być w najbliższej okolicy tego miejsca - że zależy więc on nie tylko od stanu odkształcenia, lecz również od przynależnego tam jego gradientu, od jego więc pochodnych miejscowych.

Na zakończenie tego ustępu wrócimy jeszcze do spraw elasto-sprężystego zginania prostego pręta. Zgodnie z wprowadzonym ograniczeniem przestudujemy je dla przekroju symetrycznego względem osi y zginanego parą M , po-

łożoną w płaszczyźnie symetrii y z. Tym razem z góry ustaliliśmy oś x , tak że między innymi położenie linii obojętnej stanowić będzie niewiadomą.

Gdy przekrój jest podwójnie symetryczny wobec symetrii wykresu $\sigma = f(\varepsilon)$ przedstawionego w prawej części rys. 3.8, linia obojętna położeni będzie niezmiennie wysokość przekroju. Zidentyfikowawszy ją z osią x napiszemy: $\varepsilon = \varphi' y$. Zrazu zginanie będzie przebiegać sprężysto aż do chwili, gdy w włóknach skrajnych naprężenia osiągną wartość $\sigma = \pm k$. Stanie się to przy wartości $M = M_k = \chi k$, gdzie χ jest nośnikiem sprężystego zginania, czyli przy wartości $\varphi'_k = \frac{\chi k}{EI}$. Przy dalszym wzroście momentu pojawią się w przekroju dwie strefy plastyczne przedzielone strefą sprężystą. W plastycznych będzie $\sigma = \mp k$, w sprężystej $\sigma = E\varepsilon = E\varphi' y$. Z przyrównania obu zależności wynika równanie prostych podziałowych $y = \mp d_k$, gdzie

$$d_k = \frac{k}{E\varphi'}, \quad M > 0. \quad (39.8)$$

Dwa równania redukcyjne $\int \sigma dA = 0$ tudzież $\int x \sigma dA = 0$ są z powodu podwójnej symetrii przekroju i symetrii bryły naprężeń spełnione. Trzecie

$$M = \int y \sigma dA = - \int_{-A_k} y k dA + \int_{A_s} y E \varphi' y dA + \int_{A_k} y k dA$$

przybiera postać

$$M = E \varphi' I_s + k H_k, \quad M > 0, \quad (40.8)$$

gdzie I_s oznacza kształtnik strefy sprężystej, a H_k - zawsze dodatni, łączny średnik (moment statyczny) obu stref plastycznych. W równaniach (39.8) i (40.8) musiano uczynić zastrzeżenie $M > 0$, albowiem d_k i k są wartościami bezwzględными, M zaś i φ' algebraicznymi, wobec tego przy $M < 0$ należy w równaniach (39.8) i (40.8) zmienić znak tylko przy d_k i k lub - na odwrót - tylko przy M i φ' . Wielkości I_s , H_k są zależne od wartości d_k . Gdy wyrugujemy ją relacją (39.8) w (40.8), otrzymamy równanie określające zależność funkcyjną między M i φ' . Ze wzrostem M rośnie φ' a maleje d_k . W granicznym wypadku, gdy $d_k \rightarrow 0$, a więc $I_s \rightarrow 0$, z równania (40.8) wynika:

$$|M| = M_\infty = k \chi_\infty, \quad (41.8)$$

gdzie χ_∞ oznacza łączny średnik obu połówek $\frac{A}{2}$ całego pola przekroju względem linii obojętnej. Spełnia on najwidoczniej rolę nośnika w zupełności plastycznego. W wypadku tym płynie materiał pręta w każdym jego punkcie. Warunek plastyczności (41.8) zginanego równomiernie pręta nie może się w istocie spełnić, albowiem wymaga on nierealnej konsekwencji $\varphi' = \infty$.

Tymczasem wiadomo nam jest, że ograniczamy zakres ważności rozwiązania do obszarów, w których $\varphi' d$ jest małe w porównaniu z 1. Niemniej wartość M stanowi bardzo cenną informację, liczbowo zbliżoną do realnych granicznych możliwości, albowiem M zmierza do M_∞ asymptotycznie.

Przykład 6.8. Zbadać przypadek elasto-plastycznego zginania dla przekroju prostokątnego $b \times h$. Jakie zmiany należy uwzględnić przy ograniczeniu ważności rozwiązania do $\epsilon = 2,5\%$ dla stali $E/k = 1000$?

Odpowiedź 6.8. Łatwo obliczyć $M_k = \frac{1}{6} b h^2 k$, $\varphi' k = 2 \frac{k}{E h}$ i dalej $I_\varphi = \frac{2}{3} b d_k^3 = \frac{2 b k^3}{3 E^3 \varphi^3}$, $H_k = \frac{1}{4} b (h^2 - 4 d_k^2) = \frac{b}{4} (h^2 - \frac{4 k^2}{E^2 \varphi^2})$. Równanie (40.8) przyjmie więc postać: $M = \frac{1}{4} b h^2 k - \frac{1}{3} \frac{b k^3}{E^2 \varphi^2}$, ważną dla $M \geq M_k$, $\varphi' \geq \varphi'_k$. Nośnik zgięcia plastycznego wynosi tu $\chi_\infty = \frac{1}{4} b h^2$, czyli jest 3/2 razy większy od nośnika sprężystego. Wykres (φ', M) jest od punktu $(0,0)$ do punktu (φ'_k, M_k) linią prostą, po czym przechodzi w krzywą hiperboliczną z asymptotą $M = M_\infty = \chi_\infty \cdot k$. Przejście z prostej w krzywą odbywa się bez załamania. Przy założonym ograniczeniu największa wartość zdłuzu wynosi $\epsilon = \varphi' \frac{h}{2} = 0,025 = \frac{\delta}{2}$. Wielkość $\delta = \frac{1}{20}$ jest liczbą istotnie małą w porównaniu do 1. Strefa sprężysta ma tu grubość wynoszącą raptem $2 d_k = \frac{2k}{E \varphi} = \frac{2k}{E \delta} \cdot h = \frac{h}{25}$. Moment osiąga zaś wartość $M = \chi_\infty k (1 - \frac{4}{3} (\frac{k}{E \delta})^2)$, więc mniejszą od $\chi_\infty \cdot k$ raptem o $\frac{1}{2} \%$.

Przykład 7.8. Obliczyć nośnik plastyczny dla przekroju kołowego o promieniu $a = 4$.

Odpowiedź 7.8. $\chi_\infty = 2 \cdot \frac{a^2 \pi}{2} \cdot \frac{4a}{3\pi} = \frac{4}{3} a^3 = \frac{16}{3\pi} \cdot \chi$, jeśli χ jest nośnikiem sprężystym. Zatem χ_∞ jest o 70% większy od χ . Zwiększenie jest szczególnie wielkie w przekrojach szerokich w linii obojętnej, i odwrotnie, małe w wąskich w linii obojętnej, więc np. w przekrojach dwuteowych.

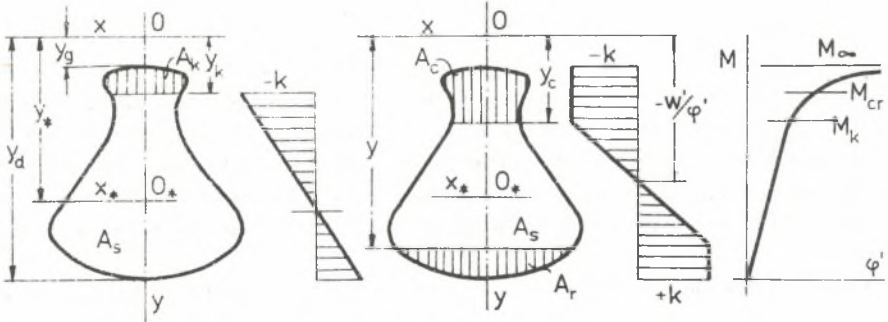
Gdy przekrój nie jest podwójnie symetryczny, położenie linii obojętnej nie jest z góry wiadome. Możemy za nią przyjąć - jak to czyniliśmy dotychczas - oś x i określić jej zmienne położenie, pisząc $\epsilon = \varphi' \cdot y$, albo też - co uczynimy obecnie - ustalić celowo oś x , a zakładając

$$\epsilon = \varphi' y + w' \tag{42.8}$$

określić położenie linii obojętnej $\epsilon = 0$ współrzędną $y = - \frac{w'}{\varphi'}$.

Zrazu będzie $\varphi' = \frac{M}{EI}$ tudzież $\sigma = \frac{M}{I} (y - y_*)$, gdzie I oznacza kształtnik przekroju względem prostej x_* równoległej przez środek geometryczny O_* do osi x , a $y - y_*$ współrzędne miejsca względem osi x_* . Linią obojętną jest w tym sprężystym stadium niezmiennie prosta $y = y_*$; tu więc $w' = - y_* \cdot \frac{M}{EI}$. Gdy M osiągnie wartość $M_k = \chi k$, gdzie χ jest mniejszym

z dwóch nośników sprężystych, a zatem gdy będzie $\frac{M}{I} (y_g - y_*) = -k$ wzdłuż włókna mającego największe oddalenie od prostej x_* materiał pręta poczynnie płynąć. Ze wzrostem momentu strefa plastyczna pogłębi się. Na rysunku 5.8 wzięto pod uwagę przypadek $M > 0$, nadto takiej konfiguracji przekroju, że proces płynięcia rozpoczyna się w strefie ściskanej, tj. zrazu w włóknie y_g .



Rys. 5.8

W tym stadium prosta:

$$E(\varphi' y_k + w') = -k, \quad (43.8)$$

przedzieli pole A na część plastyczną A_k i sprężystą A_s . Naprężenia tych stref będą równe:

$$A_k \sigma = -k, \quad A_s \sigma = E(\varphi' y + w'). \quad (44.8)$$

Uwzględniając powyższe w warunkach redukcji $\int \sigma dA = 0$, $\int y \sigma dA = M$ otrzymamy równania:

$$\begin{aligned} -k A_k + E \varphi' H_s + E w' A_s &= 0, \\ -k H_k + E \varphi' I_s + E w' H_s &= M, \end{aligned} \quad (45.8)$$

które wespół z (43.8) rozwiązują zagadnienie w rozważanym stadium. Wielkości H_k , H_s oznaczają tu średniki pól A_k , A_s , a I_s kształtnik pola A_s względem osi x . Wielkości te zależą od y_k . Najprościej rozwiązać równanie (43.8) i pierwsze z (45.8) względem φ' , w' i wstawić rezultaty w drugie z równań (45.8). Uzyskamy w ten sposób φ' , w' , M w funkcji y_k , a mianowicie:

$$\varphi' = \frac{k}{E} \cdot \frac{A}{H_s - y_k A_s}, \quad w' = - \frac{k}{E} \cdot \frac{H_s + y_k A_k}{H_s - y_k A_s},$$

$$M = k A \left(\frac{I_s - y_k H_s}{H_s - y_k A_s} - y_* \right). \quad (46.8)$$

Widoczne jest, że w założonym wypadku współrzędna $-\frac{w'}{\varphi'} = \frac{H_s + y_k A_k}{A}$ jest z powodu $y_k A_k > H_k$ większa od y_* , co oznacza, że w rozważanym stadium linia obojętna przesuwana się w stronę strefy rozciąganej. Rzucając z M i φ' parametr y_k znajdziemy φ' jako funkcję M . Podobnie znaleźć możemy $w(M)$. Gdy M jest ujemne, należy we wzorach w miejsce $-k$ wstawić $+k$. Zabiegiem tym możemy się posłużyć również wtedy, gdy z ukształtowania przekroju wynika, że przekroczenie granicy plastyczności nastąpi w strefie rozciąganej.

Stadium rozważane kończy się, gdy skrajne naprężenie dodatnie osiągnie wartość k , a zatem gdy będzie $E(\varphi' y_d + w') = k$, czyli $2H_s - (A_s - A_k) y_k = A y_d$, co się stanie przy szczególnym y_k , czyli szczególnym $M = M_{cr}$ i szczególnych φ' , w' . Z dalszym wzrostem M pogłębi się również rozciągana strefa plastyczna. Podziału pola A na części A_c , A_s , A_r dokonają proste

$$E(\varphi' y_c + w') = -k, \quad E(\varphi' y_r + w') = +k, \quad (47.8)$$

które wynikają z równań naprężeń

$$A_c \bar{\sigma} = -k, \quad A_s \bar{\sigma} = E(\varphi' y + w'), \quad A_r \bar{\sigma} = +k. \quad (48.8)$$

Z warunków redukcji $\int_{\text{od}} A = 0$, $\int y \sigma dA = M$ znajdziemy równania:

$$\begin{aligned} -k(A_c - A_r) + E \varphi' H_s &= E w' A_s = 0, \\ -k(H_c - H_r) + E \varphi' I_s + E w' H_s &= M. \end{aligned} \quad (49.8)$$

które wspólnie z równaniami (47.8) rozwiązują zagadnienie w nowym jego stadium. Najprościej, znalezione z równań (47.8) rezultaty

$$\varphi' = \frac{k}{E} \cdot \frac{2}{y_r - y_c}, \quad w' = - \frac{k}{E} \cdot \frac{y_r + y_c}{y_r - y_c}, \quad (50.8)$$

wstawić w pierwsze z równań (49.8). Znalezione tak równanie:

$$y_c(2A_c - A) + y_r(2A_r - A) + 2H_s = 0, \quad (51.8)$$

określa związek między współrzędnymi y_c, y_r . Łatwo sprawdzić, że kładąc $y_r = y_d, A_r = 0, y_c = y_k, A_c = A_k$ znajdziemy wcześniej podane równanie ograniczające ważność formuł poprzedniego stadium. Podobnie dla $y_c = y_r$ znajdziemy, że równanie to wobec $A_s = 0, H_s = 0$ spełnia się identycznie. Gdy rezultaty (50.8) umieścimy w drugim z równań (49.8), znajdziemy

$$M = \frac{k}{y_0 - y_c} (y_c(2H_c - H) + y_r(2H_r - H) + 2I_s), \quad (52.8)$$

jako funkcję współrzędnych y_c, y_r . Przyjmując dowolne y_c znajdziemy z (51.8) przynależne y_r . Dwie te wartości wyznaczają odnośne M, φ', w' . Uzyskamy w ten okrzęny sposób funkcje $\varphi'(M)$ i $w'(M)$.

Równanie (52.8) traci swą wartość przy $y_r = y_c$, tj. gdy materiał całego pręta płynie. Wtedy licznik i mianownik formuły zerują się. W tym granicznym wypadku należy skorzystać wprost z równań (49.8) bez pośrednictwa (50.8). Zważywszy, że wtedy jest $A_s = 0, H_s = 0, I_s = 0$ otrzymamy:

$$A_r = A_c, \quad M_\infty = k(H_r - H_c), \quad (53.8)$$

z czego wynika nośnik zginania plastycznego

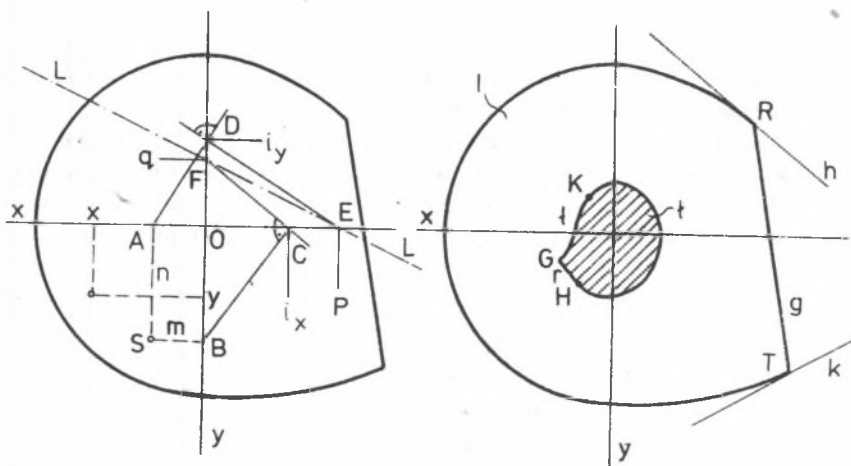
$$\chi_\infty = H_r - H_c. \quad (54.8)$$

Zdefiniowany w (41.8) nośnik jest szczególnym wypadkiem powyższego. Aby to zrozumieć należy zwrócić uwagę na różnicę w położeniu osi x przedtem i obecnie.

Przykład 8.8. Obliczyć nośnik plastyczny dla trójkąta b, h .

Odpowiedź 8.8. $A_c = A_r = \frac{bh}{4}$. Trójkąt A_c ma podstawę $b/2$ i wysokość $h/2$. Kładąc oś x przez wierzchołek mamy $\chi_\infty = H_r - H_c = H - 2H_c = \frac{bh^2}{3} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sim \frac{bh^2}{10}$, gdy nośniki sprężyste wynoszą: $\frac{bh^2}{24}$ i $\frac{bh^2}{12}$.

9. MIMOŚRODKOWE ROZCIĄGANIE LUB ŚCISKANIE



Rys. 1.9

Możemy podać jeszcze jeden przypadek podstawowy, w którym stan napięcia jest jednoosiowy, więc równie prosty jak dotychczasowe.

Niech na każdy z przekrojów ograniczających pręt działa zbiór sił równowarty sile wypadkowej P, równoległej do osi pręta w odstępnie od niej różnym od zera. Wtedy w dowolnym przekroju z znajdziemy siłę $S = P$, trafiającą przekrój w punkcie (m, n) . Będziemy ją w odróżnieniu od osiowej siły podłużnej nazywać mimośrodkową siłą podłużną lub krótko m i m o p o d ł u ż n ą, a rozważany wypadek - zależnie od zwrotu siły $S = m i m o ś r o d k o w y m$ równomiernym rozciąganiem lub ściskaniem. Sprobadzając siłę S do geometrycznego środka O przekroju znajdziemy że na zagadnienie to składa się osiowe rozciąganie siłą S oraz podwójne zginanie momentami:

$$M_x = S n, \quad M_y = - S m. \quad (1.9)$$

Z tego to powodu możemy też zaopiniować, że mamy przed sobą przypadek zginania w połączeniu z rozciąganiem względnie ściskaniem.

Niech układ odniesienia stanowią środkowa i główne osie kształtowania, a przynależne główne kształtowniki niech będą równe:

$$I_x = A i_x^2, \quad I_y = A i_y^2, \quad (2.9)$$

gdzie zatem i_x, i_y są odnośnymi promieniami kształtowania. Odkształcenie pręta polega na przesunięciu w' i obrotach φ', ψ' przekroju, tak że dla dowolnego punktu (x, y) przekroju jest w obrębie ważności prawa Hooke'a

$$\begin{aligned} \epsilon &= w' + \varphi' y - \psi' x, \\ \sigma &= E \epsilon, \end{aligned} \quad (3.9)$$

Parametry w', φ', ψ' znajdziemy stosując trzy warunki redukcji

$$\int \sigma dA = S, \quad \int y \sigma dA = S n, \quad \int x \sigma dA = S m, \quad (4.9)$$

a to na wzór (5.6) i (2.8)

$$w' = \frac{S}{EA}, \quad \varphi' = \frac{Sn}{EI_x}, \quad \psi' = -\frac{Sm}{EI_y}. \quad (5.9)$$

Wracając z tymi rezultatami do określenia σ w (3.9) i uwzględniając (2.9) otrzymamy:

$$\sigma = \frac{S}{A} \left(1 + \frac{ny}{i_x^2} + \frac{mx}{i_y^2} \right), \quad (6.9)$$

z czego wynika, że bryła naprężeń jest ograniczona płaszczyzną, której krawędź przecięcia z płaszczyzną przekroju nie zależy od wielkości siły S , lecz tylko od jej położenia (m, n) .

Tę krawędzią jest oczywiście linia obojętna $\sigma = 0$, czyli prosta:

$$1 + \frac{ny}{i_x^2} + \frac{mx}{i_y^2} = 0, \quad (7.9)$$

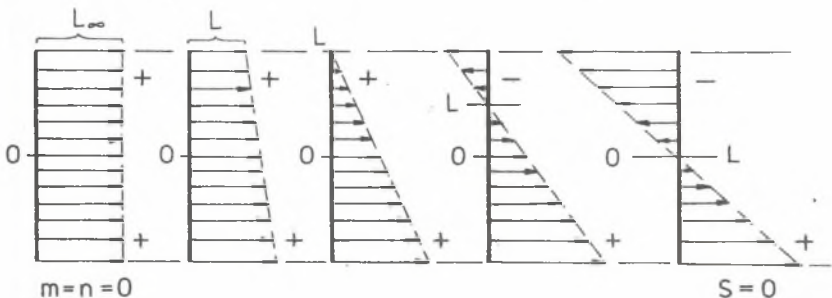
odcinająca na osiach x, y układu odcinki p, q wyrażające się - jak wynika z powyższego równania - relacjami:

$$m p = -i_y^2, \quad n q = -i_x^2. \quad (8.9)$$

Obliczenie wzorami (8.9) zastąpić można prostą konstrukcją wykreślną znaną z kreślenia średniej geometrycznej. Odetnijmy w tym celu w rys. 1.9 na osiach x, y od początku O punktami A, B współrzędne m, n , punktami zaś C, D ramiona i_x, i_y . Prostopadłe w D do AD względnie w C do BC dają na osiach układu punkty E, F , wyznaczające odcinki p, q relacji (8.9). Prosta, przechodząca przez punkty E, F jest poszukiwaną linią obojętną, zatem prostą rozdzielającą strefę rozciąganą od ściskanej. Równie prostą jest konstrukcja wyznaczania współrzędnych m, n środka obciążenia z danych odcinkami p, q położenia linii obojętnej.

Z relacji (8.9) wynika, że linia obojętna mija zawsze tę ćwiartkę płaszczyzny xy , w której leży środek obciążenia (m, n) . Gdy zaś punkt ten leży na jednej z głównych osi przekroju, linia obojętna - jak wynika z równania (7.9) - jest do tej osi prostopadle zorientowana. Gdy punkt ten zbliża się po promieniu OS do środka przekroju bezwzględne wartości obu współrzędnych m, n jednocześnie w tym samym stopniu maleją. Z formuł (8.9) widzimy, że na odwrót bezwzględne wartości odcinków p, q w tym samym stopniu jednocześnie rosną. Gdy więc środek obciążenia zbliża się względnie oddala od środka przekroju, linia obojętna zachowując kierunek oddala się względnie zbliża do tegoż środka O . Dowolnie wybranemu, ustalonemu punktowi (x, y) odpowiada według (7.9) prostolinijne miejsce geometryczne punktów (m, n) . Gdy więc środek obciążenia wędruje wzdłuż dowolnej linii prostej, linia obojętna obraca się dokoła stosowanego punktu (x, y) - i na odwrót.

Powyższe, pozornie abstrakcyjne rozważania mają swoje praktyczne znaczenia. Linia obojętna dzieli płaszczyznę xy na strefę ciągów i cisów. Wyobraźmy sobie przekrój bryły naprężeń płaszczyzną prostopadłą do tej linii. W zależności od tego czy linia obojętna trafia lub nie przekrój pręta, pojawić się może jedna z podanych na rys. 2.9 figur naprężeń σ . W pierwszej z nich rozpoznajemy przypadek osiowego rozciągania, w ostatniej zaś przypadek samego zginania. W drugiej linia obojętna L leży poza materiałnym przekrojem pręta. W czwartej zajmuje ona w obrębie przekroju położenie



Rys. 2.9

nie dowolne. Na szczególną uwagę zasługuje wreszcie środkowa, w której linia obojętna jest styczna do brzegu przekroju. W obrębie całego przekroju naprężenia posiadają jeszcze wspólny znak. Zwiększenie mimośrodowo obciążenia spowodowałoby tu zmniejszenie mimośrodowo linii obojętnej, czyli wprowadzenie dwóch stref różnych znaków naprężeń. Zmniejszenie mimośrodowo odśrodkowałoby linię obojętną poza kontur przekroju, co mogłoby być ewentualnie nieekonomiczne lub niepożądane.

Powstaje w związku z powyższym rozważaniem następujące zagadnienie. Po jakiej krzywej wędruje środek obciążenia S , gdy linia obojętna zachowując położenie styczne do konturu przekroju nigdzie go nie przecina. Najwidoczniej formuły (8.9) czy też równanie (7.9) i niedawno podane uwagi rozwiązują to zagadnienie. Dowolna, nie przecinająca przekrój, styczna jest tu linię obojętną o znanych odcinkach p, q . Z relacji (8.9) można przeto wyznaczyć rachunkowo lub wykreślnie współrzędne m, n . Zmieniając styczną, zmieniamy m, n , uzyskując jako miejsce geometryczne krzywą obejmującą $r d z e n$, czyli $j a d r o$ przekroju jak np. na rys. 1.9. Łukowi brzegowemu l przynależy łuk $l r d z e n$, zaś łukom R, T brzegu odpowiadają prostolinijne odcinki r, t konturu rdzenia, wreszcie odcinkowi g brzegu - czy też jego lokalnej wklęsłości - przyporządkowany jest łuk G jądra.

Należy się tu następujące wyjaśnienie. Wiadomo nam jest, że jedynie w wypadku osiowego ściskania lub rozciągania materiałów pręta jest ekonomicznie wyzyskany dzięki jednostajności naprężenia. W przypadku zginania strefa materiału położona w pobliżu linii obojętnej pracuje słabo. Z drugiej zaś strony materiały kruche posiadają bardzo małą wytrzymałość na rozciąganie, co pręty z nich wykonane wyłącza od obciążenia momentem zginającym. Te dwa fakty powodują naszą ucieczkę od momentu zginającego do siły podłużnej. Gdy jednakże zabieg ten ze względów użytkowych nie jest w dowolnej mierze wykonalny, ograniczamy się przynajmniej do tego, by dopuszczając niejednostajność wytężenia przekroju ograniczyć naprężenie do jednego tylko znaku - ujemnego dla materiałów kruchych.

Przykład praktyczny dla powyższych uwag stanowić może w pierwszym rzędzie przypadek fundowania dowolnego obiektu technicznego w rodzimym gruncie. Gdyby nim była nawet skała, nie jesteśmy w stanie - chyba przy użyciu kosztownych zabiegów, związanych z użyciem kotew - zrealizować ciągnięć w płaszczyźnie styku stopy fundamentu z podłożem. $C a ł k o w i c i e u t w i e r d z i ć$ czyli $z a m o c o w a ć$ fundament - np. komin fabrycznego - znaczy to, spowodować w obrębie $c a ł e g o$ pola zetknięcia naprężenia σ do niego prostopadłe $u j e m n e g o$ znaku, więc $c i s y$. Rzecz jest tym bardziej oczywista, gdy podłoże stanowi nawet pozornie zbity, ale nie mniej sypki grunt.

W przekrojach pręta ponadfundamentowych, np. kominów, filarów itp. materiały takie jak beton, mur ceglany (zwłaszcza na zaprawie cementowej) posiadają pewną, niezbyt wielką wytrzymałość na rozciąganie. Z reguły jednak, celem uproszczenia obliczenia, przyjmujemy dla niej wartość zerową. Wobec

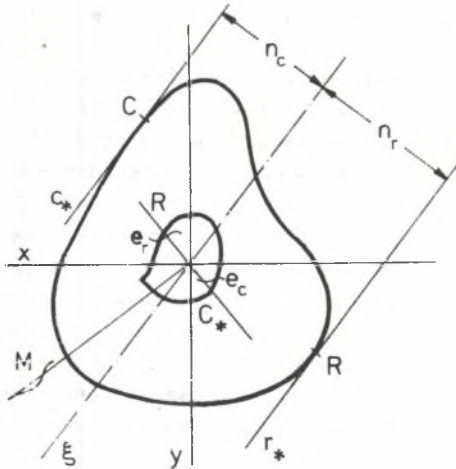
tego i tutaj przeprowadzone wyżej rozumowanie powtarza się. Musimy wprowadzić w rozważania rdzeń przekroju celem ograniczenia mimośrodów, czyli momentu zginającego.

Jednakże i przy samym zginaniu znajomość rdzenia przekroju może się okazać nader korzystną. Wróćmy na chwilę do pewnej kwestii poruszonej w ósmym punkcie. Przekrój jak na rys. 3.9 jest ukośnie zginany momentem M . Gdyby położenie linii obojętnej, a tym samym odległości η_c , η_r skrajnych włókien C , R były nam znane, moglibyśmy wyznaczyć naprężenia tych włókien według formuły (10.8)

$$\sigma_c = -\frac{M}{I} \eta_c, \quad \sigma_r = +\frac{M}{I} \eta_r, \quad (9.9)$$

więc doprowadzić je do postaci:

$$\sigma_c = -\frac{M}{\chi_c}, \quad \sigma_r = +\frac{M}{\chi_r} \quad (10.9)$$



Rys. 3.9

w której χ oznacza nośnik ukośnego zginania. Przyjmijmy zamiast tego, że znany nam jest rdzeń przekroju. Okazuje się, że wystarczy to do określenia nośnika χ , że zatem wyznaczone położenie linii obojętnej ξ odległości η_c , η_r , wielkości I staną się z b e d n e.

Przeprowadźmy w tym celu następującą spekulację myślową: Wywołane momentem M nieznanym naprężenie punktu np. C jest ciem. Dołączmy do momentu M taką siłę podłużną S , aby w rezultacie w punkcie C naprężenie było równe zero. Gdy się to uda, to naprężenie wywołane siłą S będzie ciągiem liczebnie równym nieznanemu cisowi. Z n a j o m o ś ć c i ę g u wywołanego siłą S będzie przeto i d e n t y c z n a z e z n a j o m o ś c i ą c i ę g u wywołanego momentem M . Realizując powyższą ideę nakreślimy przez środek przekroju ślad płaszczyzny pary zginającej, więc prostopadłą do wektora M . Przetnie ona kontur jądra w punktach C_* i R_* , oddalonych o e_c i e_r od środka przekroju. Działajmy na przekrój tylko mimopodłużną siłą S umieszczoną w C_* . Znaczący to tyle samo, jak gdybyśmy nań działali siłą osiową S i momentem zginającym $S \cdot e_c$ względnie tyle samo, jak gdybyśmy linię obojętną ξ samego zgięcia $S \cdot e_c$ przesunęli w położenie równoległe c_* przez punkt C , a tym samym spowodowali tam zerową wartość łącznego naprężenia. Stanie się to bez względu na wartość S . Przyjmijmy ją równą M/e_c , gdzie M jest wielkością daną tematem. Naprężenie pochodzące od sa-

meo rozciągania siłą S wynosi $\frac{S}{A}$, a zatem jest równe $M/A \cdot e_c$. To od zginania jest znaku przeciwnego. Podobnie wyznaczamy naprężenie punktu R .

W rezultacie skrajne liczebnie naprężenie wynosi:

$$\sigma = \frac{M}{\chi}, \quad (11.9)$$

gdzie nośnik zginania ukośnego jest równy

$$\chi = Ae. \quad (12.9)$$

Jest to najogólniejsza postać dla χ . Wykazaliśmy więc, że możemy wyznaczyć skrajne naprężenia zgięcia ukośnego, nie znając położenia odnośnych włókien ani położenia linii obojętnej. Konieczna natomiast jest znajomość rdzenia przekroju. Znaki i wskaźniki formuły (11.9) dla prostoty pominęliśmy. Sposób powyższy nosi w literaturze przedmiotu nazwę *metody momentów jędrnych*. Pod momentem jędrnym rozumiemy wielkość $M = Se$.

Zbiór formuł uzupełnimy wzorem dla energii sprężystości nagromadzonej w jednostce długości pręta. Wynosi ona:

$$\begin{aligned} W' &= \frac{1}{2} S w' + \frac{1}{2} S n \varphi' - \frac{1}{2} S m \psi' = \\ &= \frac{S^2}{2EA} + \frac{S^2 n^2}{2EI_x} + \frac{S^2 m^2}{2EI_y} = \\ &= \frac{1}{2} EA w'^2 + \frac{1}{2} EI_x \varphi'^2 + \frac{1}{2} EI_y \psi'^2 \end{aligned} \quad (13.9)$$

przy czym znak ' oznacza pochodną setową. Poszczególne dodajniki tego wyrażenia - przy zrozumiałych oznaczeniach $M_x = S_n$, $M_y = -S_m$ - są nam już znane z poprzednich ustępów.

Przykład 1.9. Wyznaczyć rdzeń przekroju prostokątnego.

Odpowiedź 1.9. Dla rozmiarów b, h jak na rys. 3.7 jest $i_x^2 = h^2/12$, $i_y^2 = b^2/12$. Dla położenia linii obojętnej $x = \pm \frac{b}{2}$, jest $p = \pm \frac{b}{2}$ więc $m = \mp \frac{b}{6}$, $n = 0$. Analogicznie dla jej położenia $y = \pm \frac{h}{2}$, jest $q = \pm \frac{h}{2}$, czyli $m = 0$, $n = \mp \frac{h}{6}$. Te cztery punkty wyznaczają rdzeń. Gdy bowiem linia obojętna obraca się - aby nie przeciąć prostokąta - dokoła jego wierzchołka, przechodząc z jednego w drugie z wyżej wymienionych położenia, środek obciążenia wędruje po odcinku prostej. Rdzeń jest rombem o przekątniach $b/3$ i $h/3$, ułożonych na osiach x i y przekroju.

Przykład 2.9. Obliczyć energię W' , wychodząc z definicji (11.3) i (12.3).

Odpowiedź 2.9. Stosując (6.9) w definicji $W' = \int \frac{\sigma^2}{2E} dA$ i uwzględniając (2.5), (3.5) tudzież (5.5) znajdziemy rezultat zgodny z (13.9).

Pozostaje nam zaopatrzyć jeszcze obecny ustęp uwagami dotyczącymi przypadków mimośrodkowego rozciągania względnie ściskania odbiegających od omówionego. Zaliczyć do nich możemy wypadki następujące:

Materiał pręta jest wprawdzie liniowo sprężysty, lecz jego wytrzymałość na rozciąganie jest równa zeru. Gdy środek obciążenia umieścimy poza rdzeniem przekroju, powstaje odmienna postać zagadnienia. Pojawi się *strefa niena*, odmienna od strefy, którą dotychczas mogliśmy nazywać rozciąganą. Gdy ją wzmocnimy innym ciągliwym materiałem, powstanie zagadnienie, które w szczegółach omawiane jest w teorii stalobetonu. Gdy jej nie wzmocnimy w ten sposób, obciążenie skoncentruje się na części przekroju - i oczywiście jest, że nie możemy mimośrodkowi nadawać dowolnie wielkich wartości; środek obciążenia musi się mieścić w obrębie przekroju. Gdy z konieczności dopuścimy taką ewentualność w szwie fundamentowym, mówimy o utwierdzeniu częścią przekroju.

Materiał nie podlega prawu Hooke'a, więc związek między naprężeniem i odkształceniem wyraża się dowolną funkcją $\sigma = f(\epsilon)$. Zakładamy tu z pewnym przybliżeniem, że stan napięcia będzie bez zmiany jednoosiowy i pomijamy fakt, że przy przesuwaniu się linii obojętnej wywołanym wzrostem siły i momentu, w pewnej części przekroju może pojawić się odciążenie podlegające funkcji $\sigma = g(\epsilon)$, odmiennej od $f(\epsilon)$. Tu należy też przypadek, gdy materiał liniowo-sprężysty poza obszarem sprężystym posiada obszar wprawdzie plastyczny. Jak przed chwilą tak i tu należy pamiętać, że ewentualne rozwiązanie dotyczy wypadku jednocześnie narastających S i $M = S e$. Gdy S i M maleją, zagadnienie wymaga nowego oddzielnego traktowania.

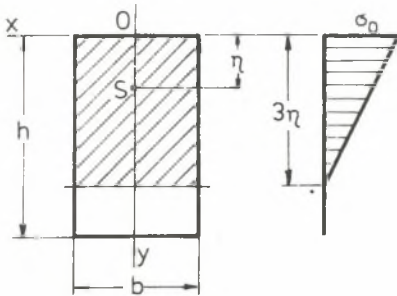
Wspólne dla wszystkich omawianych przypadków jest założenie niezmiennie płaskiego przekroju, wyrażające się równaniem:

$$\epsilon = w' + \varphi' y - \psi' x \quad (14.9)$$

z niewiadomymi w', φ', ψ' . Najprościej przy tym układowi osi dać ustalone położenie, np. środkowe i główne. Do znalezienia tych niewiadomych służą trzy warunki redukcji (4.9). Rozwiązując zadanie zakładamy, że siła i moment jednocześnie w tym samym stopniu narastają, tak że iloraz M/S , czyli mimośrodek e pozostaje niezmienny. Efekty końcowe są podobne do tych, jakie uzyskaliśmy w przypadku ukośnego zginania, względnie jeszcze bardziej skomplikowane. Wielkości w', φ', ψ' zależą nie tylko od współrzędnych m, n , lecz również od wartości siły. Gdy zagadnienie wymaga podziału przekroju na różne obszary całkowania, okazuje się, że i one zależą od wartości siły. W tych warunkach numeryczne rozwiązanie zadania jest znacznie utrudnione i wymaga wiele czasu. Uzasadnione wtedy staje się, że usiłujemy ograniczyć się do możliwie regularnych przekrojów, by liczbę niewiadomych możliwie ograniczyć.

Przykład 3.9. Mimopodłużna siła S działa zewnątrz rdzenia przekroju prostokątnego b, h na jego osi symetrii. Materiał wytrzymuje naprężenia tylko jednego znaku. Wyznaczyć bryłę naprężeń.

Odpowiedź 3.9. Zdłuż zmienia się według równania $\varepsilon = w' + \varphi'y$. Linia obojętna $\varepsilon = 0$ ma równanie $y = -w'/\varphi'$. W strefie $0 \leq y \leq -\frac{w'}{\varphi'}$, jest $\sigma = E\varepsilon =$



Rys. 4.9

$= E(w' + \varphi'y)$, w strefie zaś $w'/\varphi' \leq y \leq h$ jest $\sigma = 0$. Równania redukcji

$$\int_0^{-\frac{w'}{\varphi'}} E b (w' + \varphi'y) dy = S, \quad \int_0^{-\frac{w'}{\varphi'}} E b y (w' + \varphi'y) dy = S \eta,$$

po wykonaniu całkowań przybierają postać

$$S = -\frac{Eb}{2} \frac{w'^2}{\varphi'^2}, \quad S = \frac{Eb}{6} \frac{w'^3}{\varphi'^2},$$

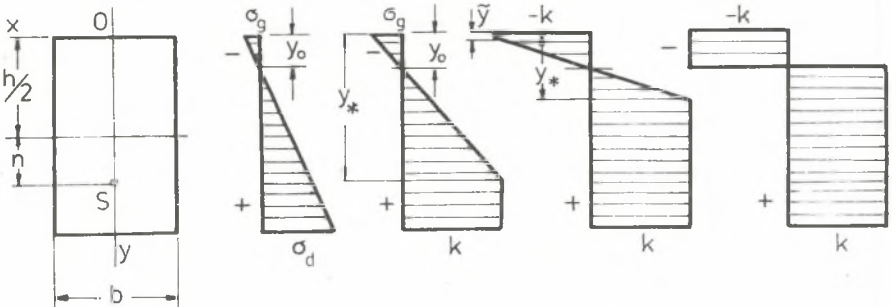
z której wynika $w' = \frac{2S}{3Eb\eta}$, $\varphi' = -\frac{2S}{9Eb\eta^2}$ za-

tem $3 \cdot \eta = -\frac{w'}{\varphi'}$. Czynna więc jest część przekroju rozmiaru 3η jak na rys. 4.9. Naprężenie tej strefy $\sigma =$

$= \frac{2S}{9b\eta} (3 - \frac{y}{\eta})$ przyjmuje dla $y = 0$ wartość $\sigma_0 = \frac{2S}{3b\eta}$, intensywnie rosnąc z ubytkiem η . Rozwiązanie ma sens dla $\eta > 0$.

Przykład 4.9. Przeprowadzić analizę stanu napięcia dla mimośrodkowo i symetrycznie rozciąganego przekroju prostokątnego, zakładając materiał z obszarem posprężystym wzorowo plastycznym.

Odpowiedź 4.9. W obszarze sprężystym przy oznaczeniach jak na rys. 5.9 jest według (6.9): $\sigma = \frac{S}{bh} (1 + \frac{12\eta}{h^2})(y - \frac{h}{2})$, skąd dla $y = 0$ i $y = h$ mamy $\sigma_g = \frac{S}{bh} (1 - \frac{6\eta}{h})$, $\sigma_d = \frac{S}{bh} (1 + \frac{6\eta}{h})$. Linia obojętna jest $y = y_0 = \frac{h}{2} - \frac{h^2}{12\eta}$. Zatem jeśli $\eta > 0$, jest $\sigma_d > (\sigma_g)$. Rozwiązanie to jest ważne przy zastrzeżeniu $\sigma_d \leq k$, czyli $6M \leq h(S_k - S)$, gdzie $M = S\eta$, $S_k = kbh$. Równanie $6M = h(S_k - S)$ przedstawia warunek plastyczności dla włókna $y = h$.



Rys. 5.9

Gdy S przekroczy granicę określoną powyższą nierównością, w przekroju powstaną dwie strefy. W sprężystej $0 \leq y \leq y_*$ naprężenie wyraża formuła $\sigma = E(w' + \varphi'y)$, w plastycznej $y_* \leq y \leq h$ jest $\sigma = k$. Obie strefy oddziela prosta $y = y_*$, wyznaczona warunkiem $E(w' + \varphi'y_*) = k(a)$. Warunki redukcji $\int_0^{y_*} E b(w' + \varphi'y) dy + \int_{y_*}^h k b dy = S$ tudzież $\int_0^{y_*} E b(w' + \varphi'y) y dy + \int_{y_*}^h k b y dy = M + \frac{Sh}{2}$ dają po scałkowaniu równania:

$$E b(w' y_* + \frac{\varphi'}{2} y_*^2) + k b(h - y_*) = S, \quad (b)$$

$$E b(\frac{w'}{2} y_*^2 + \frac{\varphi'}{3} y_*^3) + \frac{k b}{2}(h^2 - y_*^2) = M + \frac{Sh}{2}. \quad (c)$$

Równania (a), (b), (c) dają:

$$y_* = \frac{3}{2} \frac{h S_k - n S - 2M}{S_k - S}, \quad \sigma_g = E w' = k - \frac{4}{3b} \cdot \frac{(S_k - S)^2}{h S_k - h S - 2M}, \quad E \varphi' = \frac{8}{9b} \cdot \frac{(S_k - S)^3}{(h S_k - h S - 2M)^2},$$

co stanowi rozwiązanie zagadnienia w nowym jego stadium. Linia obojętna zajmuje położenie $\sigma = 0$, czyli $y = -\frac{w'}{\varphi'} = y_0$. Rozwiązanie jest ważne przy zastrzeżeniu $\sigma_g \geq -k$, czyli $6M \leq h(S_k - S)(1 + \frac{2S}{S_k})$. Formuła powyższa ze znakiem równości przedstawia warunek plastyczności dla włókna $y = 0$. Interesujące jest, że formuła ta obok M, S zawiera też dodatek S^2 .

Gdy S przekroczy granicę określoną powyższą nierównością, w przekroju powstaną dwie strefy plastyczne, przedzielone obszarem sprężystym. W obrębie strefy $0 \leq y \leq \tilde{y}$ jest $\sigma = -k$, w strefie $\tilde{y} \leq y \leq y_*$ jest $\sigma = E(w' + \varphi'y)$, wreszcie w strefie pozostałej $y_* \leq y \leq h$ jest $\sigma = +k$. Proste rozdzielające $y = \tilde{y}$ tudzież $y = y_*$ spełniają równania: $E(w' + \varphi'\tilde{y}) = -k$, $E(w' + \varphi'y_*) = k$ które dają $w' = -\frac{k}{E} \cdot \frac{y_* + \tilde{y}}{y_* - \tilde{y}}$, $\varphi' = \frac{k}{E} \cdot \frac{2}{y_* - \tilde{y}}$. Linia obojętną jest prosta $y = y_0$, gdzie $y_0 = -\frac{w'}{\varphi'} = \frac{y_* + \tilde{y}}{2}$. Warunki redukcji:

$$-\int_0^{\tilde{y}} k b dy + \int_{\tilde{y}}^{y_*} E b(w' + \varphi'y) dy + \int_{y_*}^h k b dy = S,$$

$$-\int_0^{\tilde{y}} k b y dy + \int_{\tilde{y}}^{y_*} E b y (w' + \varphi'y) dy + \int_{y_*}^h k b y dy = M + \frac{Sh}{2},$$

dają po scałkowaniu równania:

$$- kb \tilde{y} + kb(h - y_*) + Eb(w'(y_* - \tilde{y}) + \frac{\varphi'}{2}(y_*^2 - \tilde{y}^2)) = S \quad , \quad (d)$$

$$- \frac{kb}{2} \tilde{y}^2 + \frac{kb}{2}(h^2 - y_*^2) + Eb(\frac{w'}{2}(y_*^2 - \tilde{y}^2) + \frac{\varphi'}{3}(y_*^3 - \tilde{y}^3)) = M + \frac{Sh}{2} \quad , \quad (e)$$

które po wstawieniu uprzednio znalezionych w' , φ' przyjmują postać:

$$kb(j - \tilde{y} - y_*) = S, \quad kb(3h^2 - 2\tilde{y}^2 - 2\tilde{y}y_* - 2y_*^2) = 6M + 3Sh \quad .$$

Możemy im nadać też wygodniejszą budowę:

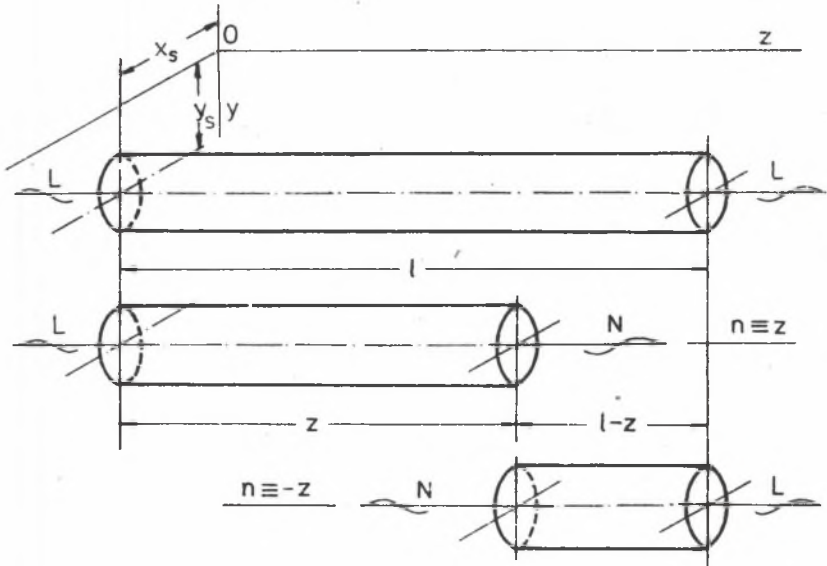
$$y_* + \tilde{y} = \frac{S_k - S}{S_k} h, \quad 2y_* \tilde{y} = \frac{6 M h}{S_k} - \frac{(S_k - S)(S_k + 2S)}{S_k^2} h^2,$$

nadającą się lepiej do rozwiązania obu równań względem \tilde{y} i y_* . Wracając z nimi do w' , φ' znajdziemy te parametry w zależności od S , M . Ważność tego ostatniego stadium ograniczona jest zastrzeżeniem $\tilde{y} \leq y_*$.

Rugując równościami $\tilde{y} = y_*$ tę zmienną w dwu ostatnich równaniach znajdziemy warunek plastyczności dla całego przekroju w postaci równania $4MS_k = (S_k^2 - S^2) h$. Z powodu komplikacji rachunkowych najczęściej zadawałamy się wyznaczeniem właśnie tylko rachunku plastyczności dla całego przekroju. Można go znaleźć bez potrzeby poszukiwania w' , φ' wprost z odnośnych warunków redukcji. Jak o tym pouczają równania (d), (e) z powodu równości $\tilde{y} = y_*$ parametry w' , φ' odpadają istotnie z rachunku. Objęcie obszarem plastycznym całego przekroju nie jest jednak w rzeczywistości możliwe. Rozwiązanie nasze wymagałoby bowiem dla w' , φ' nieograniczonych wartości, co nie jest fizycznie możliwe.

Zwrócić wreszcie należy uwagę, że dyskusję przeprowadzono przy założeniu $n > h/6$. Poza tym zaś przyjęto $n = \text{constans}$, co znaczy, że moment M wzrastał w tym samym stopniu jak S . Dzięki jednak temu, że w miejsce S_n wstawiono M , zależność M i S została ukryta i rozwiązanie powyższe ważne jest również dla wypadku, w którym M wzrasta niezależnie od zmian S . Zauważyć wreszcie trzeba, że w warunku plastyczności M figuruje w pierwszej a S w drugiej potęgze. Ma to znaczenie dla dyskusji znaków poszczególnych dodajników. Poszczególne stadia ilustruje rys. 5.9.

10. RÓWNOMIERNE SKRĘCANIE



Rys. 1.10

Zbiór sił, działających na przekrój końcowy $z = l$ pręta równowarty jest momentowi zewnętrznemu L , którego para leży w płaszczyźnie tego przekroju - czyli, którego wektor jest równoległy do osi z . Równoważący zbiór sił przekroju początkowego sprowadza się wobec tego również do przeciwnie skierowanego momentu zewnętrznego L . Dla prostoty rysunkowej umieściliśmy te wektory na osi pręta $x = x_s, y = y_s$.

Przypomnijmy krótko wiadomości nabyte na powyższy temat w mechanice układów sztywnych. Wpływ wewnętrzne znajdziemy dzieląc pręt dowolnym przekrojem z i odrzucając jedną z powstałych części. Operacja ta zamienia wielkości wewnętrzne na zewnętrzne i w ten sposób umożliwia stosowanie równań równowagi do części pozostawionej. Wynika z nich że na przekrój działa moment

$$N = L, \quad (1.10)$$

równoległy do osi z - jak na rys. 1.10. Dla rozważanego układu, długość l jest to wielkość wewnętrzna, czemu daliśmy wyraz, stosując mimo liczbowej równości odmienne oznaczenie. Znak momentu N ustalamy, odnosząc jednocześnie jego zwrot i zwrot normalnej zewnętrznej n przekroju do kierunku aktualnych osi układu; jest nimi obecnie dla obu osi z . Gdy normalna zewnętrzna jest zgodna z dodatnim kierunkiem osi z , to N jest dodatnie, gdy jego zwrot jest również zgodny z dodatnim kierunkiem osi z . Gdy normalna zewnętrzna jest zgodna z ujemnym kierunkiem osi z to N jest dodatnie, gdy jego zwrot jest zgodny z ujemnym kierunkiem osi z . Na rys. 1.10 założyliśmy przeto także L , że zachodzi wypadek $N > 0$.

Moment wewnętrzny o omówionym położeniu nazywamy momentem skręcającym. Mówimy o przypadku równomiernego skręcania, gdy - jak to właśnie ma miejsce - moment skręcający jest niezależny od zmiennej z , a więc jest stały wzdłuż pręta. Przypadek ten należy do grupy podstawowych.

Przejdźmy z kolei do rozważań na gruncie mechaniki układów odkształcalnych.

Wiemy z punktu piątego, że w grupie przypadków podstawowych dopuszczamy do konkurencji co najwyżej naprężenia τ_y , τ_x , σ_z . Ponieważ zbiór równoległych do osi z elementarnych sił $\sigma_z dA$ mógłby ewentualnie spowodować obecność siły podłużnej S oraz momentów zginających M_x i M_y , przeto wykluczając tę możliwość założymy obok (6.5) dodatkowo najprościej

$$\sigma_z = 0, \quad (2.10)$$

czyli będziemy usiłowali zbudować teorię równomiernego skręcania przy użyciu jedynie naprężeń stycznych

$$\tau_y = G\gamma_y, \quad \tau_x = G\gamma_x, \quad (3.10)$$

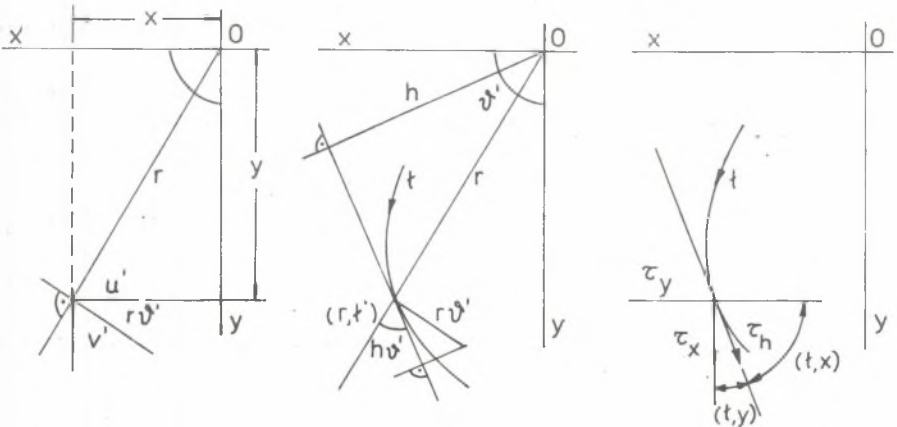
które związałyśmy powyżej z odkształceniami poprzecznymi γ_y , γ_x i prawem Hooke'a. Zadanie nasze polega przeto na wyznaczeniu tych naprężeń.

Wzorując się na stosowanym przez nas dotychczas postępowaniu musimy z kolei zająć się geometryczną stroną zagadnienia. Przyjmiemy, że działanie momentu skręcającego objawi się obrotem przekroju jak sztywnej całości. W punkcie piątym zaznaczaliśmy, że teoria de Saint-Venanta w konsekwencji założonych tam - a przez nas respektowanych - przyjęć teoretycznych narzuca na końcach pręta pewne szczególne warunki brzegowe. Wyrażają się one np. tym, że utwierdzenie przekroju ogranicza się do jego jednego tylko punktu. Zgodnie z tym przyjmujemy, że oś wspomnianego obrotu zajmuje jakieś równoległe do osi pręta położenie. Przechodzi ona właśnie przez unieruchomiony punkt przekroju np. początkowego $z = 0$. Możemy sobie ten punkt wyobrazić teoretycznie nawet poza materialnym przekrojem, a więc przyjęć,

że na rys. 1.10 osią obrotów jest oś z układu współrzędnych. Odształcenie polega tu na tym, że obrót jest względny. Jeśli przekrój z obraca się o kąt ϑ , przekrój sąsiedni z + dz obraca się o kąt $\vartheta + d\vartheta$. Wielkość ϑ' charakteryzującą zachowanie się całej odcinka przekroju, nazywać będziemy jednostkowym kątem owinięcia lub - krótko - o w i n i ę c i e m. Gdy w polskiej literaturze przedmiotu termin ten nie jest stosowany, wyjaśniamy, że przywiązujemy wagę nie tyle do użytego terminu, co raczej do tego, by bezwarunkowo nie stosować tu nazwy skręcania, której użyliśmy wyżej dla zjawiska mechanicznego a nie jak obecnie geometrycznego. Znak ' oznacza pochodną zetową.

Dowolny punkt (x, y) przekroju z dozna z powodu owinięcia ϑ' drobnego suwu $r \vartheta'$ w płaszczyźnie przekroju. Z podobieństwa widocznych na rys. 2.10 trójkątów wynika, że suwy składowe w kierunku osi x i y wynoszą:

$$u' = - \vartheta' y \quad v' = + \vartheta' x, \quad (4.10)$$



Rys. 2.10

przy czym znak ' oznacza pochodną zetową. Wzory (4.10) wyrażają zatem w układzie analitycznym fakt względnego obracania się przekrojów dokoła osi owinięcia, za którą obraliśmy dowolnie oś z. W skręcaniu równomiernym owinięcie też musi być równomierne. Parametr ϑ' jest tu przeto wielkością stałą, więc niezależną od z. Pozostałe części rys. 2.10 wykorzystamy przy sposobności nieco później. Tutaj dla zupełności jeszcze dodajemy, że gdybyśmy za oś obrotu obrali nie oś z, lecz np. prostą $x = c, y = d$, to oczywiste jest, że w miejsce relacji (4.10) weźłyby nieznacznie rozszerzone:

$$u' = - \vartheta'(y - d), \quad v' = + \vartheta'(x - c).$$

Gdyby naprężenia τ_y, τ_x były bezpośrednio związane z suwami u', v' prawem materiałowym, wykorzystalibyśmy - jak w poprzednich ustępach - ten fakt i weryfikując założony typ zagadnienia równaniami redukcyjnymi

$$\int \tau_y dA = 0, \int \tau_x dA = 0, \int (x\tau_x - y\tau_y) dA = N, \quad (5.10)$$

wyznaczylibyśmy z nich przy tej sposobności niewiadomą v' . Tak jednakże nie jest, albowiem figurujące w prawie wiążącym (3.10) wielkości

$$\gamma_y = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \gamma_x = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad (6.10)$$

zawierają obok u', v' jeszcze suwy pochodzące od przemieszczenia w . Wobec tego założenie kinematyczne (4.10) jest niewystarczające do rozwiązania zagadnienia.

Francuski teoretyk Navier podał zamkniętą, ogólną teorię skręcania, zakładając jako drugie przyjęcie, że odkształcone przekroje pręta pozostają nadal płaskie, to jest przyjmując dla przemieszczenia w wyrażenie

$$w = w_0 + \varphi y - \psi x, \quad (7.10)$$

w którym wobec tego wielkości w_0, φ, ψ są funkcjami co najwyżej tylko zmiennej z . Uwzględniając powyższe jak i (4.10) w (6.10) i (3.10) znajdziemy:

$$\tau_y = -G(v'y + \psi), \quad \tau_x = G(v'x + \varphi). \quad (8.10)$$

Ponieważ wobec stałego N stałe muszą być również τ_y, τ_x , przeto widzimy, że φ, ψ są wielkościami również stałymi.

Podstawiając powyższe w dwa pierwsze z równań (5.10) znajdziemy:

$$\varphi = -v'x_s, \quad \psi = -v'y_s, \quad (9.10)$$

wobec czego trzecie z równań (5.10) przybierze postać:

$$G v' \int (x^2 + y^2 - x_s x - y_s y) dA = G v' (J_0 - A(x_s^2 + y_s^2)) = N.$$

W równaniach tych x_s, y_s oznaczają współrzędne geometrycznego środka przekroju, J_0 zaś bierny moment bezwzględny kształtnik przekroju względem osi owinięcia, czyli $J_0 - A(x_s^2 + y_s^2) = J$ także kształtnik przekroju względem osi geometrycznej pręta. Zatem

$$v' = \frac{N}{GJ}, \quad (10.10)$$

stanowi ostateczny rezultat Navierowskiej teorii skręcania. Uwzględniając (9.10) i (10.10) w (8.10) znajdziemy:

$$\tau_y = -\frac{N}{J}(y - y_s), \quad \tau_x = \frac{N}{J}(x - x_s) \quad (11.10)$$

Na podkreślenie zasługuje fakt, który powtórzy się mutatis mutandis również w teorii de Saint-Venantowskiej, a mianowicie ujawnienia się roli geometrycznej osi pręta. Gdziekolwiek byśmy ustalili warunkami brzegowymi oś owinięcia J w formule (10.10) odniesione jest do geometrycznego środka przekroju. Podobnie i naprężenia (11.10) nie zależą od położenia środka owinięcia, lecz od położenia uważanego miejsca względem osi układu przesuniętych do tego punktu. Gdy więc oddalenie:

$$\left| \sqrt{(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2} \right|,$$

badanego miejsca przekroju od jego środka oznaczymy krótko literą r , naprężenie całkowite $\left| \sqrt{\tau_x^2 + \tau_y^2} \right| = \tau_r$ jest równe:

$$\tau_r = \frac{N}{J} r. \quad (12.10)$$

Skierowane ono jest prostopadle do promienia wodzącego r .

Wzór (10.10) z podanym Navierowskim znaczeniem parametru J nie jest ogólnie możliwy. Aby to zrozumieć weźmy pod uwagę dwa pręty równej długości z tego samego i tej samej objętości materiału. Nadajemy przekrojowi jednego postać koła, drugiego zaś wąskiego prostokąta. Wyobraźmy dalej sobie, że oba te pręty skręcamy liczebnie równymi momentami $L = N$. Nasze codzienne doświadczenie poucza nas, że kąt owinięcia $\psi = \psi' l$ dla pręta kołowego będzie znacznie mniejszy od tego kąta dla pręta o wąskim przekroju prostokątnym. Tymczasem teoria Naviera zapewnia o czym zupełnie przeciwnym, albowiem J przekroju kołowego jest wybitnie mniejsze od J równego polem przekroju prostokątnego, kąt ψ' zaś jest względem J odwrotnie proporcjonalny.

Ponieważ jeszcze dziś zdarza się, że stosuje się powyższe, niepoprawne określenie wielkości J , więc wydawało się wskazane zwrócić uwagę na ten szczegół. Jednocześnie zaś staje się konieczne zastanowić się, na czym polega stwierdzona sprzeczność.

W punkcie piątym zwróciliśmy uwagę na to, że w zagadnieniach pręta, które zamierzamy w tym rozdziale roztrząsać, pobocznica pręta jest wolna od obciążeń powierzchniowych. Na pobocznicy pręta dostawa zetowa n_2 jest równa zero. Wobec $\sigma_x = \sigma_y = \tau_z = 0$ warunki brzegowe (3.2) - o czym też mówiono w zadaniach 2.2 i 3.2 - redukują się na pobocznicy do równania:

$$\tau_y n_x + \tau_x n_y = 0, \quad (13.10)$$

(8.10) i (9.10) do warunku:

$$-(y - y_s) n_x + (x - x_s) n_y = 0. \quad (14.10)$$

Gdy oznaczymy współrzędną łukową brzegu przez s , jego normalną zewnętrzną przez n , to na brzegu zachodzą relacje:

$$n_x = \frac{\partial x}{\partial n} = s_y = \frac{\partial y}{\partial s}, \quad n_y = \frac{\partial y}{\partial n} = -p_x + -\frac{\partial x}{\partial s}, \quad (15.10)$$

przy czym n_x, n_y, n_z tudzież s_x, s_y, s_z wprowadzono jako skróty dla odpowiednich dostaw kierunkowych normalnej i stycznej do brzegu. Wprowadźmy esowe pochodne (15.10) w (14.10). Uzyskamy równanie

$$(y - y_s) \frac{\partial y}{\partial s} + (x - x_s) \frac{\partial x}{\partial s} = 0,$$

którego całka najwidoczniej brzmi:

$$(y - y_s)^2 + (x - x_s)^2 = c, \quad (16.10)$$

przy czym c jest dowolną stałą. Wiadomo nam jest, że powinniśmy nadać jej wartość dodatnią, jeżeli równanie (16.10) ma istotnie określać rzeczywisty kontur. Jest nim najwidoczniej koło.

Sprawa została wyjaśniona. J e d y n i e pręt o p e ł n y m przekroju kołowym lub r u r a ograniczona dwiema w s p ó ł e r o d k o w y m i powierzchniami walcowymi kołowym i uzyskuje przy skręcaniu p ł a s k i e przekroje. Dla takich tylko prętów parametr J we wzorach (10.10) i (12.10) oznacza biegunowy kształtnik przekroju, a więc jedną z wielkości

$$J = \frac{a^4 \pi}{2}, \quad J = \frac{a_2^4 - a_1^4}{2} \pi, \quad (17.10)$$

jeżeli a oznacza promień przekroju kołowego, względnie a_1, a_2 promień wewnętrzny i zewnętrzny pierścienia.

Największe naprężenie styczne znajdziemy z formuły (12.10) kładąc w niej $r = a$ względnie $r = a_2$. Uzyskamy dlań wartość

$$\tau = \frac{N}{Z}, \quad (18.10)$$

gdzie każdą z wielkości

$$Z = \frac{J}{a} = \frac{a^2 \pi}{2}, \quad Z = \frac{J}{a_2} = \frac{a_2^4 - a_1^4}{2a_2^2} \pi, \quad (19.10)$$

umawiamy się nazywać **nośnikiem skręcania**.

Przykład 1.10. Wyznaczyć nośnik skręcania cienkościennej rury kołowej.

Odpowiedź 1.10. Niech średni promień pierścienia wynosi a , a grubość ścianki b . Podstawiając to do (17.10) $a_2 = a + b/2$, $a_1 = a - b/2$ czy też wprost korzystając z założenia małego b/a znajdziemy $J = 2a^3b$, a z (19.10) $Z = 2a^2b$.

Przykład 2.10. Wyznaczyć ze skręcania cienkościennej rury kołowej przy ustalonej jej osi związek między odkształceniem γ i odpowiadającym mu naprężeniem stycznym $\bar{\tau}$.

Odpowiedź 2.10. Naprężenie wynosi $\bar{\tau} = \frac{N}{2a^2b\pi}$, suw zaś ϑ' równy jest wobec unieruchomienia osi rury wprost odkształceniu γ - czyli wobec $\vartheta = \vartheta'$ jest $\gamma = \frac{a}{r}$. Mierząc wtedy N i ϑ' znajdziemy związek między $\bar{\tau}$ i γ .

Przykład 3.10. Układ złożony z dwóch różnych prętów o przekrojach kołowych a wspólnej osi utwierdzono doskonale obu końcami i obciążono w przekroju pośredniczącym momentem L . Wyznaczyć wielkości podporowe.

Odpowiedź 3.10. Momenty podporowe są L_1 i L_2 . Warunki równowagi redukują się do jednego $L_1 + L_2 = L$. Zagadnienie jest przeto hyperstatyczne. Całkowity kąt owinięcia każdej z części musi mieć wspólną wartość $\frac{L_1 J_1}{G_1 J_1} = \frac{L_2 J_2}{G_2 J_2}$. Dwa te równania rozwiązują zagadnienie.

Formuła (18.10) służy z reguły do wyznaczenia rozmiarów przekroju przy określonym momencie N i naprężeniu bezpiecznym $\tau_0 \geq \tau$. Bywa jednak, że rozmiary te wyznaczamy również, ograniczając kąt $\vartheta' = \vartheta'$. Wtedy korzystamy z formuły (10.10). Energia sprężystości pomyślanej jednostki długości pręta wynosi:

$$W' = \frac{1}{2} N \vartheta' = \frac{1}{2} \frac{N^2}{GJ} = \frac{1}{2} GJ \vartheta'^2, \quad (20.10)$$

przy czym znak $'$ oznacza pochodną zetową.

Przykład 4.10. Wyznaczyć energię W , wychodząc z definicji (11.3) i (12.3).

Odpowiedź 4.10. Energia jednostki objętości wynosi $W_0 = \frac{\tau_x^2 + \tau_y^2}{2G} = \frac{\tau_r^2}{2G} = \frac{N^2}{2GJ} \cdot r^2$, energia zaś jednostki długości pręta jest równa $W' = \int W_0 dA$, co wobec $\int r^2 dA = J$ prowadzi do (20.10).

Gdy przekrojowi pręta nadamy postać dowolną różną od koła względnie kołowego pierścienia, nie pozostanie on po odkształceniu płaskim, lecz wypaczy się w ten sposób, że jego stosowne części na przemian doznają przemieszczeń w przed i za pierwotną jego płaszczyznę. Uczeń Naviera de Saint-Venant wykazał, że w miejsce (7.10) przy pominięciu dodajników wynikłych z ruchów pręta jako sztywnej całości przyjąć trzeba:

$$w = \psi' \cdot \vartheta, \quad (21.10)$$

gdzie ϑ jest płaską funkcją harmoniczną, zatem funkcją spełniającą we wnętrzu przekroju równanie różniczkowe

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} = 0, \quad (22.10)$$

- które na brzegu przekroju czyni zadość warunkowi:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial n} = \frac{\partial \vartheta}{\partial x} n_x + \frac{\partial \vartheta}{\partial y} n_y = y n_x - x n_y. \quad (23.10)$$

Znajomość funkcji owinięcia ϑ rozwiązuje zadanie pod każdym względem. W miejsce formuł (8.10) wchodzi relacje

$$\tau_y = G \psi' \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} - y \right), \quad \tau_x = G \psi' \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial y} + x \right), \quad (24.10)$$

formuła zaś (10.10) zachowuje swój wygląd, z tym, że zależna od postaci przekroju wielkość J o wymenzji długości w czwartej potędze wyraża wzór:

$$J = \int (x^2 + y^2 + x \frac{\partial \vartheta}{\partial y} - y \frac{\partial \vartheta}{\partial x}) dA. \quad (25.10)$$

Boussinesque analizując zachowanie się funkcji harmonicznego wykazał, że największe naprężenie styczne przynależy zawsze do konturu brzegowego. Obliczając przeto na brzegu przekroju $\tau = \sqrt{\tau_x^2 + \tau_y^2}$ możemy wyznaczyć jego maximum i nadać mu postać końcową (18.10). Oczywiście okaże się, że nośnik Z zachowuje stale wymenzję długości w trzeciej potędze, a jego budowa matematyczna zależy od geometrycznej postaci przekroju. Na ogół punktem, w którym τ osiąga największą wartość jest ten najbliższy leżący środka przekroju.

Filon wykazał jednak, że mogą istnieć wyjątki od tej reguły. Wreszcie energię sprężystości przedstawia w dalszym ciągu wyrażenie (20.10) z określeniem J według (25.10).

Ujawnione wypaczenie przekroju nie stanowi na szczęście trudności przy praktycznym stosowaniu teorii. Budując dla pręta składającego się z kilku części warunki nierozdzielności operujemy z reguły tylko kątami owinięcia ϑ' , nie martwiąc się tym, że wskutek odmiennego wybrzuszenia przylegających do siebie części nierozdzielność nie jest ściśle zachowana. Wygląda to więc tak, jak gdybyśmy milcząco zakładali, że **ś r e d n i e** w y p a c z a n i e $\frac{\partial w}{\partial x}$ i $\frac{\partial w}{\partial y}$ jest równe zeru, co z powodu wspomnianego pofalowania przekroju ma istotnie miejsce. Twierdzenie de Saint-Venanta, na które już wielokrotnie powoływaliśmy się, poucza, iż krótkie końcowe skrawki pręta mogą być siedzibą odmiennych stanów napięć i odkształceń, nie wpływając tym jednak na rozwiązanie podane dla przeważającej, zasadniczej długości pręta.

Wreszcie ważne jest pamiętać, że punktowe warunki brzegowe, jakimi posługuje się de Saint-Venantowska teoria skręcania są niezgodne z warunkami brzegowymi, jakie narzucają względy praktyki konstruktorskiej. Z reguły przekrój końcowy zamocowany bywa w większej liczbie punktów, wzdłuż zamkniętej krzywej, albo wreszcie na całym swym polu. Podobnie przekrój pośredniczący między lewą i prawą częścią pręta współdziała z natury rzeczy również całym swym polem. W tych zmienionych warunkach brzegowych jeden ważny szczegół zasługuje na uwagę. Oto okazuje się, że oś owinięcia przyjmuje w pręcie pewne **s z c z e g ó l n e** położenie $x = c, y = d$, uzależnione od geometrycznej postaci przekroju. Jest to zatem pewne **p o ł o ż e n i e** **n a t u r a l n e**, gdy w rozwiązaniu de Saint-Venanta było to położenie wymuszone ustaleniem **j e d n e g o** tylko punktu $x = a, y = b$. Ową szczególną prostą nazywamy **n a t u r a l n ą** **o s i ą** **o w i n i ę c i a**. O położeniu jej będzie jeszcze mowa przy innej sposobności.

Pożądanę jest dodać jeszcze kilka uwag odnośnie rozwiązania ścisłego. W poszukiwaniu za stosowniejszą postacią warunku brzegowego teoretycy wprowadzają w miejsce funkcji ϑ inną również harmoniczną funkcję ψ z tą samą sprzężoną, tj. czyniącą zadość związkom:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = - \frac{\partial \vartheta}{\partial y}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \quad (26.10)$$

Widzimy, że czyni ona zadość istotnie równaniu harmonicznemu

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0, \quad (27.10)$$

warunek zaś brzegowy (23.10) po wprowadzeniu osowych pochodnych według (15.10) przybiera dla niej postać:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} = \frac{\partial \psi}{\partial s} = x \frac{\partial x}{\partial s} + y \frac{\partial y}{\partial s},$$

która po scałkowaniu względem s - z pominięciem dowolnej stałej - daje na brzegu

$$\psi = \frac{1}{2}(x^2 + y^2). \quad (28.10)$$

Znalazłszy z równań (27.10) i (28.10) funkcję ψ wracamy według (26.10) z powrotem do funkcji φ .

W matematycznej teorii sprężystości wielkie znaczenie posiadają tzw. funkcje naprężenia. Rozumiemy pod nimi ogólnie tak dobrane funkcje, że przedstawione ich pochodnymi - pierwszymi lub drugimi z ewentualnie dołączonymi znacznymi dodatkami funkcyjnymi - składowe stanu napięcia czynią identycznie zadość warunkom równowagi.

W teorii skręcania funkcje naprężeń jest wyrażenie:

$$\Omega = G \varphi' \left(\psi - \frac{x^2 + y^2}{2} \right), \quad (29.10)$$

czyniące wewnątrz konturu zadość równaniu różniczkowemu

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} = -2G \varphi' \quad (30.10)$$

na jego brzegu zaś warunkowi

$$\Omega = c, \quad (31.10)$$

gdzie c jest dowolną, np. zerową stałą. Powyższe wynika z równań (27.10) i (28.10). Podstawiając (29.10) za pośrednictwem (26.10) w (24.10) znajdziemy

$$\tau_y = \frac{\partial \Omega}{\partial y}, \quad \bar{\tau}_x = -\frac{\partial \Omega}{\partial x}, \quad (32.10)$$

co rzeczywiście czyni zadość warunkowi równowagi

$$\frac{\partial \tau_y}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\tau}_x}{\partial y} = 0. \quad (33.10)$$

Zatem Ω jest istotnie funkcją naprężeń.

Na zakończenie powyższych uwag z dziedziny matematycznie ścisłej teorii skręcania trzeba dodać jeszcze dodatkowe zastrzeżenie.

Podane równania dla funkcji φ czy też ψ , czy wreszcie Ω wystarczają do rozwiązania zagadnienia przy założeniu, iż przekrój pręta tworzy obszar jednorodny, tj. obszar, w którym każda dowolna zamknięta krzywa może być drogą ciągłej deformacji ściągnięta do rozmiarów punkta.

tu, nie przecinając przy tym nigdzie brzegu. Zatem obzarem jednospójnym jest przekrój bez wykrojów. Przekrój z jednym otworem jest d w u s p ó j n y, z dwoma wykrojami t r ó j s p ó j n y itd. Teoretyczne rozważanie poucza, że przedstawiony wyżej aparat matematyczny stanowi w wypadku przekrojów wielospójnych środek konieczny, lecz niewystarczający dla uzyskania j e d n o z n a c z n e g o, więc zabezpieczającego ciągłość materii układu, rozwiązania.

Niech Γ przedstawia dowolną zamkniętą krzywą położoną w całości w obrębie materialnego przekroju pręta. Wychodząc z dowolnego jej punktu obejdźmy ją w całości. Jasne jest, że wrócić musimy do punktu wyjścia, mimo tego iż z powodu wypaczenia przekroju przebywaliśmy różne spadki $\partial/\partial x$. Warunek jednoznaczności rozwiązania w teorii skręcania brzmi:

$$\oint \frac{\partial w}{\partial x} dx = 0, \quad (34.10)$$

przy czym \oint oznacza całkowanie wzdłuż krzywej zamkniętej. W przekrojach jednospójnych warunek ten jest identycznie spełniony. Dla wielospójnych stanowi on dodatkowe brakujące do rozwiązania równania.

De Saint-Venant podał rozwiązanie zagadnienia skręcania dla wielu różnych przekrojów mających praktyczne zastosowanie. Okazało się, że dla niewielu tylko ma ono postać zamkniętą. Z reguły zaś trzeba użyć rozwinięć na szeregi. Dla celów praktyki zależnie od stopnia ich zbieżności urywamy je na większej lub mniejszej liczbie wyrazów albo - co często jest lepsze - zamieniamy na stosowaną formułkę interpolacyjną. Podanie ogólnych formuł dla J tudzież Z , obejmujących wszelkie przekroje nie okazało się możliwe. W pewnym stopniu jest to możliwe, gdy przekroje w pewien sposób będziemy grupować. Tak np. dla przekrojów jednospójnych całkowicie wypukłych stosowana bywa de Saint-Venantowska formuła:

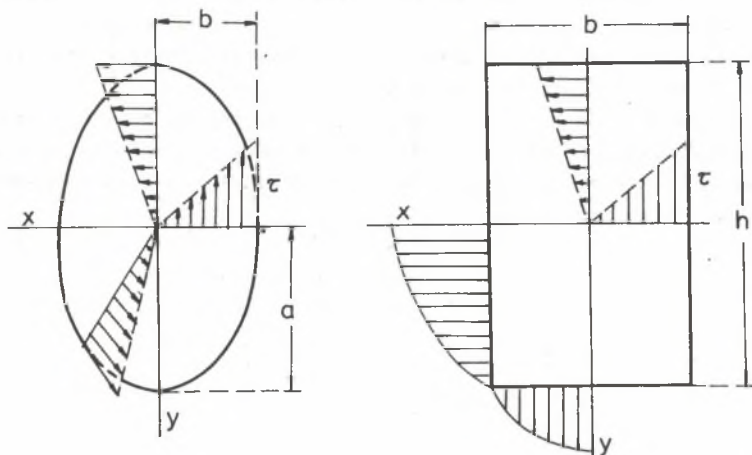
$$J = \frac{A^4}{\nu I_0}, \quad (35.10)$$

w której A oznacza pole przekroju, I_0 jego biegunowy kształtnik względem środka przekroju, a ν współczynnik liczebny wywołujący w przybliżeniu 40. Odmiennie zbudowaną formułę można podać dla przekrojów uformowanych z wąskich pasków - o czym będzie jeszcze mowa gdzie indziej.

Rozwiązanie dla przekroju eliptycznego o półosiach a i b brzmi:

$$J = \frac{a^3 b^3 \pi}{a^2 + b^2}, \quad Z = \frac{ab^2 \pi}{2}, \quad b \leq a. \quad (36.10)$$

Tutaj przeto jest $\nu = 4\pi^2 = 39,5$. Rys. 3.10 podaje przebieg naprężeń. Największe, dla którego wyżej podano nośnik Z , przynależy do miejsc położonych na końcach osi krótszej. Dla prostokątnego przekroju o bokach b , h jest:



Rys. 3.10

$$J = \frac{12}{\nu} \cdot \frac{b^3 h^3}{b^2 + h^2}, \quad Z = \frac{b^2 h}{3 + 1,8 \frac{b}{h}}, \quad b < h, \quad (37.10)$$

przy czym ν zależy od stosunku b/h według tabeli jak niżej

b/h	1/1	1/2	1/4	1/8	1/∞
ν	42,7	42,0	40,2	38,5	36,0

Z przedstawiono tu formułą interpolacyjną. Dla bardzo wąskiego przekroju prostokątnego widocznie jest:

$$J = \frac{1}{3} b^3 h, \quad Z = \frac{1}{3} b^2 h, \quad (38.10)$$

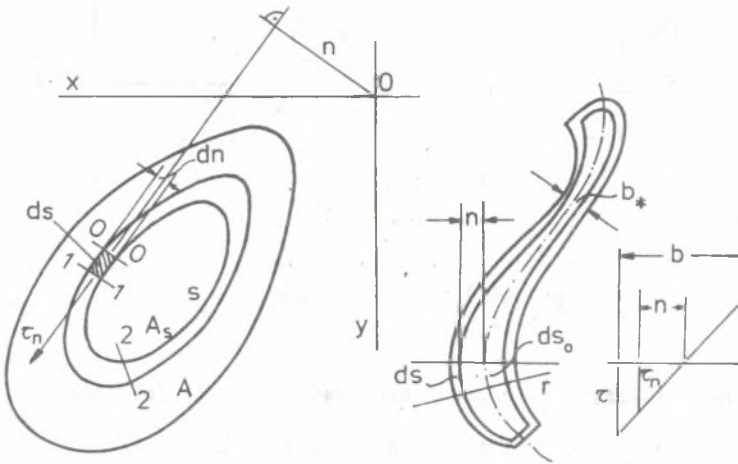
co w dalszej części uwidoczniemy jeszcze raz elementarnym rachunkiem. Przy tej sposobności mogliśmy zauważyć, że parametr liczbowy ν jednak dość wyraźnie odchyła się od wartości 40. Dla trójkąta równobocznego wynosi on 45.

Wrócimy obecnie z powrotem do rozważań elementarnych. Równanie (13.10) poucza, iż na brzegu przekroju naprężenie całkowite $\bar{\tau} = (\tau_x^2 + \tau_y^2)$ ma kierunek do niego styczny. Krzywą posiadającą tę własność, iż naprężenie jest

do niej styczne, nazwaliśmy już w pierwszym rozdziale trajektorią. Zatem w przypadku skręcania kontur przekroju jest trajektorią brzegową naprężenia stycznego. Z pewnością istnieją również wewnątrz przekroju analogiczne zamknięte, wzajemnie nie przecinające się trajektorie. W istocie - gdyby dwie trajektorie posiadały wspólny punkt, przynależne mu naprężenie styczne miałyby nieoznaczony kierunek, co przeczy definicji trajektorii - chyba, że naprężenie to wynosiłoby zero. Gdy zaś między sobą się nie przecinają, każda z nich musi się zamykać w sobie.

Znajomość trajektorii naprężeń stycznych jest identyczna ze znajomością rozwiązania zagadnienia skręcania. Przeprowadzimy dowód tego twierdzenia. Niech trajektorie należą do jednoparametrowej rodziny krzywych

$$\Omega(x, y) = c_n \quad (39.10)$$



Rys. 4.10

Nadając stałej c_n wartość szczególną c , np. zerową, otrzymamy z równania $\Omega = c$ trajektorię brzezną. Nadając jej stosowane inne wartości znajdziemy kolejno równania coraz to innych trajektorii właściwych, tj. wewnętrznych. Weźmy pod uwagę na rys. 4.10 dwie sąsiednie trajektorie. Ich wzajemne oddalenie dn jest zmienne i zależy od położenia, które określić możemy współrzędną łukową s . Zmienne jest również wzdłuż s naprężenie τ_n . Nie trudno jednak zauważyć, że iloczyn $\tau_n dn$ jest niezmienny wzdłuż obojczyka trajektorii. Istotnie, wytnijmy z pręta dwoma dowolnymi przekrojami z - najprościej oddalonymi o jednostkę - dwiema sąsiednimi powierzchniami walcowymi, kierowanymi dwiema sąsiednimi trajektoriami i wreszcie dwiema płaszczyznami $s = s_1$ i $s = s_2$ wąski płatek pręta. Jego powierzchnie walcowe są wolne od obciążeń, zaś jego wąskie prostokąty ogranicza-

jące szerokości dn' i dn'' , zgodnie z twierdzeniem o równowartości odpowiadających naprężeń stycznych, nałożone są przeciwnie skierowanymi, równoległymi do osi pręta siłami $\tau_n' dn'$ i $\tau_n'' dn''$. Skoro innych równoległych do tworzących pręta sił nie ma, muszą być wypisane między sobą równe.

Elementarne pole wynosi $dA = dn ds$, składowe zaś naprężenia τ_n są równe $\tau_y = \tau_n s_x$ tudzież $\tau_x = \tau_n s_y$. Pierwsze dwa z równań redukcji (5.10) są spełnione. Istotnie mamy tu $\int \tau_y dA = \iint \tau_n s_x dn ds = \int \tau_n dn \int s_x ds$. Wyrażenie $\tau_n dn$ wyłączyliśmy przed całką zawierającą wyrażenie podcałkowe zależne od s , albowiem wzdłuż trajektorii $\tau_n dn$ jest niezmienne. Lecz wzdłuż zamkniętego okręgu s jest $\int s_x ds = \int \frac{\partial x}{\partial s} ds = \int dx = 0$. Podobnie dowodzi się równości $\int \tau_x dA = 0$. Dla celów trzeciego z równań (5.10) obliczamy $dN = \int \tau_n dn ds n = \tau_n dn \int n ds$. Lecz $n ds$ oznacza podwójne pole trójkąta o podstawie ds i wysokości n nakreślonej z początku układu współrzędnych O . Wobec tego jest $dN = 2A_s \tau_n dn$, przy czym A_s jest polem zamkniętym uważaną trajektorią, czyli

$$N = 2 \int A_s \tau_n dn. \tag{40.10}$$

Założyliśmy na wstępie tego rozważania, że trajektorie $\Omega = c$ są nam znane. Wobec tego pola A_s są nam również znane. Wykażemy, że również τ_n można wyrazić funkcją Ω .

Wzdłuż jednej trajektorii funkcja Ω jest stała. Wyrazić to możemy równaniem

$$\frac{\partial \Omega}{\partial s} = \frac{\partial \Omega}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial \Omega}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} = 0,$$

lub po wprowadzeniu oznaczeń (15.10)

$$\frac{\partial \Omega}{\partial y} \cdot n_x - \frac{\partial \Omega}{\partial x} \cdot n_y = 0. \tag{41.10}$$

przy czym n - jak na rys. 4.10 - jest normalną do trajektorii. Równaniu temu możemy nadać postać (13.10), jeśli zdefiniujemy naprężenie τ_y , τ_x zgodnie z (32.10). W ten sposób rozszerzyliśmy znaczenie funkcji Ω . Związaaliśmy z jej obecnością nie tylko kierunek naprężenia, lecz również jego wartość. Jest to oczywiste, bowiem równanie (41.10) można pomnożyć przez dowolną stałą. Wyobrażając ją sobie zawartą w Ω uczyniliśmy z niej funkcję naprężeń. Zatem trajektorie w zagadnieniu skręcania określa funkcja naprężeń.

Przy przejściu z jednej trajektorii do drugiej funkcja Ω doznaje zmiany. Możemy to z kolei wyrazić równaniem

$$\frac{\partial \Omega}{\partial n} = \frac{\partial \Omega}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial \Omega}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial n}.$$

Podstawiając tu (15.10) tudzież przed chwilą uzasadnione (32.10) otrzymamy:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial n} = - (\tau_y s_x + \tau_x s_y),$$

lecz dwumian zawarty w nawiasie jest sumą rzutów obu naprężeń τ_y, τ_x na styczną do trajektorii. Jest on więc - co wynika z definicji trajektorii - całkowitym naprężeniem τ_n . Mamy zatem:

$$\tau_n = - \frac{\partial \Omega}{\partial n}. \quad (42.10)$$

Wracając do rezultatu (40.10) możemy mu nadać obecnie postać

$$N = - 2 \int A_s \frac{\partial \Omega}{\partial n} dn.$$

Równanie to posłużyć może do wyznaczenia czynnika proporcjonalności, ukrytego w Ω i decydującego o tym, że Ω jest istotnie funkcją naprężeń. Lepiej, całkując per partes, używać go w postaci następującej:

$$N = - 2(A \Omega - A_0 \Omega_0) + 2 \int \Omega dA. \quad (43.10)$$

Tutaj A jest polem zawartym w konturze zewnętrznym przekroju, a $\Omega = c$ przynależną tam wartością funkcji Ω . Podobnie A_0 oznacza pole ewentualnego wykroju, a $\Omega_0 = c_0$ przynależną mu wartość funkcji Ω . Dla obszaru jednospojnego jest: $A_0 = 0$, na j e d n y m brzegu zaś zawsze dysponujemy wartością c . Przyjmując ją dla przekroju jednospojnego równą zero otrzymamy prościej:

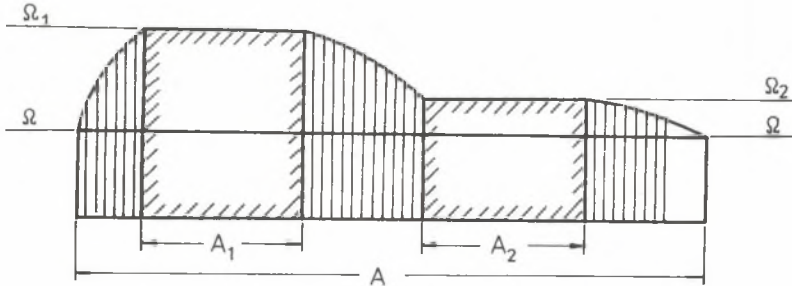
$$N = 2 \int \Omega dA. \quad (44.10)$$

W przypadku obszaru wielospójnego można wykazać równość

$$N = 2 \left(\int \Omega dA + \sum_i A_i \Omega_i - A \Omega \right). \quad (45.10)$$

Ilustrację ostatnich formuł stanowić może rys. 5.10.

Przedstawmy funkcję Ω jako powierzchnię rozpiętą nad uważanym przekrojem. Wtedy podwójna objętość bryły obwiedzionej grubą linią przedstawia moment skręcający N .



Rys. 5.10

Na zakończenie tej kwestii musimy zwrócić uwagę na dwa ważne szczegóły. Wychodząc z założenia, iż istnieje funkcja Ω , określająca linie naprężeń stycznych z biegiem wywodu zidentyfikowaliśmy ją z funkcją naprężeń Ω . Uzyskaliśmy w ten sposób łączność między definicją trajektorii (39.10) i warunkiem brzegowym (31.10), a nadto wykorzystaliśmy definicję funkcji naprężeń (32.10). Nie wynika z tego bynajmniej, że uczyniliśmy też zadość równaniu różniczkowemu (30.10). Kładąc $c_n = c$ otrzymujemy z równania $\Omega = c$ równanie brzegu, więc np. krzywą $w(x, y) = 0$. Nie wynika z tego bynajmniej, że wyrażenie $\Omega - c$ jest identycznie równe wyrażeniu w . Wystarczy wyobrazić sobie, że w jest np. dzielnikiem wyrażenia $\Omega - c$. Wobec tego znajomość brzegu nie jest identyczna ze znajomością funkcji Ω . Wyjątkowo będzie tak tylko wtedy, gdy funkcja $w(x, y)$ pochodzi z rodziny:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = a,$$

gdzie a jest stałą dowolną różną od zera. Wnioskujemy tak na podstawie znów równania (30.10).

Ścisłe rozwiązanie zagadnienia skręcania wymaga przeto zawsze całkowania równania harmonicznego lub innego pokrewnego. Rozwiązanie przybliżone polegać zaś musi na tym, że Ω dobierzemy tylko tak, by na brzegu było z nim zgodne. Oczywiście możemy to zrobić na nieograniczenie wiele sposobów, uzyskując za każdym razem rozwiązanie przybliżone, nie respektujące w większym lub mniejszym stopniu warunków nierozdzielności, tj. równania (30.10).

Przykład 5.10. Podać rozwiązanie dla skręcanego przekroju eliptycznego.

Odpowiedź 5.10. Równanie brzegu jest $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = c$. Przyjmujemy wobec tego $\Omega = c(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1)$. Kontrolując znajdziemy $\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} = 2c \frac{a^2 + b^2}{y^2 b^2}$.

Prawa strona tego równania jest stała. Jesteśmy dzięki temu w stanie po-

dać rozwiązanie ścisłe. Równanie (44.10) daje $N = 2C \int (\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1) dA = 2C (\frac{I_y}{a^2} + \frac{I_x}{b^2} - A) = -ab\pi C$, skąd $C = -\frac{N}{ab\pi}$. W dalszym ciągu mamy według (32.10) $\tau_y = -\frac{2N}{ab^3\pi} y$, $\tau_x = +\frac{2N}{a^3b\pi} x$, skąd już łatwo wyznaczyć wykresy naprężeń na rys. 3.10 i nośnik Z zgodnie z rozwiązaniem (36.10). Ponieważ rozwiązanie jest ścisłe, przeto korzystając z (30.10) znajdziemy $\psi' = -C \frac{a^2+b^2}{a^2b^2G} = \frac{N}{G} \frac{a^2+b^2}{a^3b^3\pi}$, czyli J zgodne również z (36.10).

Przykład 6.10. Podać rozwiązanie dla skręconego przekroju prostokątnego.

Odpowiedź 6.10. Możemy równanie brzegu przedstawić w rozmaite sposoby, np. $\cos \frac{\pi x}{b} \cos \frac{\pi y}{h} = 0$, $(x^2 - \frac{b^2}{4})(y^2 - \frac{h^2}{4}) = 0$ itp. Decydujemy się przyjmując $\Omega = C(x^2 - \frac{b^2}{4})(y^2 - \frac{h^2}{4})$. Kontrolując znajdujemy, że $\frac{\partial^2 \Omega}{x^2}$ $\frac{\partial^2 \Omega}{y^2}$ nie jest stałe, co dowodzi, że rozwiązanie z pewnością będzie przybliżone. Znajdujemy:

$$N = 2C \int (x^2 - \frac{b^2}{4})(y^2 - \frac{h^2}{4}) dA = \frac{Cb^2h^3}{18} \quad \text{lub} \quad C = \frac{18B}{b^3h^3}.$$

Zatem

$$\tau_y = \frac{\partial \Omega}{\partial y} = -\frac{9N}{bh^3} (1 - \frac{4x^2}{b^2})y, \quad \tau_x = -\frac{\partial \Omega}{\partial x} = +\frac{9N}{b^3h} (1 - \frac{4y^2}{h^2}) x.$$

Przy $b < h$ największym naprężeniem jest τ_x dla $x = \pm \frac{b}{2}$, $y = 0$. Jego bezwzględna wartość wynosi $\tau = \frac{9N}{2b^2h}$, czemu odpowiada $Z = \frac{2}{9} b^2h$. Rezultat ten - niezgodnie z (37.10) - nie jest zależny od stosunku b/h . Zgodność z (37.10) uzyskamy dla $b/h = 5/6$.

Przykład 7.10. Wyznaczyć owinięcie ψ' w poprzednim zadaniu.

Odpowiedź 7.10. Ponieważ podane rozwiązanie nie respektuje warunku nierozdzielności, a więc postulatu geometrycznego, więc znalezienie na drodze rozważań geometrycznych jest tu niemożliwe. Jedyna możliwość tkwi w kalkulacji energetycznej. Z jednej strony energia sprężystości podług (20.10) wynosi $\frac{1}{2} N \psi'$ z drugiej zaś według (11.3) i (12.3) jest ona równa:

$$\frac{1}{2G} \int (\tau_x^2 + \tau_y^2) dA = \frac{1}{2} \cdot \frac{18}{5} \frac{N^2}{G} \cdot \frac{b^2+h^2}{b^3h^3}.$$

Z porównania otrzymamy $\dot{v}' = \frac{18}{5} \frac{N}{G} \cdot \frac{b^2+h^2}{b^3h^3}$. Zestawiając ten rezultat z (37.10) znajdziemy zgodność dla $\gamma = \frac{216}{5} = 43,2$, co z nieznacznym błędem odpowiada przekrojowi kwadratowemu.

Wróćmy jeszcze na chwilę do wzoru (40.10) i rysunku 4.10. Dla wąskich przekrojów jednopłynnych dowolnej postaci możemy wyznaczyć naprężenie, zakładając, że zmieniają się one według równania:

$$\tau_n = \tau \frac{2n}{b}, \quad (46.10)$$

przy czym b oznacza małą, w porównaniu do długości, zmienną szerokość przekroju, a n mierzony równoległe do b i ze środka b zmienny odcinek normalnej do trajektorii przecinających tę szerokość, a τ wartość naprężenia na brzegu przekroju. Możemy dalej z powodu założonej wąskiej postaci przekroju przyjąć, że pole A_s , objęte linią naprężeń da się z wystarczającą dokładnością wyrazić analogiczną proporcją:

$$A_s = A \frac{2n}{b}, \quad (47.10)$$

gdzie A jest polem całego przekroju. Uwzględniając (46.10) i (47.10) w relacji (40.10) otrzymamy:

$$N = \frac{8A\tau}{b^2} \int_0^{\frac{b}{2}} n^2 dn = \frac{Ab\tau}{3}.$$

Zwrócić tu trzeba uwagę, że całkując w przedziale od 0 do $\frac{b}{2}$ wyczerpaliśmy jednak cały obszar całkowania, albowiem $\tau_n dn$ jest wielkością dla jednej trajektorii stałą, a A_s obejmuje całe przynależne pole. Ostatni rezultat prowadzi do konsekwentnego wniosku, że w każdym suwie iloczyn b jest wielkością stałą. Zatem n a j w i ę k s z ę wartość

$$\tau = \frac{3N}{Ab}, \quad (48.10)$$

znajdziemy na brzegu przekroju w tym miejscu, gdzie szerokość przekroju jest n a j m n i e j s z a. Oznaczając ją przez b możemy napisać

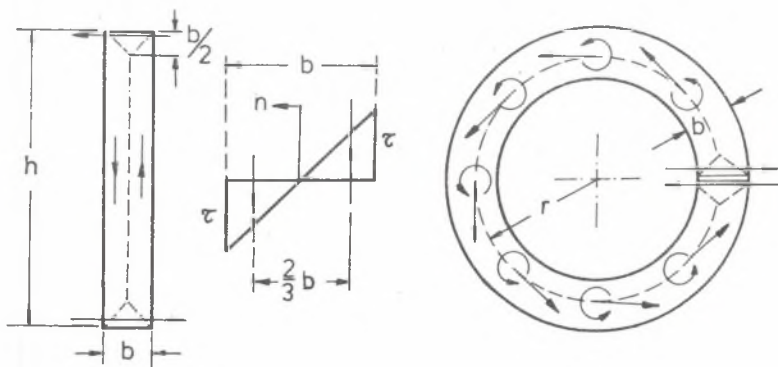
$$\tau_* = \frac{N}{Z}, \quad Z = \frac{Ab_*}{3}. \quad (49.10)$$

Tak przedstawiony nośnik skręcania przedstawia uogólnienie wzoru (38.10). Gdy przekrój uformowany jest z wąskich pasków prostokątnych, otrzymujemy na podstawie (49.10)

$$Z = \frac{1}{3} b_* \sum_1 b_i h_i. \quad (50.10)$$

W przeciwieństwie do tego podaje się często za uczyonym niemieckim A. Fopplem formułę $Z = \frac{1}{3} \frac{\sum b_i^2 h_i}{b_{\max}}$, a za miejsce największego naprężenia uważa się środek brzegu najszerszego paska, co należy uważać za niezwykle nieporozumienie. Załomy wklęsłe tego rodzaju profili powinny być starannie wyokrąglone, albowiem jak poucza dokładniejsze obliczenie, powstaje w nich spiętrzanie naprężenia. Współczynnik spiętrzania możemy na podstawie obliczeń Trefftza oszacować wyrażeniem $\sim \sqrt[3]{5 \bar{b}/a}$, w którym a oznacza promień wyokrąglenia, b zaś średnią szerokość przylegających ścianek przekroju.

Przykład 8.10. Wyznaczyć naprężenie brzeżne τ dla wąskiego przekroju prostokątnego, wyznaczając moment N z bryły naprężeń (46.10)



Rys. 6.10

Odpowiedź 8.10. Z trójkąta naprężeń - jak na rys. 6.10 - łatwo obliczyć wypadkowe równoległe do boku h ; wynoszą one $\frac{bh}{4} \tau$. Na końcach przekroju bryłami naprężeń są ostrosłupy o podstawie b i wysokości $\frac{b}{2}$. Przeważają one wypadkowe równoległe do krótszych boków wynoszący po $\frac{b^2 \tau}{6}$. Popeźnilibyśmy błąd, pomijając je wobec $\frac{bh}{4} \tau$. Ramię pary $\frac{bh}{4} \tau$ wynosi $\frac{2}{3} b$, ramię zaś pary $\frac{b^2 \tau}{6}$ wynosi $\sim h$. Wobec tego momenty obu tych par są równe i wynoszą po $\frac{b^2 h}{6} \tau$, czyli $N = \frac{b^2 h}{3} \tau$ lub $Z = \frac{b^2 h}{3}$ zgodnie z (49.10).

Przykład 9.10. Postąpić jak w poprzednim zadaniu dla przekroju powstałego z rozcięcia wąskiego pierścienia.

Odpowiedź 9.10. Zatrzymując przekrój bryły naprężeń jak w zadaniu poprzednim znajdziemy, że krótkie skrawki końcowe nie dają momentu. Popełnilibyśmy błąd, przypuszczając, że wobec tego poszukiwany moment będzie równy tylko $\frac{b^2\tau}{6}$, gdzie $h = 2r\pi$ jest długością pierścienia mierzoną wzdłuż kręgu średniego - jak na rys. 6.10. W istocie zaś rzeczy mają się tak: Na jednostkę długości tego kręgu przypada nie tylko moment $\frac{b^2\tau}{6}$, lecz - z powodu różnicy długości brzegu zewnętrznego i wewnętrznego - również siła wynosząca:

$$\int_{-b/2}^{+b/2} \frac{r+n}{r} \tau \frac{2n}{b} dn = \frac{b^2\tau}{6r}.$$

Redukcja tych sił prowadzi najwidoczniej też do momentu. Przyjmując przeto w dowolnym miejscu, a więc najprościej w środku pierścienia środek redukcji, znajdziemy, że z jednostki długości przypada moment $\frac{b^2\tau}{6} + \frac{b^2\tau}{6r} \cdot r = \frac{b^2\tau}{3}$, czyli z całego pierścienia $N = \frac{b^2\tau}{3} \tau$, gdzie $h = 2r\pi$. Rezultat ten jest oczywiście zgodny z (49.10).

Przykład 10.10. Obliczyć dla wąskiego przekroju jak na rys. 4.10 kąt owinięcia ψ' , stosując dwójaki sposób wyrażenia energii sprężystości.

Odpowiedź 10.10. Z jednej strony jest $W' = \frac{1}{2} N\psi'$, z drugiej zaś mamy $W' = \frac{1}{2G} \int \tau_n^2 dA$. Z (46.10) i (48.10) mamy $\tau_n = \frac{6Nn}{Ab^2}$. Poza tym jest $dA = ds dn (1 + \frac{n}{r})$, jeśli s_0 oznacza łuk średni a r - jego promień zakrzywienia. Mamy zatem:

$$W' = \frac{18N^2}{GA^2} \int_{-b/2}^{+b/2} \frac{ds_0}{b^4} n^2 (1 + \frac{n}{r}) dn = \frac{3N^2}{2GA^2} \int_{s_0} \frac{ds_0}{b}.$$

Z przyrównania otrzymamy $\psi' = \frac{3N}{GA^2} \int \frac{ds_0}{b}$, czyli $J = \frac{A^2}{3 \int \frac{ds_0}{b}}$.

W rozwiązaniu podanym dla zdarzającego się nader często wąskiego przekroju dowolnej postaci nie obliczyliśmy jeszcze owinięcia ψ' . Wprawdzie wyznaczyliśmy go w przykładzie 10.10, wskazane jednak jest dojść do niego drogą bezpośrednią - zwłaszcza, że w literaturze przedmiotu cytuje się często wzór o budowie zgoła odmiennej.

Wróćmy w tym celu do warunku jednoznaczności (34.10) i rys. 2.10. Niech O będzie środkiem owinięcia, a zatem śladem unieruchomionej warunkami podporowymi osi owinięcia, a λ dowolną krzywą zamkniętą, położoną w cało-

ści w obrębie materialnego przekroju. Składowa suma r , wzięta w kierunku stycznej l , jest równa:

$$u' l_x + v' l_y = r \sin(r, l) = h \dot{v}'. \quad (51.10)$$

Podobnie składowa naprężenia stycznego, wzięta w kierunku stycznej l , wynosi:

$$\tau_h = \tau_y l_x + \tau_x l_y. \quad (52.10)$$

Rozwijając warunek (34.10) otrzymamy:

$$\oint \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial l} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial l} \right) dl = 0.$$

Rugując tu z kolei pochodne od w w relacjach (6.10) znajdziemy

$$\oint \left(\gamma_y \cdot \frac{\partial x}{\partial l} + \gamma_x \cdot \frac{\partial y}{\partial l} \right) dl = \oint \left(\frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial x}{\partial l} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial y}{\partial l} \right) dl.$$

Lecz prawy dwumian podcałkowy wyraża lewą stronę równości (51.10) lewą zaś z uwagi na (3.10) jest według (52.10) równy τ_h/G . Zatem

$$\oint \tau_h dl = G \dot{v}' h dl.$$

Całkę wzdłuż opisanej krzywej zamkniętej z wziętego w jej kierunku naprężenia stycznego τ_h nazwiemy **cyrkulacją** lub **krążeniem** naprężenia stycznego $\tau = (\sqrt{\tau_x^2 + \tau_y^2})$. Jej wartość łatwo oznaczyć, jeśli zauważymy, że $h dl$ przedstawia podwójne pole trójkąta o podstawie dl i wysokości h , wykreślonej ze środka owinięcia. Zatem:

$$C = \oint \tau_h dl = 2GA_z \dot{v}', \quad (53.10)$$

gdzie A_z oznacza pole objęte krzywą l .

Równanie (53.10) zawiera ważne **t w i e r d z e n i e** o cirkulacji. Zwrócić jeszcze raz należy uwagę na to, że l jest dowolną krzywą zamkniętą, byleby położoną całkowicie w obrębie materialnego pola przekroju. Oczywiście, gdy zechcemy, może nią w szczególności być trajektoria naprężenia stycznego. Wtedy τ_h jest całkowitym naprężeniem τ_n , l zaś łukiem s trajektorii. Jeśli wreszcie trajektorią tą jest brzeg, równanie (53.10) przyjmie postać:

$$\oint \tau ds = 2N \frac{A}{J}.$$

Twierdzenie (53.10). mimo swego bardzo wielkiego znaczenia, jest nader rzadko w literaturze cytowane.

Zastosujemy je obecnie do obliczenia kąta ν' dla wąskiego przekroju dowolnej postaci jak na rys. 4.10. W tym celu wystarczy obliczyć krążenie C wzdłuż konturu brzeżnego. Korzystając z rozwiązania (48.10) mamy tu $C = \int_C \tau ds = \frac{3N}{A} \int_C \frac{ds}{b}$. Lecz z dobrym przybliżeniem jest w rozważanym wypadku obwód brzegu równy podwójnej długości s_0 linii środkowej przekroju tj. $\int_C \frac{ds}{b} = 2 \int_{s_0} \frac{ds_0}{b}$. Wobec tego zgodnie z (53.10) jest:

$$\nu' = \frac{N}{GJ}, \quad J = \frac{A^2}{3 \int_C \frac{ds_0}{b}} \tag{54.10}$$

W przypadku profilu składającego się z wąskich prostokątów jest:

$$J = \frac{(\sum_i b_i h_i)^2}{3 \sum_i \frac{h_i}{b_i}} \tag{55.10}$$

Rezultat (54.10) znaleźliśmy przed chwilą w przykładzie 10.10 na odmienniej drodze. Jest rzeczą interesującą, iż w literaturze przedmiotu podaje się za niezwykłym wybitnym uczonym A. Föpplem formułę $J = \frac{1}{3} \sum_i b_i^3 h_i$, niezgodną z wyżej podaną. Jest to jedna z przyczyn, dla której wyprowadziliśmy (54.10) w dwa niezależne sposoby.

Przykład 11.10. Porównać nośność i sztywność cienkościennej rury kołowej z taką samą rurą rozciętą wzdłuż tworzącej.

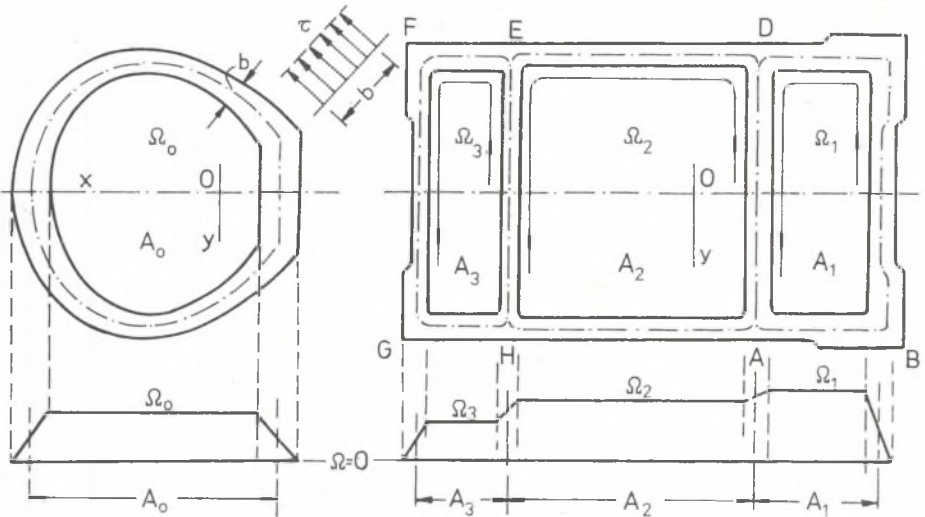
Odpowiedź 11.10. Jeśli średni promień pierścienia wynosi r , a grubość ścianki b , to według przykładu 1.10 jest: $Z_2 = 2r^2 b \pi$, $J_2 = 2r^2 b \pi$. Dla rury rozciętej według (49.10) czy też przykładu 9.10 jest: $Z_1 = \frac{2rb^2 \pi}{3}$, według (54.10) jest $J_1 = \frac{2rb^2 \pi}{3}$. Zatem $Z_2/Z_1 = 3 \frac{r}{b}$ nadto $J_2/J_1 = 3(\frac{r}{b})^2$. Warto sobie uprzytomnić te rezultaty.

Zajmiamy się z kolei cienkościennymi przekrojami wielospójnymi, które mają w praktyce duże znaczenie pod nazwą przekrojów rurowych, skrzynkowych itp.

Przyjrząwszy się rys. 5.10 widzimy, że w wypadku, gdy ścianki oddzielające poszczególne wykroje są cienkie, możemy z wystarczającą dokładnością krzywe tej figury zastąpić liniami prostymi. W formule (42.10) pochodna $\frac{\partial \Omega}{\partial n}$ oznacza zmianę funkcji Ω przy przejściu od n mniejszego do n większego. Znak - odwraca kierunek tego przejścia. Przy podanym uproszczeniu jest więc:

$$\tau = \frac{\Omega_i - \Omega_k}{b}, \quad (56.10)$$

co oznacza, że przede wszystkim naprężenie τ na szerokości ścianki b jest stałe, a poza tym, że krążąc krzywą środkową Ω_1 , czyli obchodząc obszar



Rys. 7.10

A_1 , otrzymamy wartość naprężenia, dzieląc przez aktualną szerokość b różnicę między przynależną temu obszarowi wartością Ω_i a wartością Ω_k obszaru przyległego A_k . Rysunek 5.10 jak i formuła (45.10) pouczają nas ponadto, że celem wyznaczenia momentu N można jedną z brzożnych wartości Ω przyjąć dowolnie. Wobec tego tę dla konturu zewnętrznego przyjmijmy równą zeru. Jeśli wreszcie w formule (45.10) pod A_1 rozumiemy nie - jak dotychczas - pole wykroju, lecz pole objęte linią połówiącą grubość ścianek, przyjmie ona prostą postać:

$$N = 2 \sum_i A_i \Omega_i. \quad (57.10)$$

Gdy przekrój jest dwuspójny - jak w lewej części rys. 7.10 - wzory (56.10) i (57.10) rozwiązują sprawę stanu napięcia, albowiem $\tau = \frac{\Omega_0}{b}$, zaś $N = 2A_0 \Omega_0$, czyli:

$$\tau = \frac{N}{Z}, \quad Z = 2A_0 b, \quad (58.10)$$

co potwierdza skądinąd znany nam wniosek, że iloczyn b przy obchodzeniu przekroju jest stały. Dodatkowo - jeśli $p o t r z e b a$ - wyznaczmy kąt owinięcia z formuły (53.10), a to:

$$J' = \frac{N}{GJ}, \quad J = \frac{4A^2}{\int \frac{ds}{b}}. \quad (59.10)$$

Przykład 12.10. Sprawdzić przykład 1.10.

Odpowiedź 12.10. Rezultaty uzyskane z (58.10) są zgodne z rezultatami przykładu 1.10.

Gdy jednak przekrój jest trój-, czwórspójny jedyne równanie (57.10) z określeniem (56.10) nie wystarcza do znalezienia jednoznacznego rozwiązania. Ogólnie - gdy przekrój jest n -krotnie związany, zagadnienie jest $(n - 2)$ - krotnie niewyznaczalne z uwagi na Ω_1 . Wtedy **m u s i s i ę** użyć formuły cyrkulacyjnej (53.10) jako tej, która jest tu wyrazem zachowania nierozdzielności układu.

Celem uniknięcia błędu należy stosować następujące postępowanie: Chcąc sobie zabezpieczyć algebraiczny znak rezultatów należy każdy profil i każdą część profilu okrążyć w tym samym, a to dodatnim kierunku, jak to zaznaczono na rys. 7.10. Przenosząc odpowiedzialność za znaki algebraiczne na różnice $\Omega_i - \Omega_k$ należy zawsze $\int \frac{ds}{b}$ uważać za wyrażenie dodatnie, czyli $-\int \frac{ds}{b}$ za ujemne. Aby tak istotnie było, należy przy okrążeniu obszaru A_1 za naprężenie uważać: $\frac{\Omega_1 - \Omega_k}{b}$, gdzie wskaźnik k określa kolejno mijane obszary przyległe do obszaru i , przy okrążaniu zaś obszaru A_k za naprężenie należy uważać $\frac{\Omega_k - \Omega_1}{b}$. Aby sobie tę spekulację uprzytomnić, zauważmy, że ściankę przedzielającą obszary i i k będziemy przechodzić dwa razy. - raz okrążając krzywą środkową s_i , a drugi raz krzywą s_k . Przy tym samym zwrocie okrążania będziemy **p r z e c h o d z i ć** tę ściankę w r ó ż n y c h kierunkach. Gdy prze- to okaże się np. $\Omega_i - \Omega_k > 0$ oznaczać to będzie, że poszukiwane naprężenie τ jest zgodne z kierunkiem przejścia i , czyli wobec tego niezgodne z kierunkiem przejścia k . Wtedy jednak jest $\Omega_k - \Omega_i < 0$, co właśnie tak samo dowodzi, że poszukiwane naprężenie τ jest niezgodne z kierunkiem przejścia k , czyli zgodne z kierunkiem przejścia i .

Na rys. 7.10 nakreślono czterospójny przekrój. Naszkicujemy na tym przykładzie tak postępowania. Przede wszystkim według (57.10) jest:

$$2A_1 \Omega_1 + 2A_2 \Omega_2 + 2A_3 \Omega_3 = N, \quad (a)$$

co dowodzi, że zadanie jest dwukrotnie hyperstatyczne. Obliczamy wobec tego cyrkulacje C_1, C_2, C_3 według wzoru (53.10), czyli

$$C = \oint \frac{\Omega_1 - \Omega_k}{b} ds = 2GA_1 \psi',$$

w którym dla prostoty tylko w koniecznych miejscach zatrzymano wskaźniki wyróżniające. Kolejno mamy:

$$\int_{ABCD} \frac{\Omega_1}{b} ds + \int_{DA} \frac{\Omega_1 - \Omega_2}{b} ds = \Omega_1 \int_1 \frac{ds}{b} - \Omega_2 \int_{DA} \frac{ds}{b} = 2GA_1 \psi',$$

$$\int_{AD} \frac{\Omega_2 - \Omega_1}{b} ds + \int_{DE} \frac{\Omega_2}{b} ds + \int_{EH} \frac{\Omega_2 - \Omega_3}{b} ds + \int_{HA} \frac{\Omega_2}{b} ds =$$

$$= \Omega_2 \int_2 \frac{ds}{b} - \Omega_1 \int_{AD} \frac{ds}{b} - \Omega_3 \int_{EH} \frac{ds}{b} = 2GA_2 \psi',$$

$$\int_{HE} \frac{\Omega_3 - \Omega_2}{b} ds + \int_{EFGH} \frac{\Omega_3}{b} ds = \Omega_3 \int_3 \frac{ds}{b} - \Omega_2 \int_{HE} \frac{ds}{b} = 2GA_3 \psi'.$$

Powyższe trzy równania wymagają numerycznego wyznaczenia wyrażeń

$$\beta_1 = \int_1 \frac{ds}{b}, \quad \beta_2 = \int_2 \frac{ds}{b}, \quad \beta_3 = \int_3 \frac{ds}{b},$$

tudzież

$$\alpha_3 = \int_{AD} \frac{ds}{b} = \int_{DA} \frac{ds}{b}, \quad \alpha_1 = \int_{EH} \frac{ds}{b} = \int_{HE} \frac{ds}{b}.$$

Przypuśćmy, że się to stało, to z trzech równań

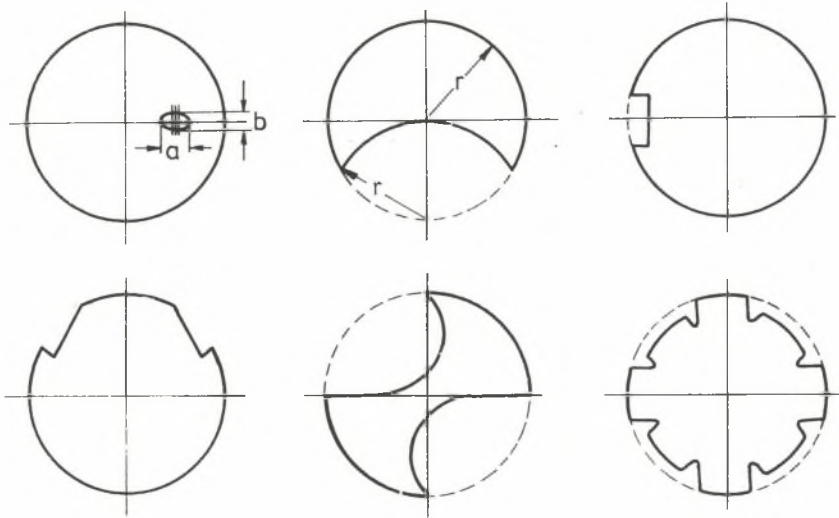
$$\begin{aligned} \beta_1 \Omega_1 - \alpha_3 \Omega_2 &= 2GA_1 \psi', \\ -\alpha_3 \Omega_1 + \beta_2 \Omega_2 - \alpha_1 \Omega_3 &= 2GA_2 \psi', \\ -\alpha_1 \Omega_2 + \beta_3 \Omega_3 &= 2GA_3 \psi', \end{aligned}$$

albo wyrugujemy ψ' , uzyskując dla (a) dwa brakujące równania, albo też rozwiązując je, doprowadzimy do postaci

$$\Omega_1 = \gamma_1 2GA_1 \psi', \quad \Omega_2 = \gamma_2 2GA_2 \psi', \quad \Omega_3 = \gamma_3 2GA_3 \psi'$$

gdzie γ - podobnie jak α, β - są bezwymiarowymi współczynnikami. Wstawiając ostatnie rezultaty w równanie (a) znajdziemy z niego ψ' , wracając z tym do nich wyznaczmy ostatecznie $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$, a tym samym naprężenia $\tau = \frac{\Omega_i - \Omega_k}{k}$, odszyfrowując ich zwroty według wyżej omówionej reguły.

Streszczając dotychczasowe wywody widzimy, że potrafimy metodami elementarnymi wyznaczyć ze znaczną ścisłością nośnik Z i sztywność GJ dla cienkościennych profili jedno- czy też dwu- i wielospójnych, dla przekrojów zaś litych jedynie dla koła. Dla innych - niekiedy zbyt grube - przybliżenie osiągnąć można metodą identyfikującą funkcję naprężeń z równaniem brzegu. Gdy jednakże wadą tej metody jest nieoznaczony - od wypadku do wypadku - inny stopień dokładności, musimy w ważnych momentach wracać do pewnej wprawdzie, ale zawiłej metody matematycznej teorii sprężystości.



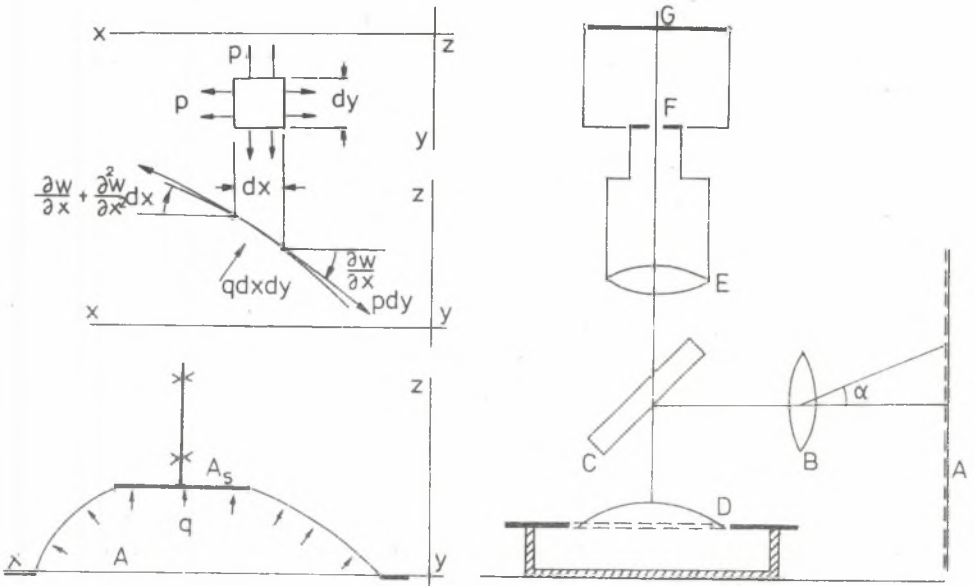
Rys. 8.10

Nie jest możliwe, by teoria ta mogła nadążyć za potrzebami praktyki. Zdołano wprawdzie znaleźć ściśle rozwiązanie dla niektórych przypadków. Tak np. Larmor i inni dowiedli, że naprężenie na końcach dłuższej osi eliptycznego małego otworu - jak na rys. 8.10 - wzrasta $(1 + \frac{a}{b})$ razy w porównaniu z tym, które istnieje tam w przekroju bez tego wykroju. Weber zna-

laşł rozwiązanie ęcisłe dla drugiego z kolei na rys. 8.10 przekroju, Timoszenko i inni rozwiązali zagadnienie przekroju kołowego z wykrojem dla przyjęcia klina. Niemniej pojawiają się w praktyce przekroje wału dwu- i więcej klinowego, wiertła itp., nastroczające bardzo wielkie trudności w ich teoretycznym traktowaniu.

Zasła przeto od dawna potrzeba stosowania również metod eksperymentalnego wyznaczania naprężeń. Nie mogą one polegać na bezpośrednim studiowaniu rzeczywiście skręcanego pręta, albowiem przekrój pręta wewnętrzny, czy też czołowy jest niedostępny. Konieczność przeto narzuciła stosowanie tzw. analogii, to znaczy poszukiwanie za zagadnieniem ze zgoła innej dziedziny, ale wyrażającym się matematycznie tymi samymi równaniami i warunkami. Stosowanie analogii nie polega na korzystaniu z istniejącego w innej nauce rozwiązania szczegółowego. Byłaby to zwykła transpozycja. Na ogół bywa tak, że, gdy nie istnieje - z reguły z powodu skomplikowanych okoliczności matematycznych - rozwiązanie zagadnienia w jednej dziedzinie, to nie istnieje - z tych samych powodów - rozwiązanie analogiczne również i w dziedzinie drugiej. Stosowanie analogii polega zaś na tym że, gdy w jednej nauce rozwiązanie nie jest dostępne pod żadnym względem, w drugiej istnieje możliwość eksperymentalnego uzyskania wyników.

W teorii skręcania rozpowszechnione są dwie analogie - hydrodynamiczna Kelvina i błonowa Prandtla. Podamy tutaj tę drugą. Ma ona tę zaletę w porównaniu z pierwszą, że może być w naturalny sposób przesunięta z obszaru sprężystego w postaci analogii stawkowej Nadai'a na obszar plastyczny.



Rys. 9.10

W sztywnej płytce, zamykającej szczelne naczynie, wykonano wykrój A o brzegu geometrycznie podobnym do konturu przekroju skręcanego pręta. Wykrój zamknięto równomiernie naciągając bioną mydlaną lub gumową, po czym w naczyniu spowodowano nieznaczne nadciśnienie q . W tych warunkach błona przyjmie kształt powierzchni o rzędnych w , mierzonych równoległe do osi z prostokątnego układu współrzędnych. Ciśnienie q regulujemy tak, by nachylenia $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial y}$ były małe. Wtedy ich kwadraty i wyższe potęgi są pomijalne w porównaniu z 1, więc wstawa kąta nachylenia jest zmienna z nachyleniem, a dostawa tego kąta jest równa 1. Na krawędzie elementu błony o rozmiarach dx , dy rzutu działają ciągi o natężeniu stałym p , a na jego pole ciśnienie o natężeniu stałym q . Gdy nachylenie przekroju y_2 w miejscu x wynosi $\frac{\partial w}{\partial x}$, w miejscu $x + dx$ wynosi ono $\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx$. Nadwyżka sił naciągu dwu krawędzi dy w dodatnim kierunku osi z jest przeto równa $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx \cdot p dy$. Zauważmy, że na rys. 9.10 jest $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} < 0$. Podobnie nadwyżka sił z dwu krawędzi dx wynosi $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dy \cdot p dx$. Obciążenie rozważanego elementu w kierunku osi z jest równe $q dx dy$. Warunek równowagi wszystkich sił wymaga spełnienia równania

$$p dx dy \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + p dx dy \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + q dx dy = 0,$$

czyli

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = - \frac{q}{p}. \quad (60.10)$$

Zatem małe przemieszczenia w membrany czynią zadość równaniu różniczkowemu (60.10), z tym że na brzegu jej spełniać muszą warunek

$$w = 0. \quad (61.10)$$

Zarówno równanie (60.10) jak i warunek (61.10) są zgodne z równaniem (30.10) i warunkiem - przy $c = 0$ - (31.10); na tym polega analogia zagadnień. Mierząc w znajdujemy tym samym:

$$\Omega = w D, \quad (62.10)$$

jeśli D oznacza dowolnie obraną podziałkę o wymiarach naprężenia. Z porównania również wynika dla kąta owinięcia relacja

$$2G \psi' = \frac{q}{p} D, \quad (63.10)$$

z określeń zaś (32.10) naprężenia:

$$\tau_y = \frac{\partial w}{\partial y} D, \quad \tau_x = - \frac{\partial w}{\partial x} D. \quad (64.10)$$

Trajektoriami naprężeń są - na wzór (39.10) - krzywe

$$w = d_n, \quad (65.10)$$

gdzie d_n jest zmienną stałą. Są to więc w a r s t w i c e powierzchni utworzonej przez odkształconą błonę. W miejsce naprężeń składowych τ_x, τ_y możemy wyznaczać całkowite, które - na wzór (42.10) - wynosi:

$$\tau_n = - \frac{\partial w}{\partial n} D, \quad (66.10)$$

czyli jest odwrotnie proporcjonalne względem odcinków normalnej międzydwoma sąsiednimi warstwicami. Z gęstości zatem - obecnie warstwic, jak przedtem trajektorii - wnioskować można o wielkości naprężeń. Skoro zaś $\frac{\partial w}{\partial n}$ jest w uważanym miejscu największym spadkiem zbrocza membrany, to do tego n a j w i ę k s z e g o s p a d k u jest proporcjonalne naprężenie w tym miejscu. Wreszcie transponując wzór (44.10) znajdziemy:

$$N = 2D \int w dA, \quad (67.10)$$

stwierdzając, że moment skręcający jest proporcjonalny względem p o d w o j o n e j o b j ę t o ś c i pagórka membrany. Czynnikiem proporcjonalności jest stale ta sama podziałka D , wyrównująca wymiary analogii.

W ten więc sposób dla przekrojów jednospójnych analogia jest zupełna, czyli wystarcza do wyznaczenia z pomiarów na błonie wszelkich wielkości aktualnych w teorii skręcania. Analogia daje się jednak z łatwością rozszerzyć również na zagadnienie skręcania przekrojów wielospójnych. W tym celu zauważmy, że i równanie (53.10) ma swój odpowiednik w rozpatrywanej analogii. Wystarczy i celowe jest wziąć też pod uwagę cyrkulację wzdłuż konturu s wykroju zamiast ogólnie wzdłuż dowolnej krzywej ξ , to znaczy wystarcza w miejsce ξ wpisać s , a w miejsce h normalną n . Wstawiając do (53.10) określenia (66.10) tudzież (63.10) otrzymamy:

$$- D \oint \frac{\partial w}{\partial n} ds = D \frac{q}{p} A_s.$$

czyli też

$$q A_s + \oint p \frac{\partial w}{\partial n} ds = 0. \quad (68.10)$$

Każdy z dodajników tego równania ma proste mechaniczne znaczenie. Wielkość $q A_s$ przedstawia siłę wywartą na błonę przez ciśnienie q na pole wykroju A_s , wyrażenie zaś $\int p \frac{\partial w}{\partial n} ds$ jest wypadkową napięć $p ds$ brzegu wykroju, wziętą z całego brzegu wykroju w kierunku z . Ponieważ w analogii błony brzegowi wykroju odpowiada warstwica $w = \text{constans}$, przeto widzimy, jak należy przy eksploataowaniu błony zrealizować obecność wykroju w skręconym przekroju. Po prostu należy w membranę wprawić płytkę p i a s k a s z t y w n $ą$ płytkę - jak na rys. 9.10 - obrzeżoną konturem wykroju s , obejmującym pole A_s i dbać o to, by płytka ta mogła się przesuwać t y k o n o r m a l n i e do swej płaszczyzny, tj. tak, by istotnie wzdłuż jej brzegu było przemieszczenie w stałe. Najwidoczniej równanie (68.10) jest wtedy spełnione, albowiem wyraża ono warunek równowagi tej płytki. Oczywiście płytka musi być n i e w a $ż$ k a , a więc - praktycznie rzecz biorąc - jej ciężar musi być oddzielnie zrównoważony stosowanym ciężarkiem. Gdy wykrojów jest więcej, postępujemy z każdym oddzielnie w analogiczny sposób. Membrana z wprawionymi płytkami przyjmie postać jak na rys. 5.10. Wzór (67.10) nie utraci swego objętościowego sensu; można go ewentualnie dla wyrazistości zamienić na zbudowany analogicznie jak (45.10). W ten więc sposób analogia błonowa stanowi wyczerpujący pod każdym względem środek do eksperymentalnego rozwiązania zagadnienia równomiernego skręcania prostego pręta o niezmiennym przekroju. Jej prostota i piękno są uderzające.

Przykład 13.10. Z badać analogią błonową stany napięć i owinięcia w przypadkach 8.10, 9.10 tudzież 1.10.

Odpowiedź 13.10. Byłoby niedorzecznością sądzić, że opłaca się i ma cel przeprowadzać naprawdę badanie błonowe dla przekrojów cienkościennych nawet wielospójnych, skoro dysponujemy dla nich wystarczająco dokładnym rozwiązaniem rachunkowym. Miałoby to co najwyżej sens, gdybyśmy w wypadku takim chcieli ujawnić teoretycznie skomplikowany wpływ wyokrąglenia wklęsłego między ściankami załamania. Temat przeto należy rozumieć tylko w sensie następującym: Czy zakładając prawdopodobny, możliwie uzasadniony kształt wzniesienia membrany znajdziemy właściwe rozwiązanie zadań 8.10, 9.10 i 1.10? Oczywiście tak. Naciągnięta na wąskim prostokącie błona - przy pominięciu krótkich skrawków końcowych - przyjmie pod ciśnieniem q kształt powierzchni walcowej o tworzących równoległych do boku długiego h , więc np. do osi y . Przekrój tej powierzchni płaszczyzną xz jest - jak wiadomo z mechaniki teoretycznej - paraboliczną krzywą sznurową o nieznacznym zwisie w_0 i naciągach końcowych $p = q \frac{b^2}{8w_0}$. Jej równanie brzmi: $w = w_0 \left(1 - \frac{4x^2}{b^2}\right)$.

a objęte nią i przynależną cięciwą b pole wynosi $\frac{2}{3} b w_0$. Zatem moment wynosi $N = 2D \cdot \frac{2}{3} b w_0 h$, skąd $4Dw_0 = 3N/bh$. Kąt owinięcia jest równy $\vartheta' = \frac{D}{2G} \frac{q}{p} = \frac{3N}{Gb^3 h}$, naprężenia zaś wynoszą: $\tau_y = \frac{\partial w}{\partial y} D = 0$, $\tau_x = - \frac{\partial w}{\partial x} D = 8Dw_0 \frac{x}{b}$.

Największe naprężenie znajdziemy na brzegu przekroju, tj. dla $x = b/2$; wynosi ono $\tau = 4Dw_0 \frac{1}{b} = \frac{3N}{b^2 h}$.

Rezultaty te są zgodne ze znalezionymi w 8.10. Nic się nie zmieni, gdy oś membrany będzie kręgiem koła. Prosto jest tu $h = 2r\pi$, co daje zgodność z przykładem 9.10. W przykładzie zaś 1.10 błona przyjmie kształt poboczniczy kołowego stożka ściętego, zamkniętego na wysokości w_0 płaskim krążkiem. Zatem, jeśli r jest promieniem średnim, mamy tu $N = 2D r^2 \pi w_0$, skąd $Dw_0 = \frac{N}{2r^2 \pi}$. Stałe na szerokości b naprężenie $\tau = \frac{Dw_0}{b} = \frac{N}{2r^2 b \pi}$. Równowaga krążka zamykającego wymaga spełnienia równania: $qr^2 \pi = p \frac{w_0}{b} \pi r \pi$. skąd $\frac{q}{p} D = \frac{2Dw_0}{rb} = \frac{N}{r^3 b \pi}$. Zatem $\psi' = \frac{N}{2Gr^2 b \pi}$. Te rezultaty są również zgodne z 1.10.

Pozostaje jeszcze dla zupełności wspomnieć w kilku słowach o aparaturze wykonawczej. Podzielić ją można na dwie kategorie. Autorzy jednych uściłowali dostosować się dosłownie do wskazań analogii i wyznaczali wprost czy to z powierzchni błony mydlanej - jak Griffith i Taylor - czy też z menisku powstałego między dwiema różnymi niemieszalnymi cieczami - jak Piccard i Jonner - równowysokie punkty, znajdując w ten sposób bezpośrednio warstwicę. Ten żmudny i niepewny, gdyż zależny od trwałości badanej powierzchni, sposób zastąpił Thiel fotograficznym zdjęciem stereoskopowym membrany, posypanej pyłkami leukopodium dla ustalenia różnych punktów na poszukiwanej powierzchni. Stereoplanigraf ustala na podstawie tego zdjęcia współrzędne różnych punktów, co daje możliwość znalezienia warstwic. W ten sposób trud badania przeniesiony tu został z części eksperymentalnej na kreślarkę.

Inni - a i ci sami - autorzy, jak Piccard z Baesem lub Jonnerem, Querst, Błoch przeszli na koncepcję korzystniejszą. Konstruowali oni aparaturę, przystosowaną do bezpośredniego, szybkiego wykrywania linii równych naprężeń, zatem miejsc geometrycznych punktów, którym przynależy stała wartość całkowitego naprężenia stycznego.

Taką właśnie aparaturę Piccarda i Jonnera przedstawia rys.9.10. W schemacie tym A przedstawia płaską tarczę, na którą wkreślono na przemian gromadę jasnych i ciemnych współśrodkowych kręgów kołowych, z których najmniejszy, środkowy, ciemny pokrywa się z ogniskiem soczewki B. Płasko-równoległa płytka szklana C ma obie płaszczyzny posrebrzone tak, że przepuszczają one połowę promieni świetlnych na nie padających, a drugą odbijają. D oznacza mydlaną błonę. Pozioma soczewka E skupia wpadające do niej z dołu promienie w środku punktowej diafragmy F. Wreszcie G oznacza matówkę względnie płytę fotograficzną. Zespół ten działa następująco: Gdy błona jest płaska, padające na nią promienie, pochodzące tylko od ciemnego środka A, zostają odbite w górę i na matówce obserwujemy jednostajną ciemność. Gdy jednak błona przejdzie w powierzchnię przestrzenną, to odbija ona w górę promienie padające na nią z góry pod rozmaitym kątem, tj. promienie pochodzące od różnych kręgów ekranu A. Na odwzorowaniu błony D

na matówce G pojawią się na przemian krzywe jasne i ciemne przyporządkowane właściwemu kątowi nachylenia osi pionowej aparatu względem błony. Ponieważ zaś naprężenie styczne jest proporcjonalne do spadku membrany, przeto eksperyment ten pozwala znaleźć bezpośrednio linie równych naprężeń. Zarówno myśl przewodnią tego badania jak i sposób jego przeprowadzenia można uważać za najlepszy z dotychczas znanych.

Gdy materiał pręta nie podlega prawu Hooke'a ustawienie teorii skręcania wybitnie się komplikuje głównie z tego powodu, iż stan napięcia w pręcie staje się trójosiowy, a odnośne prawo wiążące nie jest nam znane. W pracy "O rozwinięciu potencjału sprężystości i zastosowaniach" omówiłem szczegółowo te trudności. Z naukowego punktu widzenia ubolewania godny jest fakt, iż nawet skręcanie cienkościennej rury kołowej nie należy do dwuosiowego stanu. Obok suwów, zatem odkształceń postaciowych, pojawiają się zmiany długości pręta i promienia rury, zatem odkształcenie objętościowe.

W praktyce najbardziej interesujący jest przypadek skręcania pręta o pełnym przekroju kołowym. Wiadomo nam jest z ustępu trzeciego jak i obecnie z przykładu 2.10, że na podstawie doświadczenia z cienkościnną rurą kołową znaleźć można związek między naprężeniem $\tau = \frac{N}{2a^2 b \pi}$ a przynależnym $\gamma = \psi \frac{a}{l}$ postaci ogólnej

$$\tau = g(\gamma). \quad (69.10)$$

Zakładając niezmiennie płaski przekrój po deformacji, czyli przyjmując, że γ jest w całości suwem r otrzymamy na wzór (4.10) zależność:

$$\gamma = r \psi', \quad (70.10)$$

gdzie r jest oddaleniem dowolnego miejsca przekroju od jego środka. Wobec tego warunek redukcji

$$N = \int_0^a 2r^2 \pi \tau dr = \frac{2\pi}{\psi'^3} \int_0^{a\psi'} g(\gamma) \gamma^2 d\gamma \quad (71.10)$$

daje związek między N tudzież ψ' lub - po uwzględnieniu podanych relacji - związek między τ i N .

Odwrotnie, odczytując na manometrze maszyny doświadczalnej N mierząc przynależne ψ' znaleźć możemy związek (69.10). Zrózniczkujemy bowiem (71.10) względem ψ' , a otrzymamy:

$$\frac{d}{d\psi'}(N\psi'^3) = 2\pi \cdot g(a\psi') \cdot a^2 \psi'^2 = 2\pi \tau_a a^3 \psi'^2.$$

skąd wynika:

$$\tau_a = \frac{1}{2\pi a^3} (3N + \dot{v}' \frac{dN}{d}). \quad (72.10)$$

Ponieważ w formule powyższej jest N funkcją \dot{v}' , a każdemu \dot{v}' przynależy $\gamma_a = a \dot{v}'$, przeto istotnie (72.10) przedstawia związek między τ_a a γ_a . Ze wzrostem N wielkości γ_a i τ_a przebiegają zmiennie wartości od zera poczynając. W tym więc sensie (72.10) jest istotnie poszukiwanym związkiem (69.10); po prostu znaczek a jest nieistotny.

Ustawienie teorii skręcenia prętów o dowolnym przekroju z materiału nie podlegającego prawu Hooke'a nastrocza poważne trudności. Natomiast udało się tego rodzaju ogólną teorię ustalić dla przekrojów dowolnej postaci w obszarach wzorowo plastycznych. Interesujące jest przy tym wiedzieć, że dla wypadku granicznego, gdy cały przekrój płynie, rozwiązanie stanu napięcia jest elementarnie proste.

Celem podania rozwiązania dla chwili, gdy część pola przekroju objęta została obszarem plastycznym, a reszta wobec tego stanowi w dalszym ciągu jeszcze strefę sprężystą - użyjemy jeszcze raz funkcji naprężeń Ω . Jak wiadomo, pochodne jej, przedstawiające naprężenia τ_y, τ_x według (32.10), spełniają warunek równowagi (33.10), a spełniając na brzegu konturu warunek (13.10), czyli też (41.10), ustalają na nim wartość tej funkcji według (39.10). Przypominamy też, że własność (41.10), czyli (39.10) rozszerzyć można na cały przekrój pręta, co prowadzi do pojęcia trajektorii, czyli linii naprężeń stycznych, a wówczas całkowite naprężenie można też przedstawić wzorem (42.10). Wreszcie moment skręcający określa w tym przedstawieniu formuła (44.10) lub ogólniej (45.10). Wreszcie wiadomo nam jest, że stosując analogię błonową możemy funkcję Ω zastąpić omówioną niedawno funkcją w .

Łącznikiem między stanem napięcia i stanem odkształcenia jest w obszarach sprężystych wiążące prawo Hooke'a. W obszarach wzorowo sprężystych prawo to zastępuje warunek plastyczności. Przyjmuje on tu postać:

$$\tau_y^2 + \tau_x^2 = k_s^2, \quad (73.10)$$

niezależnie od tego, czy użyjemy równania (18.3), czy też (19.3). Różnica między warunkami (18.3) i (19.3) tkwi tutaj jedynie w stosunku granicy plastyczności k_s przy ścinaniu do granicy plastyczności k przy rozciąganiu. Równanie (73.10), stwierdzające stałość całkowitego naprężenia stycznego możemy napisać też w postaci:

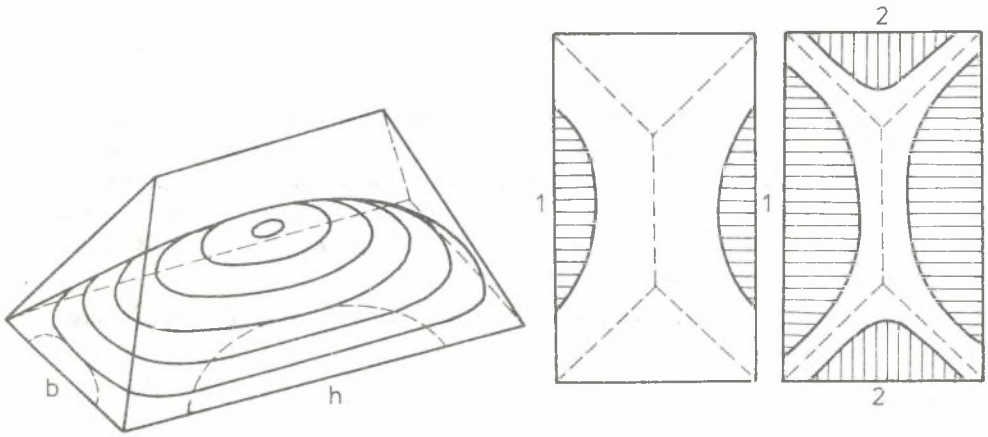
$$\left| \sqrt{\left(\frac{\partial \Omega}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial y}\right)^2} \right| = k_s, \quad (74.10)$$

stwierdzającej, że spadek całkowity powierzchni Ω jest w strefie plastycznej stały.

Pozwoliło to Nadai'owi przedłużyć ważność analogii błonowej w postaci analogii, którą nazwaliśmy tu s t o k o w ą. Istotnie rezultat (74.10) w transpozycji (62.10) oznacza, że ewentualna membrana musiałaby mieć w każdym punkcie obszaru plastycznego stały spadek o wartości

$$\left| \sqrt{\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2} \right| = \frac{k_s}{D}, \quad (75.10)$$

jeśli D jest podziałką transpozycji. Można to uzyskać w sposób następujący. Napnijmy - jak dotychczas - nad otworem naczynia membranę, a ponadto zbudujmy nad otworem s z t y w n ą powierzchnię stokową o stałym spadku k_s/D - jak na rys. 10.10. Najpierw, gdy wprowadzone ciśnienie q bę-



Rys. 10.10

dzie niezbyt wielkie, powstanie wzniesienie o łagodnych zboczach. Ze wzrostem ciśnienia zbocza będą coraz to bardziej strome, jednak kolejne wzniesienia będą pokrewne. Przy dostatecznie dużym ciśnieniu błona dotknie w jakimś miejscu skarpy powierzchni stokowej i ze wzrostem ciśnienia będzie coraz to większymi polami do niej przylegać. Rzuty tych pól są obszarami plastycznymi ze stałym naprężeniem stycznym, równym k_s , części pozostałe są resztkami obszarów sprężystych z naprężeniami zależnymi od obioru miejsca. W wypadku granicznym cały przekrój pręta będzie płynąć - powierzchnia błonowa przejdzie w całości w powierzchnię stokową.

Dla przekroju prostokątnego rzecz przedstawia rys. 10.10. Początkowo powstaną obszary plastyczne w okolicy środków dłuższych boków prostokąta, potem pojawią się też takie strefy przy bokach krótszych, wreszcie błona przylegnie w całości do ruchu czterospadkowego, rozpiętego nad prostokątem.

Zapewne ten graniczny wypadek nie jest w istocie możliwy, bo obszar plastyczności $\tau = k_s$ w wykresie γ . τ jest skończony, jednakże moment graniczny rzeczywisty nie będzie zbyt różnił się od wyznaczonego z powierzchni stokowej.

W obszarze plastycznym odkształcenia γ są nieoznaczone. Kąt owinięcia ψ' nie może być przeto wyznaczony z rozważań przeprowadzonych jedynie w tym obszarze. Można go natomiast znaleźć, pamiętając o nierozdzielności strefy sprężystej z plastyczną. Jest to zresztą ogólna cecha rozważań na terenie teorii plastyczności. Nauka ta nie jest samowystarczalna. Jej początek jest końcem teorii plastyczności. Znalazienie kąta ψ' w dowolnym stadium na drodze teoretycznej jest przeto bardzo trudne. Brzeg strefy sprężystej podzielony być musi na dwie części. W obrębie jednej warunek brzegowy jest zgodny z dotychczas podawanym w teorii sprężystości, wzdłuż drugiej - n i e z n a n e j - musi być:

$$\Omega_{spr} = \Omega_{plast.} \quad (76.10)$$

Wobec tego funkcja Ω w obszarze sprężystym zmienia swą budowę matematyczną. Nie wiadomą stanowi owa funkcja i brzeg obszaru sprężystego. W tym samym sensie zmienia się warunek brzegowy funkcji błonowej w . Ponieważ różniczkowe obu funkcji Ω i w nie ulegają w obszarze sprężystym zmianie, przeto nie zmienia się wniosek (63.10). Może on więc służyć bez zmiany do eksperymentalnego obliczenia.

Przykład 14.10. Z badać skręcanie pręca kołowego z materiału ciągliwego.

Odpowiedź 14.10. W obszarze sprężystym $\tau \leq k_s$ jest $\tau = \frac{N}{Z}$, $\psi' = \frac{N}{GJ}$, gdzie $Z = \frac{a^3}{2}$, $J = \frac{a^4 \pi}{2}$. Dla $N \geq Zk_s$ jest w wyniku założenia płaskości przekroju $\gamma = r\psi'$. W strefie sprężystej jest nadal $\tau = G\gamma = G\psi'r$, w plastycznej zaś $\tau = k_s$. Obie strefy rozdziela okrąg $G\psi'r_* = k_s$. Moment skracający wynosi: te aż

$$N = \int_0^{r_*} 2r^2 \pi \tau dr + \int_{r_*}^a 2r^2 \pi k_s dr = \frac{r_*^4 \pi}{2} G\psi' + \frac{2k_s \pi}{3} (a^3 - r_*^3).$$

czyli po wstawieniu $r_* = \frac{k_s}{G\psi'}$, wynosi on $N = \frac{2a^3 \pi k_s}{3} - \frac{k_s^4 \pi}{6G^3 \psi'^3}$. W ten sposób znaleziono związek między N i ψ' , a tym samym i promień kręgu rozdzielającego. Rozważanie jest ważne dla $r_* \geq 0$. W wypadku granicznym $r = 0$ jest $G\psi'$ nieograniczenie wielkie, tak że moment graniczny $N_\infty = \frac{2a^3 \pi k_s}{3}$. Plastyczny nośnik skręcania $Z_\infty = \frac{2a^3 \pi}{3}$ jest 4/3 razy większy od nośnika sprężystego.

Przykład 15.10. Porównać nośnik plastyczny i sprężysty dla przekroju prostokątnego b, h .

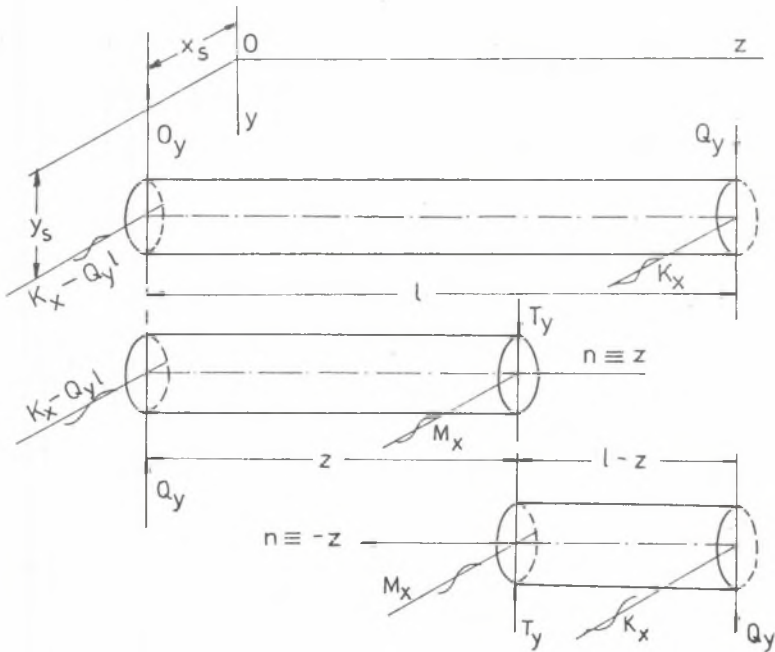
Odpowiedź 15.10. Według rys. 10.10 objętość pryzmy wynosi $\frac{bw_0}{6} (3h - b)$, jeśli w_0 jest jej wysokością. Według (67.10) moment skręcający jest wobec tego równy $N = Dw_0 \frac{b}{3} (3h - b)$. Spadek ścian wynosi według (75.10):

$$\frac{2w_0}{b} = \frac{k_s}{D}, \text{ skąd } Dw_0 = \frac{bk_s}{2}. \text{ Zatem } N = \frac{b^2(3h - b)}{6} k_s, \text{ czyli } \varphi_{\infty} = \frac{1}{6} b^2 (3h - b).$$

$$\text{Według (37.10) jest } Z = \frac{b^2 h}{3 + 1,8 \frac{b}{h}}. \text{ Mamy więc } \frac{Z_{\infty}}{Z} = \left(3 - \frac{b}{h}\right) \left(0,5 + 0,3 \frac{b}{h}\right),$$

który to wyrażenie wynosi 1,6 dla $\frac{b}{h} = 1$, 1,5 dla $\frac{b}{h} = 0$ i posiada maksimum 1,63 dla $\frac{b}{h} = \frac{2}{3}$.

11. LINIOWO ZMIENNE ZGINANIE



Rys. 1.11

Zbiór sił działających na przekrój końcowy $z = l$ równowarty jest siłom Q_y , przechodzącej przez geometryczny środek przekroju równoległe do osi y , a zatem stycznie do tego przekroju jak na rys. 1.11. Zbiór sił działający na przekrój początkowy $z = 0$ musi wobec tego sprowadzać się - między innymi - również do równej, tak samo umieszczonej i przeciwnie skierowanej siły Q_y . Dla zabezpieczenia równowagi potrzebne jest jeszcze działanie pary sił o momencie równoległym do osi x . Ponieważ rozważamy przypadek podstawowy, moment ten ułokować powinniśmy na jednym z przekrojów ograniczających układ. Gwoli ogólności możemy je pomieszczać na obu tych przekrojach, więc K_x na przekroju końcowym i $K_x - Q_y l$ na początkowym. Odpowiedniemiem tak

powstałego w płaszczyźnie yz zagadnienia jest analogiczne drugie w płaszczyźnie zx z dwójką sił Q_{x_1} , Q_x i momentami K_y , $K_y + Q_x l$.

Przypomnimy krótko wiadomości nabyte na powyższy temat w mechanice układów sztywnych. Wpływy wewnętrzne znajdziemy, dzieląc pręt dowolny przekrojem z i odrzucając jedną z tak powstałych części. Operacja podziału i odrzucenia części układu zamienia wielkości wewnętrzne na zewnętrzne, czyli umożliwia zastosowanie do nich równań równowagi. Okazuje się, że na przekrój działa siła T_y , przechodząca przez jego geometryczny środek stycznie do przekroju, nadto moment M_x o wektorze równoległym do osi x , przy czym zachodzą relacje:

$$M_x = K_x - Q_y(1 - z), \quad T_y = \frac{dM_x}{dz} = Q_y. \quad (1.11)$$

Wypisując powyższe równania opatrujemy wchodzące w nie wielkości znakami zależnymi od ich zwrotów odniesionych do osi układu, tzn. traktując je w warunkach równowagi jak wielkości zewnętrzne. Gdy jednak chodzi o znaki T_y , M_x jako wielkości wewnętrznych, którymi one są istotnie dla pręta długości l , musimy te wielkości odnieść do układu materialnego, tzn., respektując położenie wielkości względem aktualnych osi układu xyz , jednocześnie baczyc na położenie normalnej zewnętrznej n rozważanego przekroju względem osi z . Była już o tym kilkakrotnie mowa w poprzednich ustępach, między innymi np. w odniesieniu do wielkości M_x . Analogicznie - gdy normalna zewnętrzna przekroju jest zgodna z dodatnim kierunkiem osi z , to siła T_y jest dodatnia, gdy jej zwrot jest zgodny z dodatnim kierunkiem osi y . Gdy zaś normalna n jest zgodna z ujemnym kierunkiem osi z , to siła T_y jest dodatnia, jeśli jej zwrot jest zgodny z ujemnym kierunkiem osi y . Na rys. 1.11 założyliśmy więc $M_x > 0$, $T_y > 0$.

Wiemy już, że moment M_x jest momentem zginającym. Ponieważ tym razem zależy on liniowo od zmiennej z , rozważany przypadek nazywamy jednostajnie zmiennym zginaniem. Siłę wewnętrzną T_y o określonym wyżej położeniu nazywamy siłą poprzeczną, przeto możemy równie dobrze rozważany wypadek przypadkiem różnomiernego ścinania. Z powodu zależności $T_y = dM_x/dz$ ścinanie nie da się oddzielić od zginania.

Z naciskiem podkreślamy, że siła poprzeczna przechodzi przez środek przekroju. Siłę styczną do przekroju, lecz mijającą jego środek możemy nazwać mimopoprzeczną. Siła mimopoprzeczna jest równowarta sile poprzecznej i dołączonemu momentowi skręcającemu liczebnie równemu iloczynowi siły i odnośnego jej mimośrod.

Analogiczna uwaga dotyczy wielkości zewnętrznych. Gdy na jednym końcu pręta siła Q_y zaczepia w środku przekroju, a na drugim końcu przekrój zamocowany jest w punkcie nie pokrywającym się ze środkiem przekroju, w grupie wielkości podporowych pojawi się obok siły równoległej do osi y i momentu równoległego do osi x , ponadto moment równoległy do osi z .

Przechodząc z kolei do rozważań na gruncie mechaniki układów odkształcalnych będziemy dla prostoty pisać $Q_y = Q$, $K_x = K$ i analogicznie $T_y = T$, $M_x = M$.

Wiemy z punktu piątego, że rozwiązanie klasyczne dopuszcza w grupie przypadków podstawowych co najwyżej naprężenia τ_y , τ_x , σ_z . Lawirowaliśmy dotychczas tak, by obejść się albo tylko naprężeniem σ_z , albo tylko dwójką τ_y , τ_x . Obecnie musimy z konieczności dopuścić do konkurencji pełną trójkę τ_y , τ_x , σ_z . Będziemy usiłowali zrobić to tak, by niektóre, wcześniej uzyskane rezultaty utrzymać w mocy. Widoczne jest, że - jeśli to w ogóle jest możliwe - dotyczyć to może tylko roli naprężenia $\sigma_z = \sigma$.

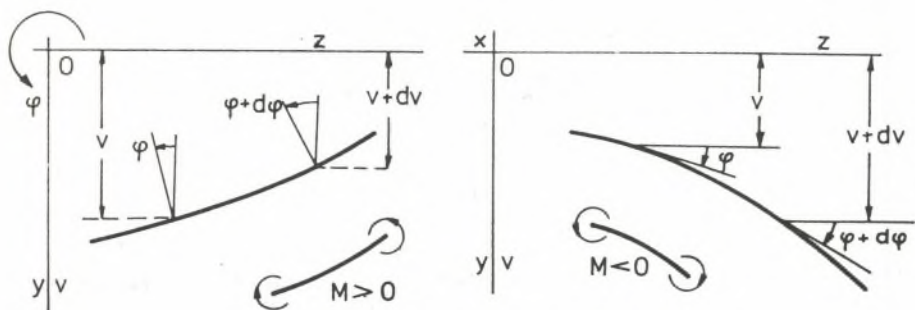
Założmy, że za osie xy układu przyjęliśmy główne środkowe osie ukształtowania przekroju. Przyjmujemy, że w tych warunkach moment $M_x = M$ spowoduje proste zginanie. Ewentualne ryzyko tego przyjęcia leży tylko w tym, że - odmiennie aniżeli w ustępie siódmym - obecnie M jest liniowo zmienne. Według powyższego założenia rola momentu zginającego M polega na zakrzywianiu osi pręta lub - co na jedno wychodzi - na obracaniu przekrojów pręta z zachowaniem ich ortogonalności względem osi pręta. Ponieważ w odnośną część rozważań ustępu siódmego zmienna z nie wchodziła w grę, przeto zakrzywienie to zgodnie z (7.7) wynosi:

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{M}{EI}. \quad (2.11)$$

Ponieważ jest ono obecnie zmienne, zatem celowe jest nadać mu stosowniejszą postać.

Przemieszczenia osi pręta odbywają się w rozważanym prostym zgięciu w płaszczyźnie yz . Umówmy się, że przemieszczenia punktów tej osi w kierunku y zamiast wyrażnie v_s oznaczać będziemy krótko v . Ponieważ obroty φ są bardzo małe, więc możemy przyjąć $\varphi = \sim \text{tg} \varphi$. W ustępie siódmym umówiliśmy się mierzyć kąt φ w dodatnim kierunku osi x , którą na rys. 2.11 należy sobie wyobrazić jako skierowaną przed płaszczyznę papieru. Po prostu przez φ rozumieliśmy obrót $\frac{dw}{dy}$ przekroju pręta. Skoro zaś zakrzywiona oś jest nadal prostopadła do przekroju, to zachodzi równość $\frac{dv}{dy} + \text{tg} \varphi = 0$. Zatem wzrostowi φ odpowiada ubytek rzędnych v , co wyraża równość $\text{tg} \varphi = - \frac{dv}{dz}$ oraz lewa część rysunku 2.11. Uwzględniając powyższe w (2.11) znajdziemy:

$$v'' = \frac{d^2v}{dz^2} = - \frac{M}{EI}. \quad (3.11)$$



Rys. 2.11

Gdy nie zmieniając umowy co do sposobu znakowania M , zmienimy - co jest pożądané - umowę co do kierunku pomiaru φ - jak np. na prawej części rys. 2.11, wtedy musimy wprowadzić ujemny znak na jednej z stron relacji (2.11). Po prostu obecnie φ oznacza nachylenie osi pręta. Wtedy jednak wzrostowi φ przynależy jednoczesny wzrost przemieszczenia v , zatem $\text{tg } \varphi = + \frac{dv}{dz}$. Uwzględniając powyższe duże zmiany otrzymamy znowu (3.11) bez zmiany.

Istotny w powyższym rozważaniu jest fakt, że dla ustalania równania (3.11) należy uczynić dwie umowy - jedną, dotyczącą znaku φ i drugą, dotyczącą znaku M . Oczywiście jest, że przy zmianie kierunku osi v równanie to zmieni również znak. Relację (3.11) nazywamy **równaniem różniczkowym z krzywionęj osi pręta**. Przy zmiennym M celowe jest zawsze stosować (3.11) w miejsce (2.11).

Rozpoczęte tu rozważanie na temat roli momentu M doprowadzi nas w dalszym ciągu do wzoru (8.7), tj. formuły:

$$\sigma = \frac{M}{I} \cdot y \quad (4.11)$$

i jej szczególnej postaci (11.7) dla włókien skrajnych, więc:

$$\bar{\sigma} = \frac{M}{\bar{X}} \quad (5.11)$$

Ponieważ wreszcie energia sprężystości nie zawiera dodajników pochodzenia mieszanego σ, τ , przeto możemy od razu też wypisać udział momentu w energii w postaci (9.7), czyli:

$$W' = - \frac{1}{2} M v'' = \frac{1}{2} \frac{M^2}{EI} = \frac{1}{2} EI v''^2 \quad (6.11)$$

W ten sposób wyczerpany został wpływ momentu M i pozostaje z kolei rozpatrzyć rolę siły T , które to zagadnienie stanowi istotę rozważań obecnego ustępu.

Mamy spełnić warunek równowagi:

$$\frac{\partial \tau_y}{\partial x} + \frac{\partial \tau_x}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \quad (7.11)$$

i warunek brzegowy:

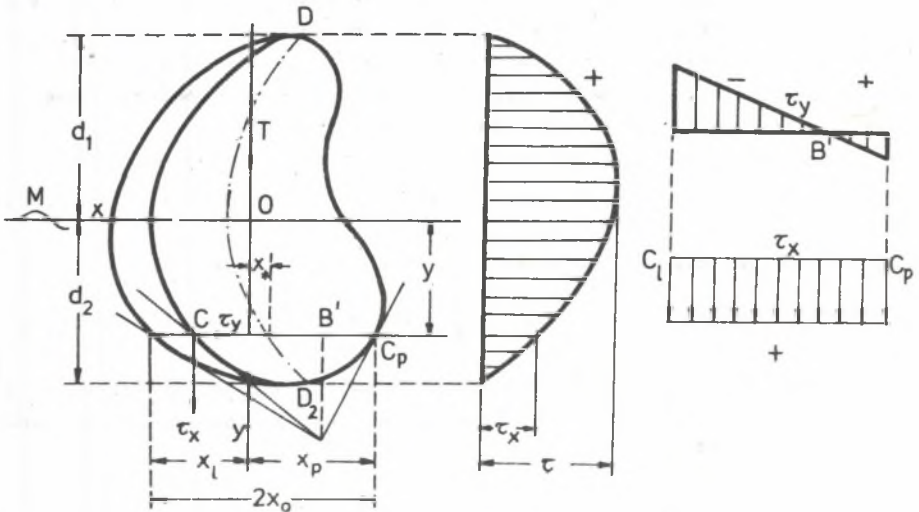
$$\tau_y n_x + \tau_x n_y = 0. \quad (8.11)$$

Ponieważ zagadnienie to jest jeszcze bardziej zawiłe, aniżeli przedstawiono w teorii skręcenia, przeto ograniczymy się do podania dostatecznie pewnego rozwiązania przybliżonego.

Weźmiemy pod uwagę przekroje jednoopójne. Celowe jest w miejsce współrzędnych $x_1(y)$ i $x_p(y)$ wprowadzić współrzędną $x(y)$ środka szerokości i ową szerokość $2x_0(y)$, więc:

$$2x_* = x_1 = x_p, \quad 2x_0 = x_1 - x_p. \quad (9.11)$$

Zakładamy dalej, że przekroje te posiadają następujące właściwości. Dowlona prosta równoległa do osi x przecina brzeg przekroju w nie więcej aniżeli dwu punktach - lewym C_1 i prawym C_p . Styczna w każdym punkcie brzegu jest określona, co znaczy, że dopuszczamy załom brzegu co najwy-



Rys. 3.11

zej w punktach skrajnych D_1, D_2 względnie dla współrzędnych skrajnych $y = -d_1$ tudzież $y = +d_2$. Niech wreszcie wielkość $U_x = U$, a to:

$$-U_1 = - \int_{-d_1}^y 2x_0 \tilde{y} d\tilde{y} = U(y) = \int_y^{d_2} 2x_0 \tilde{y} d\tilde{y} = U_2, \quad (10.11)$$

oznacza bezwzględną wartość średnika (momentu statycznego) jednej z części pola przekroju, podzielonego prostą $y = \text{constans}$ względem linii obojętnej x - obojętnie której - skoro $U_1 + U_2 = 0$.

Niech dalej H oznacza wielkość:

$$H_x = H = \int_{-d_1}^{+d_2} U(x_* dy - y dx_*), \quad (11.11)$$

to zakładamy, że interesujące nas przekroje posiadają własność:

$$H = 0. \quad (12.11)$$

Mogą więc tu z pewnością należeć przekroje symetryczne względem osi y , zatem linii działania siły poprzecznej T , albowiem dla nich jest $x_* = 0$. Mogą tu należeć przekroje, dla których krzywa środkująca $x_*(y)$ jest prostą środkową, ponieważ dla niej jest $\frac{x_*}{y} = \frac{dx_*}{dy}$. Mogą to być też przekroje biegunowo symetryczne, gdyż dla nich przy zmianie znaku zmiennej y wielkość U nie zmienia znaku, a zmienia go dwumian podcałkowy.

Odnosnie naprężeń τ_y, τ_x czynimy następujące założenia. Przyjmujemy, że składowa τ_x jest zależna jedynie od zmiennej y , tj., że jest ona wzdłuż szerokości $2x_0$ stała - co wymaga, by przekrój nie był zbyt szeroki. Przyjmujemy ponadto, że znany nam jest kierunek całkowitego naprężenia $\tau = \sqrt{\tau_x^2 + \tau_y^2}$ w każdym punkcie C przekroju, ponieważ dla przynależnej trajektorii zakładamy równanie:

$$x = c x_0 + x_*. \quad (13.11)$$

Założenie to zasługuje na uwagę. Jeśli przemienimy parametr c zmieniać będziemy między wartościami $-1, +1$, pokryjemy przekrój wszelkimi liniami naprężeń. W szczególności dla $c = -1$ jest z powodu (9.11) $x = x_p$ i podobnie dla $c = +1$ otrzymamy $x = x_1$. Skrajne trajektorie pokrywają się z konturem brzegu, co dowodzi, że założenie (13.11) spełnia warunek (8.11).

Można wykazać, że uczynione przez nas założenie jest zgodne z przyjęciem, iż naprężenia całkowite τ , przynależne do punktów prostej $y = \text{constans}$ mają wspólny środek zbieżności, więc np. B na rys. 3.11.

Przyjmęwszy dowolny punkt (x, y) przekroju ustalamy tym samym parametrem c według (13.11), a tym samym kierunek $\frac{dx}{dy}$ przynależny temu punktowi, a to:

$$\frac{dx}{dy} = c \frac{dx_0}{dy} + \frac{dx_*}{dy} = \frac{x-x_*}{x_0} \cdot \frac{dx_0}{dy} + \frac{dx_*}{dy}. \quad (14.11)$$

Gdyby więc przynależne temu punktowi naprężenie τ_x było znane, to znane byłoby tym samym również naprężenie

$$\tau_y = \tau_x \frac{dx}{dy}. \quad (15.11)$$

Warunek równowagi (7.11) przyjmie po omówionych założeniach postać:

$$\tau_x \frac{1}{x_0} \frac{dx_0}{dy} + \frac{d\tau_x}{dy} + \frac{T}{I} \cdot y = 0.$$

Nawiasem mówiąc, często przybliżenia stosowane w mechanice układów rzeczywistych polegają na tym, że równanie cząstkowe usiłujemy zmienić na stacjonarne zwyczajne - co właśnie się stało. Pomnożywszy powyższe równanie stronami przez x_0 możemy mu nadać postać:

$$\frac{d}{dy}(x_0 \tau_x) + \frac{T}{I} x_0 y = 0,$$

skąd po scałkowaniu jest:

$$x_0 \tau_x = -\frac{T}{I} \int x_0 y \, dy + C.$$

W równaniu tym C jest stałą całkowania, a $\int x_0 y \, dy$ jest funkcją y . Gdy w miejscu $y = -d_1$ jest $n_x = 0$, $n_y = -1$, musi tam zgodnie z (8.11) być $\tau_x = 0$. Gdy zaś w miejscu tym przekrój posiada załom, tzn. nieokreślone n_x , n_y , musi tam znikać jednocześnie τ_x i τ_y .

Uwzględniając powyższe w ostatnim równaniu znajdziemy:

$$C = \frac{T}{I} (\int x_0 y \, dy)_y = -d_1.$$

Gdy uczynimy formalną różnicę między współrzędną y , określającą obrane w przekroju miejsce (x, y) a zmienną podcałkową \tilde{y} , to wstawiając wyżej znalezione obecnie C napiszemy:

$$x\tau_x = -\frac{T}{I} \left(\left(\int_{x_0}^y \tilde{y} d\tilde{y} \right)_y - \left(\int_{x_0}^y \tilde{y} d\tilde{y} \right)_{-d_1} \right) = -\frac{T}{I} \int_{-d_1}^y x_0 \tilde{y} d\tilde{y},$$

gdzie $x_0 = x_0(\tilde{y})$. Rozwiązanie powyższe zawisło w jednej jeszcze niepewności. Oto dla $y = d_2$ winno z wyżej przytoczonych powodów być również $\tau_x = 0$. Gdybyśmy z tego postulatu wyznaczyli stałą C , okazałoby się, że winno być:

$$x\tau_x = +\frac{T}{I} \int_y^{d_2} x_0 \tilde{y} d\tilde{y}.$$

Szczęśliwym zbiegiem okoliczności obie postacie rozwiązania są zgodne, o czym świadczy sens obu całek. Uwzględnivszy (10.11) możemy ostatecznie napisać

$$\tau_x = \frac{TU}{2x_0 I}, \quad (16.11)$$

a wracając do (15.11) i (14.11)

$$\tau_y = \frac{TU}{2x_0 I} \left(\frac{x - x_*}{x_0} \cdot \frac{dx_0}{dy} + \frac{dx_*}{dy} \right). \quad (17.11)$$

Objaśnienie dla powyższych formuł przedstawia się następująco. Pręt ma przekrój stały; jego kształtnik względem osi głównej x wynosi I . Ścinanie jest równomierne; siła poprzeczna T jest stałą i działa wzdłuż osi y . Przekrój określony jest szerokością $2x_0$, zależną od y i linią środkową, której położenie x_* jest funkcją również zmiennej y . Chcąc znaleźć składowe τ_x , τ_y w punkcie C przekroju, kreślimy przez ten punkt prostą równoległą do osi x , przez co przekrój został podzielony na dwie części. Obliczamy z kolei średnik U jednej z tych części względem linii obojętnej x . Środek geometryczny przekroju leży na tej linii, wobec czego suma algebraicznych wartości średników jest zerem, co wyjaśnia dowolność w obiorze tej lub owej części. Naprężenie τ_x jest według (16.11) zależne tylko od zmiennej y , co ilustrują diagramy rys. 3.11^{x)}. Dla prze-

^{x)} Położenie i wartość maksimum tego naprężenia zależy od ilorazu $\frac{U}{x_0}$.

krojów symetrycznych względem osi x ekstremum ma miejsce $y = 0$, dla innych zaś w pobliżu tej osi. Naprężenie τ_y zależy od zmiennej y i dodatkowo liniowo od zmiennej x . W miejscach typu B naprężenie to znika.

Pozostaje jeszcze wykazać, że zbiór elementarnych sił $\tau_x dA$, $\tau_y dA$ czyni zadość warunkom redukcji

$$\int \tau_x dA = T, \quad \int \tau_y dA = 0, \quad \int (x\tau_x - y\tau_y) dA = 0, \quad (18.11)$$

to znaczy sprowadza się do siły T , leżącej na osi y . Ponieważ τ_x zależy jedynie od y , przeto weryfikując pierwsze z równań wystarczy napisać $dA = 2x_0 dy$. Mamy tu więc:

$$\int \tau_x dA = \frac{T}{I} \int_{-d_1}^{+d_2} U dy = \frac{T}{I} \int_{-d_1}^{+d_2} (U y - \int y dU).$$

Lecz U czy to dla $y = -d_1$, czy dla $y = +d_2$ znika, według zaś prawideł różniczkowania pod znakiem całki wobec (10.11) jest $dU = -2x_0 y dy$, wobec czego

$$\int \tau_x dA = \frac{T}{I} \int_{-d_1}^{+d_2} 2x_0 y^2 dy = T,$$

albowiem powyższa całka oznacza kształtnik I . Zatem podane dla τ_x rozwiązanie (16.11) spełnia pierwszy warunek redukcji (18.11).

Przechodząc do weryfikacji drugiego, zbadajmy wpieryw wartość tej części, która zależy też od zmiennej x . Uczynimy to, kładąc $dA = dx dy$. Mamy tu:

$$\int \frac{U}{2x_0^2} x \frac{dx_0}{dy} dA = \int_{-d_1}^{+d_2} \int_{x_p}^{x_1} \frac{Ux}{2x_0^2} \frac{dx_0}{dy} dx dy = \int_{-d_1}^{+d_2} \frac{U}{2x_0^2} \frac{dx_0}{dy} \cdot \frac{x_1^2 - x_p^2}{2} dy.$$

Lecz według (9.11) jest $x_1^2 - x_p^2 = 4x_0 x_*$. Wobec tego mamy

$$\int \frac{U}{2x_0^2} x \frac{dx_0}{dy} dA = \int_{-d_1}^{+d_2} U \frac{x_*}{x_0} \frac{dx_0}{dy} dy.$$

W pozostałej części aktualnego wyrażenia wystarczy położyć $dA = 2x_0 dy$.
Otrzymamy więc:

$$\int \tau_y dA = \frac{I}{I} \int_{-d_1}^{+d_2} U \left(\frac{x_*}{x_0} \frac{dx_0}{dy} - \frac{x_*}{x_0} \frac{dx_0}{dy} + \frac{dx_*}{dy} \right) dy = \frac{I}{I} \int_{-d_1}^{+d_2} U \frac{dx_*}{dy} dy,$$

Stosując znów metodę całkowania przez części znajdziemy:

$$\int \tau_y dA = \frac{I}{I} \int_{-d_1}^{+d_2} U dx_* = \frac{I}{I} \int_{-d_1}^{+d_2} (U x_* - \int x_* dU),$$

Leć U znika zarówno dla $y = -d_1$ jak $y = +d_2$, zaś $dU = -2x_0 y dy$, wobec czego jest:

$$\int \tau_y dA = \frac{I}{I} \int_{-d_1}^{+d_2} 2x_0 x_* y dy = 0,$$

albowiem całka powyższa oznacza bocznic przekroju, ten zaś równy jest zeru, bo osiami odniesienia są główne osie. Rozwiązanie (17.11) spełnia więc drugi z kolei warunek redukcji (18.11).

Pozostaje do zweryfikowania ostatnie z równań (18.11). Piszemy:

$$\int (x\tau_x - y\tau_y) dA = \frac{I}{I} \int \frac{U}{2x_0^2} \left(x_0 - y \frac{dx_0}{dy} \right) x dA + \frac{I}{I} \int \frac{U}{2x_0^2} \left(x_* \frac{dx_0}{dy} - x_0 \frac{dx_*}{dy} \right) y dA,$$

rozbijając wyrażenie na dwa dodajniki, z których zajmiemy się najpierw pierwszym zależnym od x . Mamy tu:

$$\begin{aligned} \int \frac{U}{2x_0^2} \left(x_0 - y \frac{dx_0}{dy} \right) x dA &= \int_{-d_1}^{+d_2} \int_{x_p}^{x_1} \frac{U}{2x_0^2} \left(x_0 - y \frac{dx_0}{dy} \right) x dx dy = \\ &= \int_{-d_1}^{+d_2} \frac{U}{2x_0^2} \left(x_0 - y \frac{dx_0}{dy} \right) \frac{x_1^2 - x_p^2}{2} dy = \int_{-d_1}^{+d_2} U \frac{x_*}{x_0} \left(x_0 - y \frac{dx_0}{dy} \right) dy, \end{aligned}$$

Wracając zatem znajdziemy:

$$\int (x\tau_x - y\tau_y) dA = \frac{T}{I} \int_{-d_1}^{+d_2} \frac{U}{x_0} (x_0 x_* - x_* y \frac{dx_0}{dy} + x_* y \frac{dx_0}{dy} - x y \frac{dx_*}{dy}) dy =$$

$$= \frac{T}{I} \int_{-d_1}^{+d_2} U(x_* dy - y dx_*) = \frac{TH}{I} = 0,$$

ponieważ założyliśmy w (12.11), że zajmiemy się przekrojami, dla których wyrażenie (11.11) znika. Gdyby tak nie było, siła T byłaby mimopoprzeczną.

W tym miejscu wypada zwrócić uwagę na pewien drobny szczegół. Rezultat weryfikacji trzeciego warunku redukcyjnego przybrał końcową postać $+\frac{T_H}{I} \frac{y x}{x}$. Gdyby siła T była równoległa do osi, to - z uwagi na to, że elementar-nemu momentowi nadalibyśmy nadal postać $(x\tau_x - y\tau_y)dA$ - rezultat oblicze-nia przyjąłby postać $-\frac{T_H}{I} \frac{y x}{y}$, albowiem w zmienionych warunkach w analogicznym do (16.11) i (17.11) rozwiązaniu matematyczną rolę naprężenia τ_x przyjąłoby naprężenie τ_y , a rolę naprężenia τ_y objęłoby naprężenie τ_x . Gdyby więc jednocześnie działały obie siły T_y i T_x , to rezultat obli-czania otrzymałby postać $\frac{T_H}{I} \frac{y x}{x} - \frac{T_H}{I} \frac{x y}{y}$. Skorzystamy z tej uwagi w stosownym miejscu.

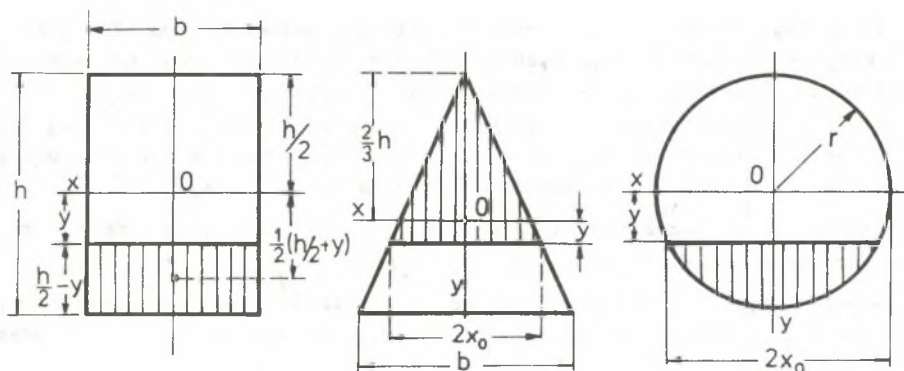
Wracając do tematu widzimy, że przy zastrzeżeniu $H = 0$ rozwiązanie (16.11), (17.11) czyni zadość wszystkim wymogom redukcji. Pozostaje jeszcze zilustrować je przykładami.

Przykład 1.11. Podać naprężenia styczne dla przekroju prostokątnego.

Odpowiedź 1.11. $I = \frac{1}{12} bh^3$, $2x_0 = b$, $x_* = 0$, $U = b(\frac{h}{3} - y) \frac{1}{2} (\frac{h}{2} + y) =$
 $= \frac{bh^2}{8} (1 - \frac{4y^2}{b^2})$, $\tau_y = 0$, $\tau_x = \frac{3}{2} \frac{T}{A} (1 - \frac{4y^2}{b^2})$, gdzie $A = bh$. Wykres τ_x jest parabolą drugiego stopnia. Dla $y = \pm \frac{h}{2}$ jest $\tau_x = 0$, dla $y = 0$ znaj-dziemy $\max \tau_x$ a to $\tau = \frac{3}{2} \frac{T}{A}$, gdzie najwidoczniej $\frac{T}{A}$ jest średnią warto-ścią naprężenia.

Przykład 2.11. Podać naprężenia τ_x , τ_y dla przekroju trójkątnego.

Odpowiedź 2.11. Jeśli podstawa jest b , wysokością h - jak na rys.4.11, to $I = \frac{bh^3}{36}$, $2x_0 = \frac{b}{3}(2h + y)$, $x_* = 0$, Tym razem wygodniej jest wziąć pod



Rys. 4.11

uwagę górną część przedzielonego profilu. Znajdziemy $U = x_0 \left(\frac{2}{3} h + y \right) \cdot \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3} h - 2y \right)$, a stąd $\tau_x = \frac{4}{3} \frac{I}{A} \left(1 + \frac{3y}{2h} \right) \left(1 - \frac{3y}{h} \right)$, co daje znów zmienność paraboliczną z zerowymi wartościami τ_x w wierzchołku $y = -\frac{2h}{3}$ i wzdłuż podstawy $y = \frac{h}{3}$. Maximum znajdziemy dla $y = -\frac{h}{6}$, tj. w połowie wysokości przekroju. Wynosi ono $\tau = \frac{3}{2} \frac{I}{A}$, gdzie $A = \frac{bh}{2}$. Druga składowa $\tau_y = \tau_x \frac{x}{x_0} = \frac{2}{A} \frac{I}{h} x \left(1 - \frac{3y}{h} \right)$ znika również w wierzchołku i u podstawy a wzdłuż ramion $x = \pm x_0$ trójkąta ma wartość $\tau_y = \pm \tau_x \frac{b}{2h}$. Wobec tego ekstremum tego naprężenia znajdziemy również dla $y = -\frac{h}{6}$. Całkowite ekstremalne naprężenia wynosi $\frac{3}{2} \frac{I}{A} \cdot \sqrt{1 + \frac{b^2}{4h^2}}$.

Przykład 3.11. Wyznaczyć naprężenia przy ścinaniu przekroju kołowego.

Odpowiedź 3.11. W mechanice teoretycznej znajduje się $U = \frac{(2x_0)^3}{12} = \frac{2}{3} x_0^3$, $I = \frac{r^4 \pi}{4}$. Zatem, wobec $x_0^2 = r^2 - y^2$, mamy $\tau_x = \frac{4}{3} \frac{I}{A} \left(1 - \frac{y^2}{r^2} \right)$, co daje znów wykres paraboliczny. Druga składowa $\tau_y = \tau_x \frac{x}{x_0} \cdot \frac{dx_0}{dy} = -\frac{4}{3} \frac{I}{A} \frac{xy}{r^2}$

wzdłuż brzegu $x = \pm x_0$ osiąga wartość $\tau_y = \pm \frac{4}{3} \frac{I}{A} \frac{y}{r} \cdot \sqrt{1 - \frac{y^2}{r^2}}$. Naprężenie

całkowite wzdłuż brzegu wynosi $\frac{4}{3} \frac{I}{A} \sqrt{1 - \frac{y^2}{r^2}}$, co daje wykres eliptyczny.

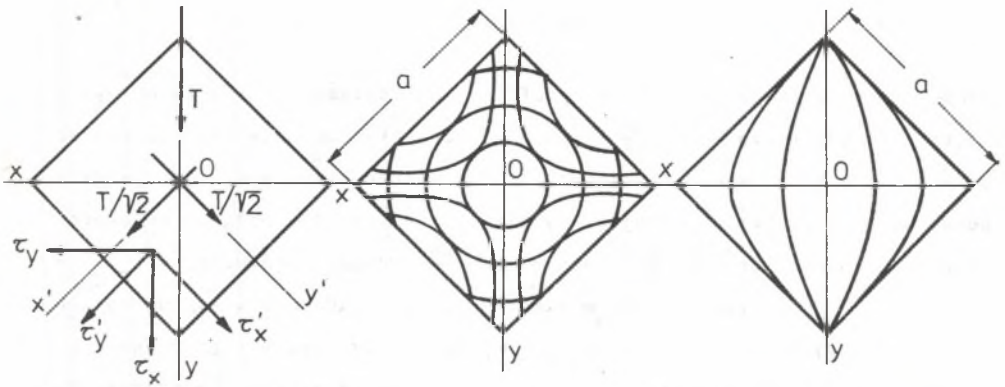
Największe naprężenie znajdujemy dla $y = 0$; wynosi ono $\tau = \frac{4}{3} \frac{I}{A}$, gdzie $A = r^2 \pi$.

Jak zaznaczyliśmy, przedstawione tu postępowanie dopuszcza załomy jedynie na wysokości ograniczeń $y = -d_1$, $y = +d_2$, to jest tam, gdzie formuły (16.11) i (17.11) gwarantują nam z powodu $U = 0$ zerowe wartości dla

τ_z i τ_y . Gdy kontur przekroju posiada załomy - zwłaszcza wypukłe - i w innych miejscach, użycie powyższych formuł jest niedopuszczalne, albowiem wykazałyby one w miejscach tych różne od zera naprężenia, co jest niemożliwe. Nie posiadamy dostatecznie szybkiej i prostej metody przybliżonej dla znalezienia naprężeń τ_x , τ_y w takich wypadkach. Pewne możliwości postępowania wyjdą na jaw z uogólnienia rezultatów następującego przykładu.

Przykład 4.11. Wyznaczyć naprężenia τ_x , τ_y przy ścinaniu przekroju kwadratowego siłą T , działającą wzdłuż jego przekątnej.

Odpowiedź 4.11. Wprowadzmy - jak na rys. 5.11 - układ pomocniczy x , y obrócony względem właściwego x , y o $\pi/4$. Między współrzędnymi zachodzą



Rys. 5.11

związki $x' = \frac{y+x}{\sqrt{2}}$, $y' = \frac{y-x}{\sqrt{2}}$ czyli - co nam za chwilę będzie potrzebne $y'^2 + x'^2 = y^2 + x^2$, $y'^2 - x'^2 = -2xy$. Siłę T rozłożmy w kierunku osi x' , y' . Każda ze składowych wynosi $T/\sqrt{2}$. Dla każdej z nich rozwiązanie podaje przykład 1.11. Dla składowej równoległej do osi y' jest $\tau'_y = 0$, $\tau'_x = \frac{3}{2} \frac{T}{AV^2} (1 - \frac{4y'^2}{a^2})$, dla składowej zaś równoległej do osi x' jest $\tau'_x = 0$, $\tau'_y = \frac{3}{2} \frac{T}{AV^2} (1 - \frac{4x'^2}{a^2})$. Składając te dwa rozwiązania w kierunkach y i x znajdziemy:

$$\tau_x = \frac{\tau'_y + \tau'_x}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2} \frac{T}{A} (1 - 2 \frac{x'^2 + y'^2}{a^2}) = \frac{3}{2} \frac{T}{A} (1 - 2 \frac{x^2 + y^2}{a^2}) ,$$

$$\tau_y = \frac{\tau'_y - \tau'_x}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2} \frac{T}{A} \cdot \frac{y'^2 - x'^2}{a^2} = -6 \frac{T}{A} \cdot \frac{xy}{a^2} .$$

Linie równych naprężeń τ_x są współśrodkowymi kołami, linie zaś równych naprężeń τ_y równobocznymi hiperbolami o wspólnych asymptotach. Największe τ_y znajdziemy w środku boków kwadratu, wynosi ono $\frac{3}{4} \frac{T}{A}$. Największe τ_x znajdziemy w środku kwadratu, wynosi ono $\bar{\tau} = \frac{3}{2} \cdot \frac{T}{A}$ i stanowi jednocześnie maksimum całkowitego naprężenia $\sqrt{\tau_x^2 + \tau_y^2}$. Łatwo wykazać, że przez nieznaczną modyfikację niektórych współczynników uzyskać możemy z podanych τ_x, τ_y rozwiązanie dla przekroju rombowego. Trajektorie naprężeń dla zagadnienia kwadratu znajdziemy, wstawiając τ_x, τ_y w równanie 15.11. Otrzymane w ten sposób równanie

$$4xy \, dy + (a^2 - 2(x^2 + y^2)) \, dx = 0$$

scałkujemy z łatwością, kładąc $y^2 = Y$. Będzie bowiem

$$\frac{x dY - Y dx}{x^2} + \left(\frac{a^2}{2x^2} - 1\right) dx = 0,$$

czyli po scałkowaniu $\frac{Y}{x} - \left(\frac{a^2}{2x} + x\right) + C = 0$ lub ostatecznie $y^2 - x^2 + C x - \frac{a^2}{2} = 0$, gdzie C jest stałą całkowania. Nadając jej różne wartości, otrzymywać będziemy coraz to inne hiperboliczne trajektorie. Dla $x = 0$ otrzymujemy bez względu na wartość tego parametru $y = \pm \frac{a}{2}$, co znaczy iż wszystkie trajektorie przecinają się w dwóch wierzchołkach kwadratu. Dla $C = a\sqrt{2}$ równanie trajektorii przybiera postać $y = \pm (x - a/\sqrt{2})$, określającą lewą parę boków kwadratu. Podobnie dla $C = -a\sqrt{2}$ znajdziemy jako trajektorię prawą dwójkę boków $y = \pm (x + a/\sqrt{2})$. Najwidoczniej celem uzyskania wszystkich możliwych trajektorii zmieniać musimy C w przedziałach $(-\infty, -a\sqrt{2})$ tudzież $(a\sqrt{2}, \infty)$.

Przy traktowaniu przekrojów z załomami konturowymi należy skorzystać z pewnych rezultatów uzyskanych powyżej odnośnie trajektorii. Wypisawszy równanie brzegu należy zmodyfikować dowolnym czynnikiem C wszystkie te albo niektóre wyrazy równania, które znikają dla $x = 0$. Równanie tak uzyskane należy uważać za równanie trajektorii. Zastosowany zabieg prowadzi do tego, że wszystkie trajektorie będą mieć dwa wspólne punkty na linii działania siły T . W ten sposób uczynimy zadość warunkowi (8.11), a związkiem (15.11) zmniejszymy liczbę niewiadomych do jednej τ_x . W dalszym ciągu zastosować należy (7.11), pamiętając jednak o tym, że dla profili omawianej kategorii jest τ_x funkcją obu zmiennych x, y . Modyfikację czynnikiem C należy starać się tak dokonać, by równanie (7.11) miało możliwie prostą, łatwo całkowaną postać. Jeszcze prościej postąpimy, wyobrażając sobie, że załomy - zwłaszcza wypukłe - zostały w stosowny sposób wyokrąglone. Wtedy bowiem możemy znów stosować dotychczasowe formuły (16.11) i (17.11).

Rozważania dotychczasowe prowadzą do wniosku, że stan napięcia w wypadku liniowo zmiennego zginania jest dwuosiowy. Ścinanie prowadzi do skrętołów τ_x, τ_y . Największe naprężenia styczne τ_x, τ_y można przedstawić wzorami:

$$\bar{\tau}_x = \bar{\alpha} \frac{T}{A}, \quad \bar{\tau}_y = \bar{\beta} \frac{T}{A}, \quad (19.11)$$

gdzie $\frac{T}{A}$ jest naprężeniem średnim. Współczynniki $\bar{\alpha} > 1$ tudzież $\bar{\beta}$ wynikają z analizy formuł (16.11) i (17.11). Naprężenie $\bar{\tau}_x$ zachodzi w okolicy linii obojętnej względnie w okolicy połowy wysokości przekroju.

Przebieg matematyczny obecnych równań był odmienny od zastosowanego w poprzednich ustępach. Dotychczas bowiem zakładaliśmy pewne fakty geometryczne, gwarantujące nam nierozdzielność układu, a jako konsekwencję odnośnego założenia znajdowaliśmy przynależne fakty mechaniczne. Obecnie postąpiliśmy odwrotnie. Uzupełniając formułę (4.11) znaleźliśmy dodatkowe składowe (16.11) i (17.11). Rozwiązawszy w ten sposób sprawę stanu napięcia musimy obecnie zbadać, jakie stąd wynikają konsekwencje geometryczne.

Rys. 6.11 przedstawia rezultat geometryczny obecności tylko o siły T . W lewej jego części przedstawiono przekrój pręta płaszczyzną yz . W dwóch szczegółach następnym przypomniano zgodnie z treścią pierwszego ustępu, jak na odkształcenia poprzeczne

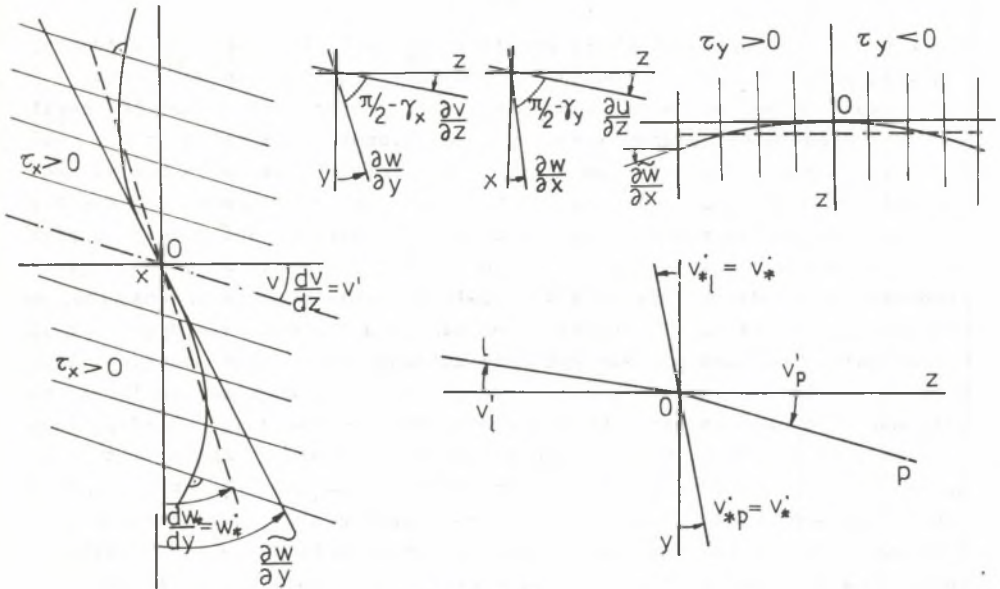
$$\gamma_x = \frac{\tau_x}{G}, \quad \gamma_y = \frac{\tau_y}{G} \quad (20.11)$$

składają się sumy $\partial v / \partial z$ i $\partial w / \partial y$ tudzież $\partial u / \partial z$ i $\partial w / \partial x$. Zgodnie z prawem Hooke'a naprężenia τ_x, τ_y wywołują odkształcenia

$$\gamma_x = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \gamma_y = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}. \quad (21.11)$$

Wielkości γ_x, γ_y zgodnie z (20.11) zależą tak samo od zmiennych x, y , z jak naprężenia τ_x, τ_y . W rozważanym przez nas przypadku podstawowym, tj. równomiernego ścinania żadna z tych wielkości nie zależy od zmiennej z . γ_y zależy od zmiennej x tylko liniowo, wreszcie γ_x jest funkcją jedynie zmiennej y . Równoległe warstwy podłużne pręta pochyłą się. Dla zachowania nierozdzielności pochylenie to musi być dla wszystkich warstw wspólne, co upoważnia nas do pisowni

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{dv}{dz} = v'$$



Rys. 6.11

Równanie (3.11) wskazuje, że przyczyną istnienia wielkości $\frac{d^2v}{dz^2}$ jest moment M . Gdy równanie to raz scałkujemy, otrzymamy $\frac{dv}{dz}$. Na ch y l e n i e osi pręta $\frac{dv}{dz}$ będzie jednak zależęć nie tylko od M , lecz ewentualnie również od stałej tego całkowania. Gdy zaś $\frac{dv}{dz}$ jest sprzęgnięte z $\frac{\partial w}{\partial y}$ w całości γ_x , ta zaś zależy za pośrednictwem τ_x od siły T , dlatego dzięki tej stałej całkowania może ostatecznie $\frac{dv}{dz}$ być uzależnione również od siły T . Tę część nachylenia $\frac{dv}{dz}$, która pochodzi od działania siły poprzecznej T , odkształcenia γ_x tj. $\frac{\partial w}{\partial y}$ nazwiemy o d c h y l e n i e m przekroju - rozumie się - od prostopadłości względem jego osi, względnie również posunięciem. Ponieważ posunięcie dv/dz nie jest zależne od y , a γ_x od tej zmiennej zależy, przeto zależność tę przyjmuje na siebie odchylenie $\partial w/\partial y$. Największą wartość $\partial w/\partial y$ tego odchylenia znajdziemy tam, gdzie τ_x osiąga największą swą wartość $\tilde{\tau}_x$. Przeto według (19.11) i (20.11).

$$\frac{dv}{dz} + \frac{\partial w}{\partial y} = \tilde{\alpha} \frac{T}{GA}. \quad (22.11)$$

Na rys. 6.11 dla prostoty przyjęto odnośne miejsce w warstwie obojętnej $y = 0$. W miarę oddalania się w górę lub w dół od warstwy $\tau_x = \tilde{\tau}_x$, odkształcenie γ_x maleje, zachowując znak dodatni zgodnie z wykresem τ_x jak np. na rys. 3.11. Wobec tego przekrój ongiś płaski nie może takim pozostać. Obecność siły poprzecznej wypacza przeto przekrój w kształt wydłużonej li-

t e r y S. W warstwach skrajnych jest $\gamma_x = 0$. Tam więc wybrzuszony przekrój przecina się ortogonalnie z podłużnymi ograniczeniami pręta.

Wykazane wypaczenie w imitowanej przez nas w przybliżony sposób teorii de Saint-Venanta nie stanowi teoretycznego kłopotu, ale tylko t e o r e t y c z n e g o. Tamże bowiem - jak to wyraźnie w stosowanym miejscu zaznaczyliśmy - przyjmuje się, że przekrój końcowy pręta zamocowuje się czy to do układu podpierającego, czy do dalszej, odmiennie obciążonej części pręta w j e d n y m t y l k o p u n k c i e. Nie ma więc istotnie trudności w uzgodnieniu ze sobą w określonym takim punkcie przynależnej lewej i prawej normalnej, a tym samym w ustaleniu tam przynależnych $\partial w / \partial y$. W rzeczywistości zamocowujemy przekrój końcowy nie jednym punktem, lecz większą ich liczbą, z reguły całą krzywą, jak np. przy spawaniu lub w ogóle całym polem przekroju. Podobnie przekrój pośredniczący między lewą i prawą częścią pręta, a więc między dwiema odmiennie obciążonymi częściami tego samego pręta, wszystkimi swymi punktami należy zarówno do lewej jak i do prawej części tego układu. W tych warunkach zaś złączenie prostej z krzywą esowatą, czy złączenie dwóch takich esowatych linii - zwłaszcza, gdy są one względem siebie obrócone - jest geometrycznie niemożliwe. Czy więc w matematycznie ścisłej teorii francuskiego klasyka, czy w naszym rozwiązaniu przybliżonym zachodzi każdorazowo potrzeba skorygowania tego rozwiązania pod względem geometrycznym. Pociąga to za sobą również lokalną zmianę w rozwiązaniu statycznym. Próby takie zostały w szczególności prostych wypadkach w teorii spężytości przeprowadzone. Wiemy, że kosztują one bardzo wiele trudu i nie są dostatecznie ogólne.

Potrzeby praktyki nasuwają następującą, dostatecznie ogólną koncepcję. Przyjmijmy w miejsce przekroju wypaczonego przekrój p ł a s k i. Zrobić to musimy tak, by stosownie wyrównać tamten, tj. tak, by część wybrzuzenia leżała po jednej, część po drugiej wypośrodkowanego przekroju płaskiego. Wtedy będziemy dla niego mogli napisać:

$$\frac{\partial w_*}{\partial y} = \frac{dw_*}{dy} = w_*'$$

Znak * będzie nam przypominał, że chodzi o przekrój zamienny; znak ' w odróżnieniu od ' oznacza tu pochodną pseylonową. W miejsce szczególnego wzoru (22.11) napiszemy obecnie:

$$v' + w_*' = \frac{dv}{dz} + \frac{dw_*}{dy} = \alpha^* \frac{T}{GA}, \quad \alpha^* < \bar{\alpha}. \quad (23.11)$$

W tym wzorze lewa strona ma wyjaśnione wyżej szczegółowe znaczenie. Na stronie prawej współczynnik α^* jest niewiadomy. Wiemy na razie tylko, że jest on mniejszy od znanego nam bliżej $\bar{\alpha}$. Znajdziemy go za chwilę.

W tym miejscu dodatkowo jeszcze zauważmy, że gdybyśmy chcieli równanie typu (23.11) ustawić dla wpływu momentu zginającego M , to miałyby ono postać

$$\frac{dv}{dz} + \frac{dw_*}{dy} = 0,$$

albowiem moment zakrzywiając oś, tzn. powodując dv/dz , ustawia do niej przekroje normalnie, tzn. czyni $dw_*/dy = - dv/dz$. Różnicę znaków wyjaśnia różnica kierunków pomiaru obu kątów. Oczywiście znak * jest dla wyrażenia wpływu M zbędny, albowiem wpływ ten pozostawia zawsze przekrój płaskim. Z tego dodatkowego rozważania wynika, że w lewej stronie równania (23.11) możemy widzieć sumaryczny wpływ zginania i ścinania, bo dodanie zera na prawej stronie niczego nie zmienia.

Wreszcie nader ważną jest jeszcze uwaga następująca: Wprowadzenie zastępczego przekroju płaskiego stanowi zasadniczy zwrot w obliczeniu. Jest ono ucieczką od rozwiązania klasycznego do innego bardziej praktycznego, które z pewnych powodów nazwiemy *enfergetycznym*.

Zajmijmy się jeszcze rolą γ_y . Na rys. 6.11 dla prostoty przyjęto przekrój symetryczny względem osi y . Wtedy płaszczyzna yz dzieli pręt na dwie symetryczne części. Naprężenie τ_y zmienia w tej płaszczyźnie znak; gdy po lewej stronie jest dodatnie, po prawej jest ujemne i na odwrót. Wobec tego zgodnie z (20.11) zmienia również znak γ_y . Dla zachowania nierozdzielności warstwy równoległe do płaszczyzny yz muszą być nadal do siebie równoległe. W przypadku więc chwilowo założonego przekroju symetrycznego jest $\frac{\partial u}{\partial z} = 0$, a zależność γ_y od x przenosi się w całości na $\frac{\partial w}{\partial x}$. Naprężenie τ_y jest w takim wypadku proporcjonalne względem x ; taki jest zatem $\frac{\partial w}{\partial x}$. Jego największą wartość $\frac{\partial w}{\partial x}$ znajdziemy na brzegu szerokości przekroju. Równoległy do osi x odcinek, określający lokalną szerokość w tym miejscu przekroju, odkształci się więc w parabolę drugiego stopnia. Algebraiczna wartość parametru tej paraboli zależy od zmiennej y . Zobaczymy przeto pewną część przekroju wypaczoną ku patrzącemu i pozostałą wypaczoną od patrzącego. Zatem obecność siły poprzecznej powoduje, poza poprzednim wypaczeniem w esowatą powierzchnię walcową, jeszcze drugie wybrzuszenie w powierzchni niewalcową.

Postanowiliśmy jednak użyć przekroju wypośredkowanego płaskiego. Znaczący to, że w wypadku przekroju symetrycznego względem osi y musimy przyjąć średnią wzdłuż x z pochodnej $\frac{\partial w}{\partial x}$ o wartości $\frac{\partial w}{\partial x} = 0$. Jednocześnie zaś widzimy, że na współczynnik α^x , figurujący we wzorze (23.11), wpływa nie tylko γ_x , lecz również γ_y , zatem τ_x i τ_y .

Gdy symetrii przekroju nie ma, miejscem $\gamma_y = 0$ nie jest połowa szerokości. Zależne ono jest też od y . W rezultacie nie mamy podstaw do założenia zerowej wartości dla sumy $\frac{\partial u}{\partial z}$. Jednakże nierozdzielność warstw

ogniś równoległych do płaszczyzny yz wymaga, by były one nadal do siebie równoległe. Wyraża to tekst:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{du}{dz} = u'.$$

Zatem w wypadku przekroju dowolnej konfiguracji obecność siły T , działającej w kierunku y , wywołuje nie tylko posunięcie v' w tym kierunku, lecz nadal to posunięcie u' w kierunku prostopadłym x . Na to dodatkowe posunięcie nie ma żadnego wpływu moment M . Ponieważ zaś siła T jest w rozważanym podstawowym przypadku stała, takimże jest też u' . Założona płaskość przekroju wymaga jeszcze określenia $\frac{\partial w_*}{\partial x}$. Średnia ta w omawianym wypadku musi być stała na całej długości pręta, bo stałą jest siła T . Wymaga tego jednak również nierozdzielność układu. Gdy przekrój początkowy jest zamocowany, mamy tam $\frac{\partial w_*}{\partial x} = 0$; wobec tego taka jest ta wielkość na całej długości układu. Gdy przekrój początkowy jest podparty, to przynajmniej podparty musi być także przekrój końcowy. W dyskutowanym przypadku podstawowym obciążenie układu stanowi wtedy siła skupiona. Łatwo wówczas wykazać, że założenie wspólnej wartości $\frac{\partial w_*}{\partial x}$ dla lewej i prawej części pręta prowadzi znów do zerowego dla niej rezultatu. Proste równoległe ogniś do osi x pozostają takimi i po odkształceniu. Uprzedzając wypadki już wcześniej dla wypadku $T = T_y$, zmieniliśmy symbolikę $\frac{\partial w_*}{\partial y}$ na $\frac{dw_*}{dy}$. Obecnie zaś nawiązując do (21.11) i (20.11) a również i (19.11) dodajemy:

$$\frac{\partial w_*}{\partial x} = 0, \quad u' = \frac{du}{dz} = \beta^* \frac{T}{GA}, \quad (24.11)$$

gdzie β^* jest chwilowo nieznanym współczynnikiem różnym całkowicie od $\bar{\beta}$.

Użycie średnio płaskiego przekroju pozostawia po sobie pewien znamienny ślad, czemu daliśmy wyraz w ostatniej części rys. 6.11. Niech na pręcie umieszczona będzie w punkcie O siła skupiona P . Naciągłość siły poprzecznej przy przejściu od lewej do prawej części układu w tym miejscu wyraża równanie:

$$T_p - T_l = -P, \quad (25.11)$$

Równanie (23.11) przyjmuje tu podwójną postać:

$$v'_l + w'_{*l} = \alpha^* \frac{T_l}{GA}, \quad v'_p + w'_{*p} = \alpha^* \frac{T_p}{GA},$$

lecz warunek nierozdzielności brzmi: $w'_{*1} = w'_{*p} = w'_*$. Rugując przeto z powyższych równań w'_* i stosując (25.11) znajdziemy

$$v'_p - v'_1 = -\alpha^* \frac{P}{GA} \quad (26.11)$$

Oś pręta w miejscu działania obciążenia skupionego doznaje małego z a ł a m a n i a $v'_p - v'_1$. Nie należy źle rozumieć powyżej stwierdzonego faktu. Załamania takiego w istocie nie ma. Założenie wypórodkowanego płaskiego przekroju zmusza jednak do takiego traktowania rzeczy j a k g d y b y owo załamanie istniało. Pominięcie wpływu siły poprzecznej jest zgodne - jak już wiemy - z przyjęciem $\alpha^* = 0$. Zatem - o czym też już była mowa - założenie nierozdzielności z uwzględnieniem tylko działania momentu, a to w postaci $w'_{*1} = w'_{*p}$ prowadzi do wniosku $v'_1 = v'_p$.

Gdybyśmy, zatrzymując $\frac{\partial w_*}{\partial x} \neq 0$, przeprowadzili dla dwumianów $\frac{du}{dz} + \frac{\partial w_*}{\partial x} = \beta^* \frac{T}{GA}$ obliczenie podobne do powyższego z zapewnieniem nierozdzielności warunkiem $(\frac{\partial w_*}{\partial x})_1 = (\frac{\partial w_*}{\partial x})_p$ jak i drugim $u_1 = u_p$, otrzymalibyśmy rezultat $\frac{\partial w_*}{\partial x} = 0$, a ponadto równanie

$$u'_p = u'_1 = -\beta^* \frac{P}{GA} \quad (27.11)$$

pouczające o drobnym załamaniu osi również w płaszczyźnie xz.

Należy wreszcie zwrócić uwagę na b a r d z o w a ż n y szczegół. W rozważaniach dotyczących geometrycznej strony omawianego zadania czyniliśmy użytek z tego, że istnieją formuły (16.11) i (17.11) określające zależność τ_x tylko od y i zależność τ_y od y a nadto od x. Wzięliśmy również pod uwagę fakt, że siły elementarne $\tau_x dA$ i $\tau_y dA$ mają wypadkową równoległą do osi y. Natomiast - co podkreślamy z naciskiem - nie zaszcza nigdzie potrzeba stwierdzenia faktu (12.11). W naszym rozważaniu geometrycznym n i c się przeto nie zmieni, gdy fakt powyższy n i e b ę d z i e mieć miejsca, gdy więc równoległa do osi y siła T nie będzie s i ł ą p o p r z e c z n ą, lecz np. m i m o p o p r z e c z n ą. Do wniosku tego niebawem wrócimy.

Chcemy obecnie obliczyć energię sprężystości nagromadzoną w pomyślanej jednostce długości pręta. Oczywiście mamy na myśli tylko uzupełnienie wielkości (6.11), więc energię samego ścinania, tj. wielkości:

$$W' = \frac{1}{2G} \int (\tau_x^2 + \tau_y^2) dA, \quad (28.11)$$

w której τ_x, τ_y oznaczają wzory (16.11) i (17.11). Położmy w tym celu $dA = dx dy$ i wykonajmy całkowanie względem x . Zważywszy, iż według (9.11) jest $x_p = x_* - x_0, x_1 = x_* + x_0$, mamy:

$$\int_{x_p}^{x_1} dx = 2x_0 \int_{x_p}^{x_1} x dx = 2x_0 x_* \int_{x_p}^{x_1} x^2 dx = 2x_0 (x_0^2/3 + x_*^2).$$

Uwzględniając powyższe w (28.11) z łatwością znajdziemy

$$W' = \frac{T^2 F}{2GI^2}, \quad (29.11)$$

gdzie wyrażenie

$$F_x = F = \int_{-d_1}^{+d_2} \frac{U^2}{2x_0} \left(1 + \frac{1}{3} \left(\frac{dx_0}{dy} \right)^2 + \left(\frac{dx_*}{dy} \right)^2 \right) dy \quad (30.11)$$

dymenzji długości w szóstej potędze jest nową wielkością charakteryzującą przekrój pod względem geometrycznym.

Znajomość wielkości F jest - jak widzimy - identyczna ze znajomością energii W' . Tę ostatnią możemy z kolei wykorzystać do wyznaczenia współczynników posunięć. Ponieważ skutki geometryczne są tu proporcjonalne do przyczyn statycznych, przeto - jak to uczyniliśmy w punkcie trzecim, piątym i następnym - możemy energię W' obliczyć też jako szczególnie pomyślaną pracę tych przyczyn na odnośnych skutkach. Weźmy pod uwagę elementarną długość pręta dz . Na przekroje ograniczające działają siły T T tudzież momenty M $M + dM$. Owa szczególna praca sił wynosi $\frac{1}{2} T(v+dv) - \frac{1}{2} Tv$, praca zaś momentów $\frac{1}{2}(M+dM) \cdot w_* - \frac{1}{2} M w_*$. Nota bene mamy tu na myśli tylko tę część skutków geometrycznych, które przypisaliśmy w formule (23.11) obecności siły poprzecznej. Praca przynależna długości dz , czyli energia elementarna dW wynosi więc:

$$\frac{1}{2} T dv + \frac{1}{2} dM w_*.$$

Dzieląc przez dz i bacząc na związek $dM/dz = T$ jak i na (23.11) znajdziemy w trzech wariantach:

$$W' = \frac{1}{2} T (v' + w_*') = \frac{\alpha_* T^2}{2 GA} = \frac{1}{2\alpha_*} GA (v' + w_*')^2. \quad (31.11)$$

Warto zwrócić uwagę, że w tej poprawnej postaci (31.11) jest w literaturze nieznane. Porównajmy (31.11) z (29.11). Znajdziemy stąd niemianowany, dotychczas nieznany nam współczynnik

$$\alpha^* = \frac{AF}{I^2}, \quad (32.11)$$

gdzie F określa (30.11).

Dołączając do (31.11) energię (6.11) otrzymamy energię całkowitą. Ważne jest pamiętać znów o tym, że założenie $H = 0$ było zbędne przy ostatnich dowodzeniach. Gdy więc $H = 0$, (29.11) i (31.11) przedstawiają energię ścinania. Gdy zaś $H \neq 0$ relacje powyższe przedstawiają energię pewnego szczególnego mimościnnania, a mianowicie takiego, które w skutkach geometrycznych prowadzi do posunięcia v' i odchylenia w'_* . Ponieważ to ostatnie jest też posunięciem, przeto przy $H \neq 0$ będziemy powyższe W' nazywać energią posunięcia. Współczynnik α^* znaleźliśmy metodą energetyczną. Konieczne tu było założenie, że zbiorowej przyczynie, jaką jest T , odpowiada również uogólniony skutek, jakim jest $u' + w'_*$. Jest on nim, albowiem $u' + w'_*$ charakteryzuje zachowanie się nie pewnego miejsca przekroju, lecz całego przekroju.

Niestety postępowanie powyższe nie doprowadziło do znalezienia drugiego współczynnika, tj. β^* . Stało się tak dlatego, że odnośnemu przemieszczeniu nie towarzyszy na jego kierunku żadna przyczyna i wskutek tego odnośna praca względnie energia jest równa zeru. Będziemy usiłowali wobec tego tę przyczynę stworzyć.

Chcemy sobie wyobrazić, że na przekrój prócz siły T_y , równoległej do osi y i tak umiejscowionej, że w skutkach odpowiada jej posunięcia typu (23.11) i (24.11), działa nadto siła T_x , równoległa do osi x i tak umiejscowiona, że w skutkach odpowiada jej analogiczne do tamtych posunięcia. Gdy te pierwsze oznaczymy przez

$$v'_y + w'_{*y} = \alpha^* \frac{T_y}{GA}, \quad u'_y = \beta^* \frac{T_y}{GA}, \quad (33.11)$$

drugim nadamy analogiczną postać

$$u'_x + w'_{*x} = \alpha^* \frac{T_x}{GA}, \quad v'_x = \beta^* \frac{T_x}{GA}. \quad (34.11)$$

Zatem w pierwszym wierszu wprowadziliśmy w dotychczasowe znane nam oznaczenia wskaźnik y , oznaczający, że wypisane skutki pochodzą od siły T_y ; analogicznie w drugi wprowadziliśmy wobec tego dla odróżnienia wskaźnik x . Nota bene wskaźniki te przy w oznaczają też zmienną, według której utwo-

rzono pochodną w_* . Wreszcie przy β^* dopisano w obu wierszach - uprzedzając wypadki - ten sam znaczek dodatkowy z. Naprężenie τ pochodzące od T_y są τ_{xy} i τ_{yy} , te zaś od T_x są τ_{yx} i τ_{xx} . Wobec tego przy jednoczesnej obecności obu sił naprężenia te wynoszą:

$$\tau_x = \tau_{xy} + \tau_{xx}, \quad \tau_y = \tau_{yx} + \tau_{yy}.$$

Gdy obecnie zechcemy obliczyć energię W' tego nowego, ogólniejszego zagadnienia trzeba będzie według (28.11) utworzyć sumę kwadratów obu powyższych dwumianów. Jest nam wiadomo, że rezultat całkowania sumy $\tau_{xy}^2 + \tau_{yy}^2$ prowadzi według (29.11) do dodajnika energetycznego $\frac{T_y^2 F_x}{2GI_x^2}$. Analogicznie, całkowanie sumy $\tau_{yx}^2 + \tau_{xx}^2$ doprowadzi do dodajnika $\frac{T_x^2 F_y}{2GI_y^2}$, gdzie w analogii do (30.11) jest:

$$F_y = \int_{-c_1}^{+c_2} \frac{U^2}{2y_0} \left(1 + \frac{1}{3} \left(\frac{dy_0}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dy_*}{dx} \right)^2 \right) dx \quad (35.11)$$

ze znaczeniami c , y_0 , y_* , U_y analogicznymi do poprzednich d , x_0 , x_* , U_x . Wzór powyższy daje nam możliwość obliczenia drugiego współczynnika α^* . Ze wspomnianego kwadratowania pozostaje do scałkowania jeszcze suma $2(\tau_{xy}\tau_{xx} + \tau_{yx}\tau_{yy})$, zawierająca mieszany wpływ jednoczesnych przyczyn T_y i T_x . Odnosna część W' - jak łatwo się przekonać stosując wzory (16.11), (17.11) i ich odpowiedniki - ma postać $W'_{xy} = \frac{G_z T_x T_y}{G I_x I_y}$, w której parametr G_z przekroju o wymiarach zgodnej z F_x i F_y oznacza:

$$G_z = \int \frac{U_x U_y}{4x_0 y_0} \left(\frac{x-x_*}{x_0} \frac{dx_0}{dy} + \frac{dx_*}{dy} + \frac{y-y_*}{y_0} \frac{dy_0}{dx} + \frac{dy_*}{dx} \right) dA. \quad (36.11)$$

Ostatecznie przeto energia pochodząca od szczególnie umieszczonych sił T_x i T_y wynosi:

$$W' = \frac{T_x^2 F_x}{2GI_x^2} + \frac{T_y^2 F_y}{2GI_y^2} + \frac{T_x T_y G_z}{I_x I_y} \quad (37.11)$$

Przechodząc obecnie do wyznaczenia współczynnika $\beta^* = \beta^*_z$ zauważmy, co następuje. Obecność jednej tylko z sił np. T_x powoduje nieobecność dodajnika W'_{xy} . Pojawia się on dopiero wtedy, gdy pojawi się druga siła, więc

np. T_y . Wracając do określenia energii sprężystości jako szczególnej pracy, widzimy, że w_{xy} oznacza albo szczególną pracę siły T_x na n i e z a l e ż n y m

od niej przemieszczeniu, spowodowanym obecnością siły T_y , albo też odwrotnie - szczególną pracę siły T_y na n i e z a l e ż n y m

od niej posunięciu, pochodzącym od obecności siły T_x . Z powodu podkreślonej niezależności posunięcia od siły odpada charakterystyczny współczynnik $\frac{1}{2}$, którego obecność wyjaśnialiśmy szczegółowo w ustępie trzecim. Albo więc w'_{xy} jest równe $T_x u'_y$, albo też jest równe $T_y v'_x$. Gdy zaś w'_{xy} dysponuje jednym tylko parametrem G_z , użyliśmy - uprzedzając wypadki - czy to dla przedstawienia u'_y , czy też v'_x jednego i tego samego współczynnika β_z^* .

Wracając obecnie, po tej uogólniającej dygresji, do wypadku wyjściowego (24.11) napiszemy na wzór (32.11) ;

$$\beta^* = \frac{AG_z}{T_x T_y} \quad (38.11)$$

Relacja powyższa nie jest znana w literaturze. W ogóle przeoczony został fakt, iż siła $T = T_y$ odpowiada nie tylko posunięciu pylonowe lecz również iksowe. Stało się to prawdopodobnie z następujących powodów: Dodatnie parametry geometryczne F_x i F_y są zawsze różne od zera. Wystarcza natomiast symetria względem którejkolwiek ze środkowych głównych osi x, y , by znikło G_z . Istotnie, niech przekrój będzie symetryczny względem osi np. x , tj. niech będzie $y_* = 0$. Wtedy wszystkie niezerujące się dodajniki funkcji podcałkowej w wyrażeniu (36.11) są nieparzyste w zmiennej y . Całkując je przy ustalonym x względem y otrzymamy zero. Całkując z kolei tę zerową funkcję względem x otrzymamy ostatecznie $G_z = 0$. Ponieważ przekroje symetryczne są bardzo często stosowane, przeto możliwe jest, że stwierdzone dla nich $\beta^* = 0$ przyjęto za fakt natury ogólnej. Dodajmy jeszcze w tym miejscu, że parametry F_x, F_y, F_z nie mają zgoła nic wspólnego z wcześniej wprowadzonymi H_x, H_y . Wielkość H_x znika, gdy przekrój jest symetryczny względem osi y ; na odwrót H_y znika dla przekrojów symetrycznych względem osi x . Wykażemy w innym miejscu, że wielkości H_x, H_y ustalają w przekroju pewien szczególny punkt. Podobnie można wykazać, że wielkości F_x, F_y, G_z lub raczej $\alpha_y^*, \alpha_x^*, \beta_z^*$ wyznaczają (w tym szczególnym punkcie) pewne charakterystyczne kierunki.

Właśnie tymi kierunkami chcemy się jeszcze zająć. Przy jednoczesnym działaniu sił T_x i T_y posunięcia sumują się według (33.11) i (34.11), tj. wynoszą :

$$u' + w'_{*x} = \alpha_x^* \frac{T_x}{GA} + \beta_z^* \frac{T_y}{GA} \quad (39.11)$$

$$v' + w'_{*y} = \alpha_y^* \frac{T_y}{GA} + \beta_z^* \frac{T_x}{GA}$$

Nieco skomplikowane znakowanie znalazło już wcześniej wyjaśnienie. Znak $'$ oznacza pochodną zwyczajną względem zmiennej z . Znak $*$ zwraca naszą uwagę na fakt, że stosujemy zastępczy płaski przekrój. Wreszcie wobec jednoczesnej obecności sił T_x i T_y musimy dla w_* wprowadzić z powrotem pochodne cząstkowe w_{*x} ; dodatkowy wskaźnik dolny określa odnośną zmienną. Ponieważ suwy u' , v' , w_{*x}' , w_{*y}' są kątami, przeto wyobraźmy je sobie najprościej jako wektory. Wektor $u' + w_{*x}'$ leży na osi y , wektor zaś $v' + w_{*y}'$ na osi x . Zauważmy przy tym, iż u' tudzież w_{*y}' mierzone są zgodnie z dodatnim kierunkiem osi y względnie x , zaś v' tudzież w_{*x}' niezgodnie z dodatnim kierunkiem osi x względnie y .

Przyjmijmy nowy układ współrzędnych \bar{x} , \bar{y} obrócony względem dotychczasowego x , y o kąt ω mierzony od osi x ku \bar{x} . Siła $T = \left| \sqrt{T_x^2 + T_y^2} \right|$ ma w nowym układzie składowe \bar{T}_x , \bar{T}_y . Zachodzą oczywiście związki:

$$T_x = \bar{T}_x \cos \omega - \bar{T}_y \sin \omega, \quad T_y = \bar{T}_x \sin \omega + \bar{T}_y \cos \omega, \quad (40.11)$$

Podobnie wiążą się posunięcia nowe ze starymi. Pamiętając o uwadze dotyczącej znaków tych wielkości, znajdziemy:

$$\bar{u}' + \bar{w}_{*x}' = (u' + w_{*x}') \cos \omega + (v' + w_{*y}') \sin \omega, \quad (41.11)$$

$$\bar{v}' + \bar{w}_{*y}' = -(u' + w_{*x}') \sin \omega + (v' + w_{*y}') \cos \omega.$$

Chcemy nowe posunięcia wyrazić przy pomocy nowych składowych. W tym celu wstawmy (40.11) w (39.11), a tak zreformowane (39.11) w (41.11). Znajdziemy po uporządkowaniu względem \bar{T}_x i \bar{T}_y poszukiwane związki w postaci:

$$\bar{u}' + \bar{w}_{*x}' = \bar{\alpha}_x^* \frac{\bar{T}_x}{GA} + \bar{\beta}_z^* \frac{\bar{T}_y}{GA}, \quad (42.11)$$

$$\bar{v}' + \bar{w}_{*y}' = \bar{\alpha}_y^* \frac{\bar{T}_y}{GA} + \bar{\beta}_z^* \frac{\bar{T}_x}{GA}.$$

analogicznej do dawnej (39.11) z oznaczeniami:

$$\bar{\alpha}_x^* = \alpha_x^* \cos^2 \omega + \alpha_y^* \sin^2 \omega + 2\beta_z^* \sin \omega \cos \omega,$$

$$\bar{\alpha}_y^* = \alpha_x^* \sin^2 \omega + \alpha_y^* \cos^2 \omega - 2\beta_z^* \sin \omega \cos \omega,$$

$$\bar{\beta}_z^* = -(\alpha_x^* - \alpha_y^*) \sin \omega \cos \omega + \beta_z^* (\cos^2 \omega - \sin^2 \omega).$$

Ostatnie relacje możemy też napisać w formie,

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_x^* &= \frac{1}{2}(\alpha_x^* + \alpha_y^*) \pm \frac{1}{2}(\alpha_x^* - \alpha_y^*) \cos 2\omega \pm \beta_z^* \sin 2\omega, \\ \bar{\beta}_z &= -\frac{1}{2}(\alpha_x^* - \alpha_y^*) \sin 2\omega + \beta_z^* \cos 2\omega, \end{aligned} \quad (43.11)$$

doskonale nam znanej z ustępu pierwszego i drugiego. Po prostu widzimy, że α_x^* , α_y^* , β_z^* przekształcają się dokładnie tak, jak np. naprężenia σ_x , σ_y , τ_z . Istnieją więc w płaszczyźnie xy główne kierunki posunięć. Określają je kąty wyznaczalne z relacji:

$$\operatorname{tg} 2\omega_0 = \frac{2\beta_z^*}{\alpha_x^* - \alpha_y^*}, \quad (44.11)$$

więc $\omega_1 = \omega_0$ i $\omega_2 = \omega_0 + \pi/2$. Gdy na przekrój działać będzie styczna siła T_1 w kierunku głównym 1, znajdziemy, że wywoła ona sumy t y l k o dokoła osi 2 o wartości $\alpha_1^* \frac{T_1}{GA}$. Podobnie siła T_2 o kierunku 2 wywoła sumy t y l k o dokoła osi 1 o wartości $\alpha_2^* \frac{T_2}{GA}$. Boczny efekt znika tu, albowiem przynależne β^* wynosi zero. Współczynniki główne wynoszą:

$$\alpha_1^* = \frac{1}{2}(\alpha_x^* + \alpha_y^*) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\alpha_x^* - \alpha_y^*)^2 + 4\beta_z^{*2}}. \quad (45.11)$$

Nie ma oczywiście sensu wprowadzać głównych kierunków posunięć jako osi odniesienia dla każdego zagadnienia z dziedziny prętów prostych. Mieliśmy sposobność zauważyć, że droga prowadząca do nich nie jest prosta - mimo tego, że rozważania nasze obarczone są przybliżeniem. Bez porównania szybciej wyznacza się główne kierunki ukształtowania. Nie można zresztą zagadnienia oszukać. Gdybyśmy nierozważnie wyznaczone kierunki ω_1 , ω_2 przyjęli za kierunki odniesienia, to wprawdzie przyczynom oddzielnym T_1 , T_2 odpowiadałyby oddzielne pojedyncze skutki, jednak oddzielnym momentom M_1 , M_2 przynależałyby podwójne zakrzywienia. Polepszając więc sytuację matematyczną w jednym względzie, pogorszylibyśmy ją w pozostałych innych. Aby kłopotów uniknąć, najprościej jest zdać sobie sprawę z omówionego tu zjawiska i kształtować przekrój tak, by główne kierunki posunięć były zgodne z głównymi kierunkami ukształtowania. Można to osiągnąć, czyniąc β_z^* w układzie x, y zerem. Najprościej wystarczy stosować przekroje posiadające choćby jedną oś symetrii.

Przykład 5.11. Znaleźć α^* dla przekroju prostokątnego.

Odpowiedź 5.11. Wobec $x_* = 0$, $x_0 = b/2$ mamy według (30.11) $F = \int_{-h/2}^{+h/2} \frac{U^2}{b} dy$.

Wstawiając U z przykładu 1.11 otrzymamy $F = \frac{bh^5}{120}$, zatem według (32.11) $\alpha^* = \frac{6}{5}$, gdzie $\tilde{\alpha}$ w formule (22.11) jest dla prostokąta równe $\tilde{\alpha} = \frac{3}{2}$. Zatem $\alpha^* = \frac{4}{5} \tilde{\alpha} < \tilde{\alpha}$.

Przykład 6.11. Wyznaczyć α^* dla przekroju kołowego.

Odpowiedź 6.11. Wyzyksując dane przykładu 3.11 mamy:

$$F = \frac{2}{27} \int_{-r}^{+r} (r^2 - y^2)(3r^2 - 2y^2) \sqrt{r^2 - y^2} dy.$$

Po podstawieniu $y = r \sin \varphi$ jest $F = \frac{2r^6}{27} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} (\cos^4 \varphi + 2\cos^6 \varphi) d\varphi = \frac{2r^6 \pi}{27}$.

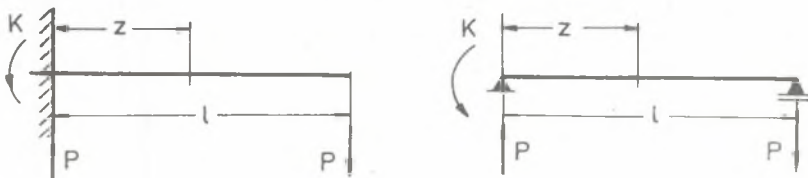
Wobec tego jest $\alpha^* = \frac{32}{27}$ gdy $\tilde{\alpha} = \frac{4}{3}$, więc $\alpha^* = \frac{8}{9} \tilde{\alpha} < \tilde{\alpha}$.

Przykład 7.11. Wyznaczyć zakrzywioną oś pręta obciążonego siłą P jak na lewej stronie rys. 7.11.

Odpowiedź 7.11. W dowolnym przekroju z jest $T = P$, $M = -K + Pz$ gdzie $K = Pl$. Równanie (3.11) przybiera postać $v' = \frac{1}{EI} (K - Pz)$. Całki tego równania są $v' = \frac{1}{2EI} (2Kz - Pz^2) + C$, $v = \frac{1}{6EI} (3Kz^2 - Pz^3) + Cz + D$. Jeden z warunków brzegowych wymaga $v = 0$ dla $z = 0$, skąd wynika $D = 0$. Przy zamocowaniu do sztywnej pionowej ściany drugi warunek brzmi $w_* = 0$, czyli wobec (23.11) $v' = \frac{\alpha^* P}{GA}$ dla $z = 0$, skąd $C = \frac{\alpha^* P}{GA}$. Wobec tego rozwiązanie brzmi:

$$v' = \frac{1}{2EI} (2Kz - Pz^2) + \frac{\alpha^* P}{GA}, \quad v = \frac{1}{6EI} (3Kz^2 - Pz^3) + \frac{\alpha^* P}{GA} z.$$

W szczególności dla $z = 0$ jest $v' = \frac{\alpha^* P}{GA}$, $w_* = 0$, $v = 0$, dla $z = l$ jest $v' = \frac{Pl^2}{2EI} + \frac{\alpha^* P}{GA}$, $w_* = -\frac{Pl^2}{2EI}$, $v = \frac{Pl^3}{3EI} + \frac{\alpha^* Pl}{GA}$. Przeto wpływ siły y



Rys. 7.11

poprzecznej ujawnia się w nachyleniu v zakrzywionej osi. Natomiast przekroje pręta zachowują nachylenie w_* takie samo jak przy pominięciu obecności siły poprzecznej a uwzględnieniu jedynie obecności momentu zginającego g .

Przykład 8.11. Wyznaczyć osi zakrzywioną pręta obciążonego momentem K jak w prawej części rys. 7.11.

Odpowiedź 8.11. Rzecz powtarza się najpierw dokładnie jak w przykładzie 7.11. Stała $D = 0$, lecz stałą C wyznaczyć trzeba z warunku $v = 0$ dla $z = l$, skąd $C = -\frac{Kl}{3EI}$. Wobec tego jest $v' = \frac{1}{6EI} (6Kz - 3Pz^2 - 2Kl)$, $v = \frac{1}{6EI} (3Kz^2 - Pz^3 - 2Klz)$. W szczególności dla $z = 0$ jest $v' = -\frac{Kl}{3EI}$,

$$w_* = \frac{Kl}{3EI} + \frac{\alpha_* P}{GA}, \quad v = 0, \quad \text{dla } z = l \text{ jest } v' = \frac{Kl}{6EI}, \quad w_* = -\frac{Kl}{6EI} + \frac{\alpha_* P}{GA}, \quad v = 0.$$

Przeto tutaj wpływ siły poprzecznej nie ujawnia się w nachyleniu v' zakrzywionej osi. Natomiast uwidacznia się on w nachyleniu w_* przekrojów. Uwzględniając przeto siłę poprzeczną należy - jak to czynią wszystkie znane u nas i za granicą podręczniki - ograniczać się do zbadania jej roli w wielkości v' ; trzeba mieć na uwadze również w_* .

Przechodzimy do bardzo ważnego uzupełnienia dotychczasowych rozważań. Gdy - jak w naszym temacie zasadniczym - siła T jest równoległa do osi y , rozwiązanie (16.11) jest niezależne od zmiennej x - i takie w konsekwencji jest rozwiązanie (23.11) i uzupełniające je (24.11). Niezależność posunięć od zmiennej x dowodzi, że umieszczone w przekroju proste równoległe do osi x pozostają takimi po odkształceniu. Jeszcze inaczej mówiąc, przekrój nie doznaje obrotu względnego, czyli - jak go nazwaliśmy - owinięcia dokoła osi z . Pochopnie wnosząc nikt się tego rodzaju efektu nie spodziewał. Już jednak Bach, zginając nierównomiernie pręty nie posiadające przekroju symetrycznego względem osi głównej y , stwierdzał fakt owijania się przekrojów dokoła prostej równoległej względem osi pręta. Zjawisko to znajduje proste uzasadnienie rachunkowe, jakkolwiek faktem jest, że przez wielu poważnych autorów obcych i krajowych nie jest ono zrozumiane. Poświęcimy mu wobec tego chwilę uwagi.

Rozwiązanie (16.11) i (17.11) - podkreślamy jeszcze raz - prowadzi zawsze do rezultatów (23.11) i (24.11). Weryfikuje ono też zawsze dwa pierwsze z warunków (18.11), ale nie zawsze trzeci z tych warunków. Inaczej mówiąc rozwiązanie (16.11) i (17.11) gwarantuje nam zawsze rezultat:

$$\dot{\vartheta} = 0, \quad H \neq 0, \quad (46.11)$$

tj. nieobecność owinięcia bez względu na to, czy trzeci z warunków redukcji jest lub nie jest spełniony. Gdy $H = 0$, sprawa nie wymaga dalszego naświetlania. Trzeci warunek redukcyjny jest spełniony, czyli mamy przed sobą istotnie przypadek nierównomiernego zginania, w którym T jest siłą poprzeczną, więc przechodzącą przez środek przekroju. Gdy zaś taki właśnie tytuł nosi obecny ustęp, jasne się staje wstępne nasze zastrzeżenie (12.11). Gdy jednak jest $H \neq 0$, to rozwiązanie (16.11) i (17.11) prowadzi do momentu skręcającego o szczególnej wartości

$$N = \frac{TH}{I},$$

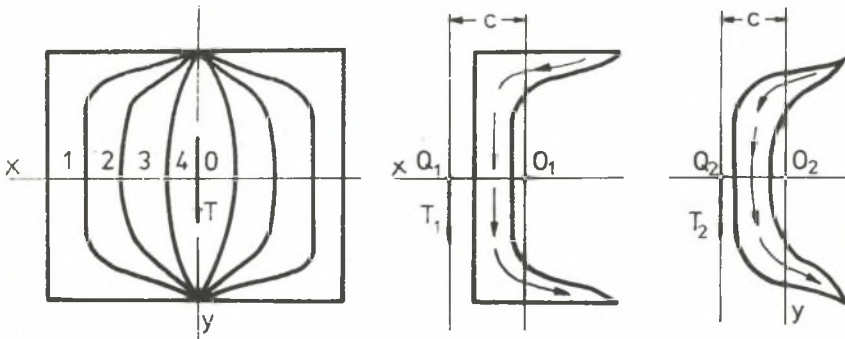
którą wykrywamy, weryfikując trzeci warunek redukcyjny. Wiążąc ten rezultat z niedawnymi uwagami możemy im nadać następujące brzmienie. W prętach o przekrojach najdowolniej z tej postaci można uniknąć owinięcia \bar{v} , dołączając do zginania połączonego ze ściskaniem stosowne skręcanie, a zatem dołączając do siły poprzecznej $T = \frac{dM}{dz}$ moment skręcający N wyżej podanej wartości. Efekt powyższy jest rzeczywiście niezwykły. Przy istniejącym momencie skręcającym stwierdzamy brak owinięcia.

Dołączenie w płaszczyźnie xy siły T momentu TH/I jest najwidoczniej identyczne z umieszczeniem siły T w odległości H/I od środka przekroju. Uogólniając nasze rozważanie również na drugi kierunek przekroju widzimy, że owinięcia nie ma, gdy obie składowe, tj. siły T_y i T_x przechodzą przez szczególny punkt przekroju o współrzędnych

$$x = c = \frac{H_x}{T_x}, \quad y = d = \frac{H_y}{T_y}. \quad (47.11)$$

Punkt ten nazywamy **środkiem posunięć**, jego prostolinijne miejsce geometryczne osią przesunięć. Dla przekrojów o własności $H_x = H_y = 0$ punkt ten pokrywa się ze środkiem geometrycznym przekroju. Gdy siły T_x , T_y nie przechodzą przez ten punkt, przekrój doznaje owinięcia \bar{v} , przy czym najwidoczniej prosta $x = c$, $y = d$ staje się osią względnego obrotu. Zatem wspomniana w ustępie poprzednim oś owinięcia jest prostą identyczną z osią posunięć. Tylko rozwiązanie energetyczne prowadzi do zidentyfikowania obu tych osi. Na tym więc gruncie nie jest celowe stosowanie tego lub owego terminu. Możemy przeto punkt (c, d) nazwać **środkiem sztywności**, względnie omawianą prostą **osią sztywności**.

Fakt braku rozwinięcia ψ' przy różnym od zera momencie skręcającym jest wyjaśniany w literaturze niedorzecznie względnie w ogóle kwestionowany.

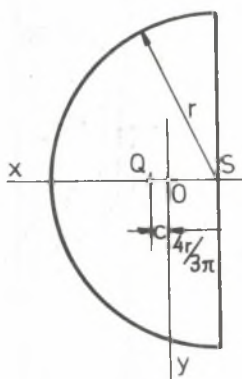


Rys. 8.11

Oto bardzo proste wyjaśnienie rzeczy. Wyobraźmy sobie przekrój symetryczny jak na rys. 8.11 i założmy, że znamy dla niego rozwiązanie pod każdym względem ściśle. Wykreślmy dla niego kilka trajektorii naprężenia stycznego. Dzielią one przekrój na części 1, 2, 3, 4. W każdym punkcie przekroju, a więc w każdym punkcie każdej części spełnione są warunki równowagi i warunki rozdzielności. W każdym punkcie trajektorii zgodnie z jej definicją składowa naprężenia stycznego w kierunku prostopadłym do trajektorii jest równa zero. Wobec tego powierzchnie walcowe o tworzących równoległych do osi z , których kierownicami są trajektorie, są wolne od obciążeń. Możemy więc wyodrębnić jako oddzielną całość pręt o przekroju 1, pręt o przekroju 2 itd., jak to pokazano na prawej części rys. 8.11. Pręt pierwotny z powodu symetrii przekroju nie doznaje oczywiście owinięcia ψ' . Wobec tego żadne z jego części również go nie doznaje. Zatem pręty 1, 2, ... nie doznają również tego efektu geometrycznego. Przepływ naprężenia stycznego dla części 1, 2 zaznaczono na rysunku. Najwyraźniej rzecz widać dla pręta 1. Wypadkowa siła T_1 wynosi τdA i jest równoległa do osi y . Powstała ona z siły wyraźnie pionowej i pary sił o składowych poziomych. Z prawideł redukcji wynika, że siła T_1 leży na zewnątrz przekroju, więc przechodzi przez punkt Q_1 . Środek przekroju O_1 jest wyraźnie niezgodny z tym punktem. Przeważa siła T_1 ma względem punktu O_1 miejscownik $T_1 c$. Miejscownik ten przedstawia wartość momentu skręcającego. Podaliśmy pręto przykład przekroju - wyglądem przypominający stosowany w konstrukcjach przekrój walcowany C , na który działa szczególnej wartości moment skręcający. Mimo obecności tego momentu przekrój nie doznaje owinięcia.

Przykład 9.11. Wyznaczyć środek sztywności dla przekroju utworzonego z połowy koła jak na rys. 9.11.

Odpowiedź 9.11. Mamy tutaj $x_p = -\frac{4r}{3\pi}$,



Rys. 9.11

$$x_1 = \sqrt{r^2 - y^2} - \frac{4r}{3\pi}, \quad x_0 = \frac{1}{2} \sqrt{r^2 - y^2},$$

$$x_* = \frac{1}{2} \sqrt{r^2 - y^2} - \frac{4r}{3\pi}, \quad A = \frac{r^2\pi}{2},$$

$$I = \frac{r^4\pi}{8}, \quad U = \frac{8}{3} x_0^3,$$

$$\tau_x = \frac{4}{3} \frac{T}{A} \left(1 - \frac{y^2}{r^2}\right),$$

$$\tau_y = -\frac{4}{3} \frac{T}{A} \frac{y}{r} \left(\frac{x}{r} + \frac{4}{3\pi}\right),$$

$$H = \frac{8}{3} \int_{-r}^{+r} \left(\frac{r^2 x_0^2}{4} - \frac{4rx_0^3}{3\pi} \right) dy = \frac{r^5}{18}.$$

Wobec czego $c = \frac{H}{T} = \frac{4r}{9\pi} = \frac{1}{3} \frac{4r}{3\pi}$, a z powodu symetrii $d = 0$. Zatem środek sztywności Q oddalony jest od środka geometrycznego O o trzecią część oddalenia tego ostatniego od środka S koła.

Przeprowadzone tu rozważanie stanowi dygresję od tematu zapowiedzianego tytułem tego podrozdziału. Istotnie też zastrzeżliśmy się przy wyprowadzaniu formuł (16.11) i (17.11), że w grę mogą wchodzić tylko przekroje o własności $H = 0$. Rozszeżając obecnie zakres rozważań możemy zapytać, jak postąpić, gdy przekrój powyższej własności nie posiada, a siła T przechodzi zgodnie z założeniem przez środek geometryczny przekroju. **Odpowiedź** jest po dotychczasowych naszych rozważaniach nader prosta. Ponieważ rozwiązanie nasze przy $H \neq 0$ włącza do działania M i T , ponadto jeszcze - czego nie chcemy - moment skręcający równy miejscownikowi sił T_y, T_x umieszczonych w środku sztywności względem środka geometrycznego, przeto wykluczając ten ostatni dołączymy do dotychczasowych rezultatów skutki działania momentu przeciwnego, tj. momentu skręcającego równego miejscownikowi sił T_x, T_y umieszczonych w środku przekroju względem środka sztywności. Moment ten wynosi więc:

$$N = T_x d - T_y c, \quad (48.11)$$

przy czym współrzędne c, d określa relacja (47.11). Posługując się nadal zastępczym płaskim przekrojem wiemy z poprzednie-

go ustępu, że do skutków geometrycznych (23.11) i (24.11) lub ogólniej (39.11) dołączyć mamy na wzór (4.10) i dodatkowych uwag podrozdziału dziesiątego dodatkowo dodajniki:

$$u' = -\psi'(y - d), \quad v' = +\psi'(x - c), \quad w'_{*x} = 0, \quad w'_{*y} = 0, \quad (49.11)$$

gdzie według (10.10) jest:

$$\psi' = \frac{N}{GJ}. \quad (50.11)$$

Gdy dokładne wyrażenie (25.10) dla J nie jest nam znane, użyć możemy przybliżonego (35.10) względnie zastosować postępowanie jak w przykładzie 7.10. Gdy dokładne wartości naprężeń (24.10) względnie (32.10)

$$\tau_y = \frac{\partial \Omega}{\partial y}, \quad \tau_x = -\frac{\partial \Omega}{\partial x} \quad (51.11)$$

nie są nam znane, możemy do tych ostatnich zastosować postępowanie jak w przykładzie 6.10. Naprężenia (51.11) dołączyć mamy do naprężeń (16.11) i (17.11) względnie ich rozszerzonych postaci $\tau_{xy} + \tau_{xx}$ i $\tau_{yx} + \tau_{yy}$. Dołączenie to spowoduje przy $N > 0$ odciążenie połówek $x < 0$ tudzież $y > 0$ przekroju i na odwrót dociążenie naprężeniami stycznymi połówek $x > 0$ tudzież $y < 0$ przekroju.

Ponieważ siły T_x, T_y przy obrocie ψ' nie wykonują pracy, zatem dodatkową energię sprężystości obliczyć możemy na wzór (20.10). Wynosi ona więc

$$W' = \frac{1}{2GJ} \left(T_x \frac{H_y}{I_y} - T_y \frac{H_x}{I_x} \right)^2. \quad (52.11)$$

Energia tę dołączyć należy do energii (37.11). W ten sposób rozszerzyliśmy nasze rozwiązanie na przypadki nierównomiernego zginania prętów o przekrojach $H \neq 0$. Widoczne jest, iż dla $H = 0$ wszystkie ostatnio podane korekty odpadają.

Uważamy sprawę gruntownego zaznajomienia się z teorią przypadków podstawowych za rzecz niezmiernie ważną. Z uwagi na to stanowisko zastanowimy się z kolei nad sprawą dokładności przedstawionego rozwiązania. Ponieważ w każdym punkcie układu warunki równowagi zostały spełnione, ponieważ zadość uczyniono warunkom brzegowym obciążenia, przeto wątpliwość budzić może spełnienie wymogów nierozdzielności.

Gdy chodzi o wpływ momentu zginającego, rzecz nie budzi wątpliwości. Naprężenie σ_z powoduje obecność zdlżu $\epsilon_z = \frac{M_x y}{EI_x}$, gwarantującego płaskość przekroju, nota bene przy jednoczesnej deformacji tego przekroju w jego płaszczyźnie określonej skrótami $\mu \epsilon_z$. Owa płaskość gwarantuje z kolei wy-

pełnienie układu zdeformowanego bez luk. Analogicznie jest przy zgięciu momentem M_y . Ogólnie możemy więc - pamiętając o właściwych znakach algebraicznych - napisać:

$$\epsilon_z = \frac{M_x y}{EI_x} - \frac{M_y x}{EI_y}, \quad \epsilon_x = \epsilon_y = -\mu \epsilon_z. \quad (53.11)$$

Gdy jednak chodzi o sprawę odkształceń poprzecznych, to ściśle rzecz biorąc jesteśmy pewni jedynie równości:

$$\gamma_z = 0, \quad (54.11)$$

wynikającej z założenia $\tau_z = 0$ dla wszelkich przypadków podstawowych. Co się zaś tyczy roli γ_x i γ_y , to rozważyliśmy ją oddzielnie dochodząc do tego, iż obecność każdej z tych wielkości wypacza w charakterystyczny sposób przekrój. Jednakże jedno wybrzuszenie wpływa na drugie i nie jesteśmy pewni, czy w przybliżonym traktowaniu rzeczy nie dopuściliśmy luk między elementami układu, a tym samym czy uczyniliśmy zadość warunkom nierozdzielności. Aby to zbadać, przypomnijmy sobie definicje:

$$\gamma_x = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \gamma_y = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \gamma_z = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

i odwórzmy wyrażenie

$$\frac{\partial \gamma_x}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_y}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -2 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = +2 \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial x}. \quad (55.11)$$

Lecz $\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, $\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$, co pozwala na drodze dalszego różniczkowania wykluczyć u , v , a to

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_x}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_y}{\partial y} \right) = -2 \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y \partial z}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_x}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_y}{\partial y} \right) = +2 \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial z \partial x}.$$

Wstawiając tu (53.11) i respektując $\frac{dM_x}{dz} = T_y$, $\frac{dM_y}{dz} = -T_x$ znajdziemy:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_x}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_y}{\partial y} \right) = + \frac{2\mu T_y}{EI_x}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_x}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_y}{\partial y} \right) = - \frac{2\mu T_x}{EI_y}.$$

Całkując te równania i uwzględniając zależności

$$G\gamma_x = \tau_x, \quad G\gamma_y = \tau_y, \quad 2(1 + \mu)G = E_j$$

znajdziemy:

$$\frac{\partial \tau_x}{\partial x} - \frac{\partial \tau_y}{\partial y} = \frac{\mu}{1+\mu} \left(\frac{T_y}{T_x} x - \frac{T_x}{T_y} y \right) + 2G\psi', \quad (56.11)$$

gdzie ψ' jest stałą całkowania. Że jest nią kąt owinięcia wiemy z poprzedniego podrozdziału. Istotnie, gdyby zachodził wypadek $T_x = T_y = 0$, naprężenia τ_x, τ_y mogłyby pochodzić co najwyżej od skręcania. Wtedy wstawiając w (56.11) wyrażenia (4.10) uzyskalibyśmy istotnie

$$\frac{\partial \gamma_x}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_y}{\partial y} = \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y} = 2\psi'.$$

Ponieważ owinięcie - jak nam wiadomo - nie jest przy nierównomiernym zginaniu mimo braku momentu skręcającego wykluczone, przeto w (56.11) zatrzymujemy $\psi' \neq 0$. Naprężenia τ_x, τ_y podwójnego ścinania powinny czynić w matematycznie ścisłym rozwiązaniu zadość równaniu (56.11).

Zbadamy, czy tak jest u nas istotnie. Ograniczając się dla prostoty do przypadku $T_y = T, T_x = 0$ wstawmy (16.11) i (17.11) i im odpowiadające $\psi' = 0$ w (56.11). Lecz τ_x jest funkcją jedynie y , wobec tego pierwszy dodatek odpada. Mamy więc zbadać pod jakimi warunkami równanie

$$-\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{U}{2x_0} \left(\frac{x - x_*}{x_0} \frac{dx_0}{dy} + \frac{dx_*}{dy} \right) \right) = \frac{\mu}{1+\mu}$$

spełni się i d e n t y c z n i e, co wymaga spełnienia warunkowego dwóch równań, a to

$$-\frac{d}{dy} \left(\frac{U}{2x_0} \frac{dx_0}{dy} \right) = \frac{\mu}{1+\mu}, \quad -\frac{d}{dy} \left(\frac{U}{2x_0} \left(\frac{-x_*}{x_0} \frac{dx_0}{dy} + \frac{dx_*}{dy} \right) \right) = 0 \quad (57.11)$$

Uważajmy w pierwszym z nich za niewiadomą funkcję U . Wtedy możemy napisać na podstawie (110.11)

$$U = - \int_{-d_1}^y 2x_0 \tilde{y} \, d\tilde{y}, \quad x_0 = -\frac{U}{2y}, \quad x_0' = \frac{U'}{2y^2} - \frac{U''}{2y}$$

przy czym dla prostoty znakiem $'$ oznaczono ypsilonową pochodną. Równanie to przybierze po powyższych podstawieniach postać:

$$\frac{d}{dy} \left(y \frac{UU''}{U^2} - \frac{U'}{U} \right) = \frac{\mu}{1+\mu}$$

lub po jednokrotnym scałkowaniu

$$y \, UU'' - UU' = \frac{\mu}{1+\mu} (y + D) U'^2,$$

gdzie D jest stałą całkowania. Jednorodność tego równania nasuwa przekształcenie

$$\ln U = \int \frac{dy}{Y}, \quad U = Y U^*, \quad U(1 - Y^*) = Y^2 U^{**},$$

które prowadzi do równania

$$y(1 - Y^*) - Y = \frac{\mu}{1+\mu} (y + D),$$

czyli też

$$\frac{d}{dy} (Y y) = \frac{1}{1+\mu} (y - \mu D)$$

lub po scałkowaniu

$$Yy = \frac{1}{2} \frac{1}{1+\mu} (y^2 - 2Dy + F) = \frac{U}{U'} \cdot Yy,$$

gdzie F jest stałą całkowania. Lecz dla $y = -d_1$ tudzież $y = +d_2$ jest $U = 0$, co daje $2D = d_2 - d_1$, $F = -d_2 d_1$. Mamy przeto:

$$\frac{U'}{U} = 2(1+\mu) \frac{y}{(y+d_1)(y-d_2)} = \frac{2(1+\mu)}{d_1+d_2} \left(\frac{d_1}{y+d_1} + \frac{d_2}{y-d_2} \right)$$

lub po ostatecznym scałkowaniu

$$U = C(y + d_1)^{\frac{2d_1}{d_1+d_2}} (d_2 - y)^{\frac{2d_2}{d_1+d_2}}, \quad (58.11)$$

gdzie C oznacza stałą całkowania.

Całkując zwrócono tu uwagę na nierówność $y - d_2 < 0$. Wracając do definicji $x_0 = -\frac{U'}{2y}$ znajdziemy wreszcie:

$$x_0 = C(1+\mu)(y + d_1)^{\frac{(1+2\mu)d_1-d_2}{d_1+d_2}} \cdot (d_2 - y)^{\frac{(1+2\mu)d_2-d_1}{d_1+d_2}} \quad (59.11)$$

jako równanie szerokości profilu, dla której rozwiązanie (16.11) i (17.11) jest rozwiązaniem matematycznie ścisłym. Stała C reguluje najwidoczniej szerokość przekroju.

Drugie z równań (57.11), po dwukrotnym scałkowaniu, przyjmie postać:

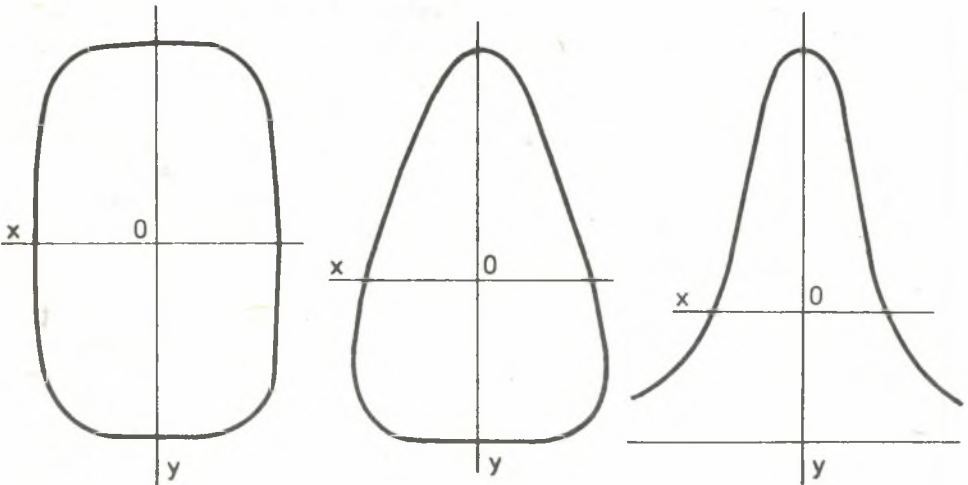
$$x_* = x_0(C_* + C_0 \int \frac{dy}{U}), \quad (60.11)$$

gdzie C_* , D_0 są stałymi. W równaniu tym U tudzież x_0 są określone przez (58.11) i (59.11). Równanie to może służyć do znalezienia funkcji x_* . Wyznaczenie $\int \frac{dy}{U}$ jest jednak z powodu wykazanej w (58.11) budowy U bardzo kłopotliwe. Wreszcie ze znalezionych x_* należałoby wybrać jed-

nie te, które czynią zadość również $\int_{-d_1}^{+d_2} x_0 x_* y dy = 0$, określającej osie

x , y jako osie główne. Jest nader prawdopodobne, że ten wymóg dodatkowy ograniczy x do warunku symetrii $x_* = 0$. Przyjmijemy więc dla celów ilustracji równanie (59.11) przekroje symetryczne $x_* = 0$, które spełniają równanie (60.11) identycznie.

Zmieniając stosunek d_1/d_2 czy też d_2/d_1 nadto ułamek μ znajdziemy z (59.11) różne kontury przekroju. Tak np. w grupie $d_1/d_2 = 1$ dla $\mu = 0$ otrzymamy prostokąt, dla $\mu = \frac{1}{2}$ elipsę względnie koło, dla $\mu = 1/4$ przekrój naszkicowany w lewej części rys. 10.11. W grupie $d_1/d_2 = 3/2$ dla $\mu = 1/4$ znajdziemy ograniczony parabolą drugiego stopnia, dla $\mu = 1/2$ przekrój uwidoczniiony w środkowej części rys. 10.11. W grupie $d_1/d_2 = 2$ dla $\mu = 1/2$ otrzymamy trójkąt, dla $\mu = 0$ przekrój jak w prawej części rys. 10.11. Dla $d_1/d_2 > 2$ każdy z przekrojów - podobnie jak ostat-



Rys. 10.11

ni - ograniczony jest asymptotą. Z dyskusji tej wynika, że rozwiązanie (16.11) i (17.11) jest wystarczająco dokładne, zwłaszcza dla atów praktycznych dla profili, chociaż w grubym przybliżeniu zbliżonych do wyżej podanych - więc np. dla przekroju teowego. Warto wreszcie zauważyć, że wzór

(16.11) oddaje matematycznie ściśle wartość wypadkową $\int_{-x_0}^{+x_0} \tau_x dx$ przypadają-

jącej na szerokość $2x_0$ przekroju. Inaczej mówiąc wzór ten daje należyte średnią wartość naprężenia τ_x , a niepoprzeczność jego polega na niewłaściwym przyjęciu stałej wartości τ_x na całej szerokości $2x_0$.

Ścisła teoria nierównomiernego zginania pochodzi - jak teoria wazystkich przypadków podstawowych - od de Saint-Venanta. Obok przemieszczeń - względnie ich zetowych pochodnych u, v - (4.10) lub lepiej (49.11) zakłada ona, uwzględniając wypaczenie przekroju, trzecie przemieszczenie w postaci

$$w = \psi' \phi - a_1 \left(\phi_1 + \frac{\mu}{2} x^2 y + \frac{2-\mu}{6} y^3 \right) - a_2 \left(\phi_2 + \frac{\mu}{2} xy^2 + \frac{2-\mu}{6} x^3 \right), \quad (61.11)$$

gdzie

$$a_1 = \frac{T_y}{EI_x}, \quad a_2 = \frac{T_x}{EI_y}, \quad \psi' = \frac{N}{GJ}, \quad (62.11)$$

a miejscownik N określa formuła (48.11) i określenia (47.11). W rozwiązaniu tym w równaniach (49.11) rozumie się pod c, d współrzędne unieruchomionego punktu (a, b) przekroju początkowego, w określeniach zaś (47.11) pod c, d rozumie się współrzędne środka posunięć. Wspomnieliśmy już, że w rozwiązaniu energetycznym nie można punktu (a, b) przyjąć dowolnie, bo okazuje się nim tu środek sztywności (c, d) .

Ażebym przeto podać rozwiązanie ściśle zagadnienia jednostajnie zmiennego zginania trzeba obok dwóch funkcji Φ_1, Φ_2 posunięć znać nadto funkcję owinięcia Φ - znaną już nam z poprzedniego ustępu, chyba, że $H_x = H_y = 0$. Funkcje te wewnątrz przekroju muszą zadość równaniom harmonicznym

$$\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial y^2} = 0, \quad (63.11)$$

a na jego brzegu warunkom:

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial n} = -2xy n_x - y^2 n_y, \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} = -x^2 n_x - 2xy n_y, \quad (64.11)$$

gdzie n oznacza normalną zewnętrzną konturu brzegowego. Muszę dodać, że przedstawiam tu zmodyfikowaną przez siebie matematycznie teorię klasyczną. Na przedstawienie czy to przemieszczenia (61.11) czy warunków (64.11) używają autorzy wzorujący się na pracy de Saint-Venanta dwa razy tyle miejsca.

Według istniejących w literaturze przedmiotu zapatrywań tylko znajomość funkcji Φ_1, Φ_2 pozwala obliczyć parametry geometryczne H_x, H_y , a to

$$2(1 + \mu) H_x = \int \left(-(1 - 2\mu) xy^2 - x \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} + y \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \right) dA, \quad (65.11)$$

$$2(1 + \mu) H_y = \int \left(-(1 - 2\mu) x^2 y - y \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} + x \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \right) dA$$

lub też - co na jedno, jak wykazałem, wychodzi -

$$(1 + \mu)(3 + 4\mu) H_x = \int \left((2 + \mu) y \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} - (1 + 3\mu) x \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \right) dA, \quad (66.11)$$

$$(1 + \mu)(3 + 4\mu) H_y = \int \left((2 + \mu) x \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} - (1 + 3\mu) y \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} \right) dA.$$

Tymczasem udało mi się dowieść, że parametry te można wyznaczyć ze znajomości jedynie funkcji owinięcia Φ , a to

$$(1 + \mu) H_x = - \int \left((1 + \mu) y \Phi + \mu xy \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \mu y^2 \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) dA, \quad (67.11)$$

$$(1 + \mu) H_y = + \int \left((1 + \mu) x \Phi + \mu xy \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \mu x^2 \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) dA,$$

co stanowi ekonomiczny przyczynek teoretyczny. Analiza rozwiązania energetycznego każe przypuszczać, że praktyczne przybliżenie tych relacji dają krótkie wzory:

$$H_x = - \int y \Phi dA, \quad H_y = + \int x \Phi dA. \quad (68.11)$$

Analiza ta prowadzi jednocześnie do wniosku, że parametry posunięć F_x, F_y, G_z , czyli też współczynniki posunięć $\alpha_x^*, \alpha_y^*, \beta_z^*$ wymagają znajomości obu funkcji posunięć Φ_1, Φ_2 . Relacje te są jednak - podobnie jak w naszym przybliżonym rozwiązaniu - znacznie bardziej zawile niż te na H_x, H_y . Rezygnujemy z podawania ich tutaj.

Znajomość funkcji φ , φ_1 , φ_2 określa składowe naprężenia τ_x , τ_y , a to według wzorów:

$$\begin{aligned}\tau_{x/G} &= \psi' \left(x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) - a_1 \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + y^2 \right) - a_2 \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + 2\mu xy \right), \\ \tau_{y/G} &= \psi' \left(-y + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) - a_1 \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + 2\mu xy \right) - a_2 \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + x^2 \right).\end{aligned}\tag{69.11}$$

Energia sprężystości jest sumą dodajników (37.11) i (52.11). Tym samym znajomość tych funkcji rozwiązuje zagadnienie pod każdym względem.

Tak np. dla przekroju kołowego zginanego dokoła osi x znaleźć można:

$$\varphi_1 = -\frac{1+\mu}{4} r^2 y - \frac{1-2\mu}{12} (y^3 - 3x^2 y),$$

z wybitnym uproszczeniem dla $\mu = 1/2$, prowadzącym do naszego elementarnego rozwiązania. Rozwiązanie dokładne daje dla największego naprężenia τ_x we wzorze (19.11) współczynnik

$$\tilde{\alpha} = \frac{1}{2} \frac{3+2\mu}{1+\mu},$$

przybierający dla $\mu = 0, 1/4, 1/2$ wartości $3/2, 7/5, 4/3$. Miejscem tego naprężenia jest środek koła. Naprężenie τ_x nie jest wzdłuż średnicy $y = 0$ stałe. Na brzegach tej średnicy jest

$$\alpha = \frac{1+2\mu}{1+\mu},$$

czyli dla $\mu = 0, 1/4, 1/2$ kolejno $1, 6/5, 4/3$. Podane więc przez nas rozwiązanie przybliżone ze współczynnikiem $4/3$ różni się od średniego maksymalnego o 5%, co stanowi dobre przybliżenie.

W analogicznym zgięciu prostym przekroju prostokątnego o bokach $2a, 2b$ można znaleźć rozwiązanie:

$$\varphi_1 = - (1 + \mu) b^2 - \frac{\mu}{3} a^2 y + \frac{\mu}{3} (y^3 - 3x^2 y) + \frac{4\mu a^3}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \frac{\operatorname{sh} \frac{n\pi y}{a}}{\operatorname{ch} \frac{n\pi b}{a}} \cos \frac{n\pi x}{a}$$

z wybitnym uproszczeniem dla $\mu = 0$, prowadzącym do naszego rozwiązania elementarnego. Tutaj założymy średnio $\mu = 1/4$ tudzież kolejno $b/a = 2, 1, 1/2, 1/4$ znajdziemy dla naprężenia τ_x w środku przekroju wartości $\tilde{\alpha}$ 1,47, 1,41, 1,28, 1,21. Dla środka brzegu $x = \pm a$ znajdziemy wartości $\tilde{\alpha}$ w tej samej kolejności 1,85, 1,69, 2,09, 2,98. Tu przeto naprężenie τ_y różnie

od środka ku brzegom. Wyjście z rozwiązaniem przybliżonym od przekroju wąskiego poza kwadrat jest niedopuszczalne, bo prowadzi do zbyt wielkich odstępstw od rozwiązania $\bar{\alpha} = 1,5$. Trzeba jednak zwrócić uwagę, że nawet przedstawione ściśle rozwiązanie nie jest dla zbyt szerokiego przekroju pewne, albowiem rzecz modyfikuje działanie płytowe takiego przekroju.

Budowa funkcji ϑ_1 w podanych tu jak i innych wypadkach nasunęła de Saint-Venantowi tzw. połowicznie - odwróconą metodę.

Zakładając

$$\vartheta_1 = C_1 y + C_2 (y^3 - 3x^2 y)$$

i nadając stałym C_1, C_2 rozmaite wartości wykrywał czy to z warunku (64.11), czy też z wyznaczania trajektorii brzegi rozmaitych przekrojów czyniących ściśle zadość wymogom teorii zginania. Tą drogą znaleziono też między innymi profil przedstawiony na wstępie rys. 10.11. Interesujące byłoby rozszerzyć powyższe założenie o dodatek harmoniczny

$$C_3 (y^5 - 10x^2 y^3 + 5x^4 y)$$

i zbadać nowe ewentualności. Jeszcze bardziej celowe byłoby nadać funkcji ϑ_1 budowę dopuszczającą profil niesymetrycznie względem osi x względnie symetrycznie tylko względem osi x jako osi wektora M .

Już traktowanie przekrojów podwójnie symetrycznych nastęrcza dużo kłopotów. Trudności zwiększają się, gdy przekrój jest symetryczny tylko względem linii działania siły T . Rosną dalej, gdy przy pojedynczej symetrii siła T jest do osi symetrii prostopadła. Przykładów w literaturze nie posiadamy zbyt wiele z tej dziedziny. Pewne możliwości daje metoda podziału przekroju symetrycznego trajektoriami na części. Tak np. znajomość rozwiązania dla koła pozwala tym samym podać rozwiązanie również dla półkola. Można stąd wyznaczyć ściśle współrzędną c środka sztywności. Zamiast wartości $\frac{4r}{9\pi}$ znalezionej w przykładzie 9.11 otrzymamy tu :

$$c = \frac{4r}{15\pi} \cdot \frac{1 + 3\mu}{1 + \mu},$$

co dla $\mu = 0, 1/4, 1/2$ kolejno daje $\frac{4r}{15\pi}, \frac{28r}{75\pi}, \frac{4r}{9\pi}$.

Posiadając rozwiązanie ściśle możemy wyznaczyć też współczynniki posunięcia α^*, β^* . Nie posiadamy w literaturze zapasu tych dat. Możemy jednak przypuszczać, że stopień przybliżenia rozwiązania naszego będzie lepszy aniżeli dla współczynników $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ naprężeń, albowiem energia jest wyrażeniem uwzględniającym ryczałtowo ogół naprężeń, średnie zaś wartości podanych przez nas składowych są z konieczności dobre.

Wprowadzenie w obliczenie - podobnie jak to się robi w teorii skręcania - funkcji ψ_1, ψ_2 sprzężonych z dotychczasowymi ϑ_1, ϑ_2 nie jest ma-

tematycznie celowe, albowiem warunki brzegowe (64.11) po odnośnym przekształceniu - odmiennie niż w teorii skręcania - nie dają szans matematycznemu rozwojowi wypadków. Postępowanie takie byłoby celowe, gdybyśmy funkcje ψ_1, ψ_2 uzupełnili korzystnymi dodajnikami. Wtedy zaś przechodzą one ze swego swowu w tzw. funkcje naprężeń. Zaśługę przekształcenia rozwiązania de Saint-Venantowskiego tego rodzaju zabiegiem przypisuje się wybitnemu rosyjskiemu uczonemu - Timoszence. Interesujące będzie przedstawić tu tok tego obliczenia.

Ograniczając się - co jest tu bardzo celowe - do wypadku $T_y = T_1, T_x = 0$ mamy uczynić zadość warunkowi równowagi (7.11) z określeniem σ_2 relacją (4.11), warunkowi brzegowemu (8.11) tudzież warunkowi nierozdzielności (56.11). Pierwszy z nich spełnimy, kładąc :

$$\tau_y = -\frac{\partial \Omega}{\partial y}, \quad \tau_x = \frac{\partial \Omega}{\partial x} - \frac{T y^2}{2I} + f(x), \quad (70.11)$$

gdzie Ω jest zastępującą jednocześnie funkcje ϕ i ϕ_1 poszukiwaną funkcją naprężeń, a $f(x)$ dowolnie obieralną funkcją zmiennej x . Wstawiając (70.11) w (56.11) otrzymamy równanie różniczkowe

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} = \frac{\mu}{1 + \mu} \frac{T x}{I} + 2G \phi' - f'(x) \quad (71.11)$$

dla funkcji Ω , przy czym znak \cdot jest symbolem pochodnej względem x . Wstawiając wreszcie (70.11) w (8.11) i rugując n_x, n_y według (15.10) znajdziemy równanie

$$\frac{\partial \Omega}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial x} - \frac{T y^2}{2I} + f(x) \right) \frac{\partial x}{\partial s} = 0$$

czyli też

$$\frac{\partial \Omega}{\partial s} = \left(\frac{T y^2}{2I} - f(x) \right) \frac{\partial x}{\partial s}$$

lub po scałkowaniu względem współrzędnej brzegowej s

$$\Omega = \frac{T}{2I} \int y^2 dx - \int f(x) dx + C_0, \quad (72.11)$$

gdzie C_0 jest stałą dowolną jako warunek, któremu musi funkcja Ω czynić zadość na brzegu przekroju. Początek zmiennej s można obrać w dowolnym punkcie krzywej brzegowej. Gdy przekrój obejdziemy całkowicie wracając do punktu wyjściowego, znajdziemy:

$$\oint y^2 dx = 0,$$

albowiem powyższa całka po obwodzie zamkniętym oznacza średnik U całego pola przekroju względem osi x , ta zaś przechodzi - zgodnie z umową - przez środek geometryczny tego pola. Wynika z tego, że funkcja Ω tworzy nad brzegiem s przekroju krzywą z a w e z e z a m k n i ę t ą .

Ponieważ funkcję $f(x)$ możemy dysponować najzupełniej dowolnie, przeto wykorzystać to możemy dla uproszczenia równania (71.11), czy też (72.11). Gdy mamy zamiar eksploatować przedstawioną teorię na drodze czysto matematycznej, to wskazane jest w pierwszym rzędzie uprościć warunek brzegowy (72.11). Gdy więc np. przekrój posiada symetrię względem osi x , to możemy na brzegu zawsze przyjąć $f(x) = \frac{\Gamma y}{2I}$, czyli uczynić tam $\Omega = C_0$, więc np. $\Omega = 0$. Wtedy w (71.11) w miejsce $f'(x)$ wpiszemy $\frac{\Gamma}{I} y_0 \cdot y_0$, gdzie $y = y(x)$ jest rzędną brzegową zależną od x . Tak np. postąpił Rosjanin - Panow - rozpatrując tę metodą piękny przykład przekroju ograniczonego krzywą

$$\left(\frac{y}{a}\right)^2 = k \frac{x-x_0}{a} \left(\frac{x-x_0}{a} - 1\right)^2, \quad x_0 = \frac{3}{7} \cdot a.$$

Gdy wypadek powyższy nie zachodzi, możemy postąpić w dowolny inny sposób, więc np. usiłować, by krzywa brzegowa Ω leżała w powierzchni walcowej lub po prostu przyjąć $f(x) = 0$.

Gdy mamy zamiar wykorzystać przedstawioną teorię w sposób eksperymentalny - a jak gdzie indziej wskazujemy jest to możliwe - to winniśmy dążyć przede wszystkim do uproszczenia równania (71.11). Wtedy konieczne jest, by funkcja $f(x)$ była co najwyżej kwadratowa w zmiennej x , więc miała postać:

$$f(x) = 3Bx^2 + 2Cx + D.$$

Wtedy równanie (71.11) przyjmie postać:

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} = \left(\frac{\mu}{1+\mu} \cdot \frac{\Gamma}{I} - 6B\right)x + 2Gy' - 2C, \quad (73.11)$$

równanie zaś (72.11) postać:

$$\Omega = \frac{\Gamma}{2I} \int y^2 dx - Bx^3 - Cx^2 - Dx + C_0. \quad (74.11)$$

Możemy przyjąć $B = \frac{1}{6} \frac{\mu}{1+\mu} \frac{\Gamma}{I}$, możemy dodatkowo obrać $C = Gy'$, wtedy prawa strona równania różniczkowego będzie stałą lub nawet zerową. Odpowiedni do tego postać przyjmie warunek brzegowy.

O możliwościach eksperymentalnego określenia funkcji Ω będzie mowa oddzielnie. Tu jeszcze dodajmy, że powyższy wywód jest służalny dla przekro-

jów jednospójnych. Przy wielospójnych możemy dysponować stałą C_0 tylko na jednym z brzegów. Na pozostałych jednoznaczność rozwiązania prowadzi do pewnych przymusowych konsekwencji.

Wiadomo nam jest, że twierdzenie (34.11) o jednoznaczności rozwiązania stosowane musi być dodatkowo poza warunkami równowagi i warunkami nierozdzielności dla przekrojów wielospójnych. Może ono jednak być z korzyścią użyte również dla obszarów jednospójnych. W teorii skręcania postulat jednoznaczności doprowadził nas do twierdzenia (53.10) o cyrkulacji naprężenia stycznego. Analogiczne twierdzenie o krążeniu naprężenia stycznego możemy podać dla zagadnienia nie równomiernego zginania.

Punktem wyjścia może być warunek nierozdzielności (56.11). Pomnóżmy go stronami przez element pola dA i scałkujemy w obrębie dowolnej krzywej, zamkniętej, leżącej jednak w całości w obrębie materialnego przekroju. Mamy więc:

$$\int \left(\frac{\partial \tau_x}{\partial x} - \frac{\partial \tau_y}{\partial y} \right) dA = \frac{\mu}{1+\mu} \int \left(\frac{T_y}{I_x} x - \frac{T_x}{I_y} y \right) dA + 2G \vartheta' \int dA.$$

Jeśli λ jest współrzędną łukową tej krzywej, a h jej normalną, to, przekształcając całkę powierzchniową na obwodową, możemy lewej stronie nadać postać:

$$\int \left(\frac{\partial \tau_x}{\partial x} - \frac{\partial \tau_y}{\partial y} \right) dA = \oint (\tau_x h_x - \tau_y h_y) d\lambda = \oint (\tau_y \lambda_x + \tau_x \lambda_y) d\lambda,$$

albowiem między dostawami normalnej i stycznnej zachodzą związki typu (15.10). W ostatnim dwumianie poznajemy τ_h z formuły (52.10), tj. składową całkowitego naprężenia stycznego wziętą w kierunku łuku λ . Ostatecznie więc lewa strona dyskutowanego równania przedstawia cyrkulację $C = \oint \tau_h d\lambda$ naprężenia stycznego. Na prawej $\int dA = A_\lambda$ oznacza pole objęte krzywą λ , wyrażenia zaś $\int x dA = V_{\lambda y}$, $\int y dA = V_{\lambda x}$ przedstawiają średniki tego pola względem osi y tudzież x . Literę V zastosowano w miejscu dotychczas stosowanej dla średnika U , aby zaznaczyć, że w grę obecnie wchodzi i n e pole.

Ostatecznie więc twierdzenie o krążeniu przybiera postać:

$$C = \oint \lambda_h d\lambda = \frac{\mu}{1+\mu} \left(\frac{T_y}{I_x} V_{\lambda y} - \frac{T_x}{I_y} V_{\lambda x} \right) + 2GA_\lambda \vartheta'. \quad (75.11)$$

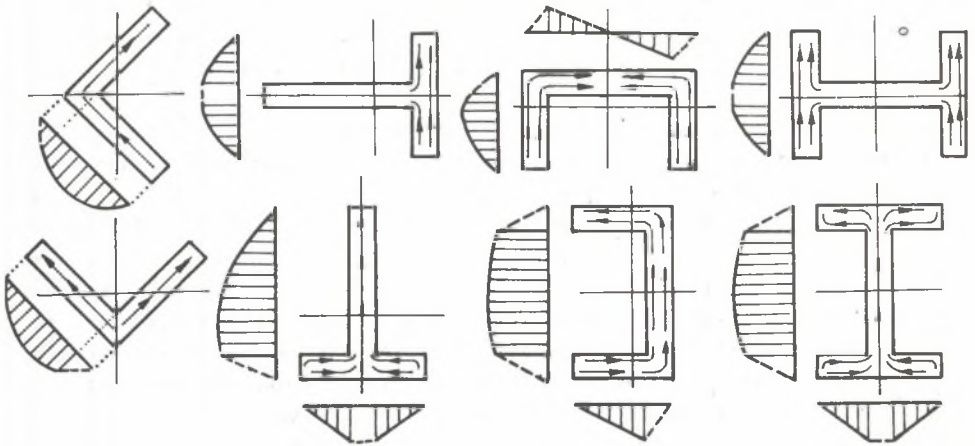
Gdy za krzywą λ obierzemy trajektorię s normalnej n , należy celowo zaznaczyć to zmianą wskaźników. Gdy siły T_x , T_y są rzeczywście poprzecznymi, owinięcie ϑ' określa wzór (50.11), a zawarty w nim miejsco-

wnik N - wzór (48.11). Gdy siły T_x, T_y są szczególnymi mimopoprzecznymi, tzn. przechodzącymi przez środek sztywności przekroju należy w (75.11) położyć $\dot{v} = 0$. W zgięciu prostym należy za jedną z wielkości T_x, T_y położyć zero.

Należy pamiętać o tym, że t w i e r d z e n i e (75.11) zostało wyprowadzone z matematycznie ścisłego związku (56.11). Jest ono przeto również m a t e m a t y c z n i e ś c i s ł e. Nie może więc ono być zestawiane z obliczeniem niedostatecznie przybliżonym. Konfrontacja tego twierdzenia np. z rozwiązaniem (16.11) i (17.11) może co najwyżej wykazać, w jakim stopniu to ostatnie jest przeciętnie niedokładne. Tak np. rozwiązanie powyższe dla przekrojów symetrycznych daje dla połówki przekroju - jak łatwo wykazać - cyrkulację z e r o w ą. W istocie zaś winna ona wynosić $\frac{\mu}{1+\mu} \frac{T}{I} V_y$, gdzie V_y jest średnikiem pola tej połówki względem osi y , a zatem wielkością różną od zera. Można przeto pokusić się o korektę naszego rozwiązania dla $x_* = 0$ przyjmując, że formuła (16.11) określa tylko ś r e d n i ą wartość naprężenia τ_x , r z e c z y w i s t ą zaś owa średnia pomnożona przez s t o s o w n ą funkcję zmiennej x . Wtedy z warunku równowagi znajdziemy stosowne τ_y , dbając znów o to, by na konturze był spełniony warunek brzegowy. Nadliczbowe parametry wprowadzonej funkcji znajdziemy z zastosowania twierdzenia o cyrkulacji. Oczywiście z tego nie wynika, że znajdziemy ścisłe rozwiązanie. Znajdziemy rozwiązanie ściślejsze. Ścisłym zaś byłoby ono wtedy, gdyby twierdzenie o cyrkulacji spełniało się dla dowolnych krzywych zamkniętych, co jest równoznaczne z żądaniem, by w każdym punkcie przekroju był spełniony wyjściowy dla twierdzenia postulat nierozdzielności (56.11). W wypadkach przekrojów wielospójnych twierdzenie (75.11) m u s i być użyte, o czym będzie jeszcze mowa.

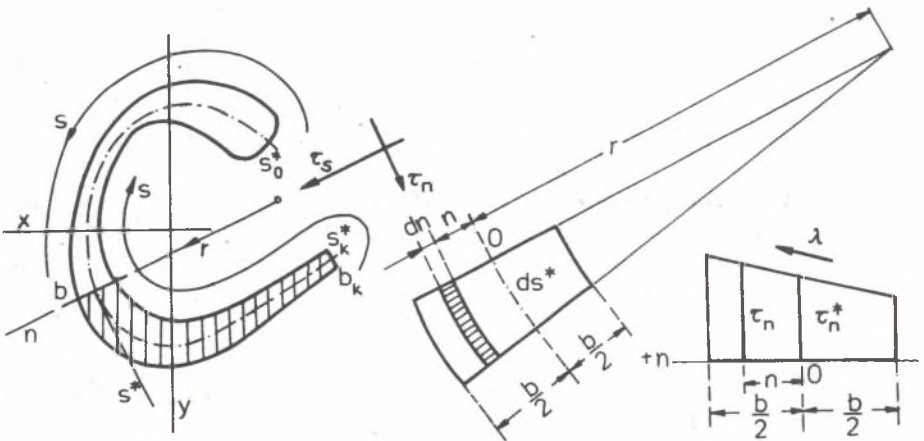
Przekroje cienkościennie mają w technice duże zastosowanie. Nie posiadamy dla nich ścisłego rozwiązania teoretycznego. Podamy przeto rozwiązanie przybliżone. Jest ono tym dokładniejsze, im szerokość poszczególnych części profilu jest mniejsza w stosunku do długości tej części. Zajmiemy się na razie przekrojami j e d n o s p ó j n y m i - jak na rys. 11.11.

Założmy dla prostoty, że siła T jest równoległa do osi y , a ponadto, że mowa jest o zginaniu b e z o w i n i ę c i a. Przyjmiemy, że naprężenie normalne podlega - jak dotychczas - prawu zmienności $\sigma = \frac{M}{I} y$, co nie jest całkowicie pewne, albowiem teoria poucza, iż do cienkich ścianek profilu zakrada się działanie płytowe, że ponadto wzajemne współdziałanie tych płytek wywołuje dodatkowy stan napięcia modyfikujący - między innymi - również wyżej wskazane naprężenie. W literaturze przedmiotu czyni się dalej założenie, iż na nieznacznej szerokości b przekroju można przyjąć, iż prostopadłe do b naprężenie styczne τ_n^* jest stałe, a równoległe do b naprężenie styczne jest tak małe, że można je pominąć. Przyjmiemy tu, że τ_n^* jest średnią wartością naprężenia τ_n liniowo zmiennego na szerokości b . Dając szansę obliczenia drugiego naprężenia, tj. τ_n nie będziemy go wykazywać jako istotnie bardzo małego.



Rys. 11.11

Przyjmijmy osie n, s^* współrzędnych ze zwrotami odpowiadającymi obróconemu układowi osi x, y . Dwie sąsiednimi płaszczyznami normalnymi n i dwiema sąsiednimi z wydzielmy element pręta jak na rys. 12.11. Promień



Rys. 12.11

zakrzywienia r osi s^* uważamy za dodatni, gdy dodatni kierunek n jest przedłużeniem tego promienia. Dwie sąsiednimi powierzchniami walcowymi $r + n$ możemy ostatecznie wyodrębnić element $\frac{r+n}{r} dn ds^* dz$ i wypisać dla niego warunek równowagi dla kierunku z . Uwzględniając związaną długość łuku przynależnego promieniowi $r + n + dn$ z łatwością znajdziemy

$$\frac{r+n}{r} \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial z} + \frac{\partial \tau_n}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{r+n}{r} \tau_s \right) = 0. \quad (76.11)$$

Całkując to równanie względem n założmy, że σ nie zależy od n , że średnia wartość τ_n wynosi τ_n^* , że na brzegach $n = \pm b/2$ jest $\tau_n = 0$, że

wreszcie $\int_{-b/2}^{+b/2} \frac{r+n}{r} dn = b$. Otrzymamy w ten sposób :

$$\frac{T b y}{I} + \frac{d\tau_n^*}{ds^*} b = 0.$$

Całkując z kolei to równanie względem s^* z uwzględnieniem faktu, iż na końcu s_k^* jest $\tau_n^* = 0$ znajdziemy

$$\tau_n^* = \frac{T U}{I b}, \tag{77.11}$$

a zatem rezultat podobny do (16.11). Tutaj b oznacza szerokość profilu w dowolnym miejscu s^* , wielkość zaś U średnik odciętej w tym miejscu szewem b części przekroju względem osi prostopadłej do siły T , więc - w rozważanym wypadku - względem osi x , dla której kształtnik oznaczono przez J . Ewentualnie potrzebne składowe tego naprężenia są równe:

$$\tau_x^* = \tau_n^* s_y^*, \quad \tau_y^* = \tau_n^* s_x^*, \tag{78.11}$$

przy czym s_x^* , s_y^* są dostawami kierunkowymi stycznej s^* .

Wzór (77.11) można znaleźć szybciej, rozważając równowagę w kierunku osi z mieszczącej się między dwoma sąsiednimi przekrojami z części pręta zakreskowanej na rys. 12.11 i uwzględniając przy tym twierdzenie o równowartości odpowiadających naprężzeń stycznych. Ustawiając warunek równowagi (77.11) należy - dla uniknięcia nieporozumień odnośnie znaków - przyjmować najprościej zwrot τ_n^* zgodny z s^* . Wtedy pod U w (77.11) należy rozumieć średnik tej części pola, które pozostało w kierunku rosnących s^* . Znak algebraiczny \pm tak zdefiniowanego U ustali zgodność lub niezgodność τ_n^* z s^* . Łatwo - podobnie jak to już raz uczyniliśmy w analogicznej sytuacji - wykazać, że wzór (77.11) czyli (78.11) prowadzi do rezultatów :

$$\int \tau_x dA = T, \quad \int \tau_y dA = 0, \\ \int (x\tau_x - y\tau_y) dA = N = T \frac{H}{I} = Tc, \tag{79.11}$$

$$H = \int_{s_0^*}^{s_k^*} U(x^* dy^* - y^* dx^*),$$

gdzie x^* , y^* oznaczają współrzędne krzywej s^* .

Przyjmujemy - co już raz powiedziano - że rozwiązanie (77.11) odpowiada $\dot{v}^i = 0$, że więc współrzędną c środka sztywności określa wielkość H z zestawienia (79.11).

Przec' odzając z kolei do zbadania ewentualnej zmienności τ_n na szerokości b położymy:

$$\tau_n = \tau_n^*(1 + \lambda n) \quad (80.11)$$

i usiłujmy znaleźć parametr λ , stosując twierdzenie (75.11) o cyrkulacji naprężenia stycznego. Przyjmie ono tutaj wobec $\dot{v}^i = 0$ postać:

$$\oint \tau_n ds = \frac{\mu}{1 + \mu} \frac{T}{I} V_s, \quad (81.11)$$

gdzie V_1 oznacza średnik objętego krzywą s pola względem osi y . Obierzmy za tę krzywą obwód pola odciętego ze zwrotem s jak na rys.12.11. Pomijając krótkie skrawki b i b_k możemy całkę obwodową lewej strony równania (81.11) zamienić na całkę wzdłuż łuku średniego s^* . Oczywiście uważać tu trzeba na zwrot s^* , który jest zgodny z s po stronie $n = +\frac{b}{2}$ i niezgodny na stronie $n = -\frac{b}{2}$, jak i na różnicę długości między s i s^* . Dla przekrojów jednospójnych, o których obecnie jest mowa, obranie obchodu s nie budzi żadnych wątpliwości. Właśnie jednospójność polega na tym, że bez odrywania ołówka od płaszczyzny papieru potrafimy obwieść cały przekrój, wracając do punktu wyjściowego. Gdy jednak przekrój jednospójny jest rozgałęziony - jak np. dwuteownik - powstają wątpliwości odnośnie kierunku obioru s^* . Otóż w częściach niewiele zbaczających od kierunku siły T przyjmujemy dla s^* zwrot zgodny z kierunkiem T . W pozostałych, stanowiących płynne przedłużenie tamtych, czy też stanowiących odgałęzienie od tamtych, przyjmujemy dla s^* zwrot stanowiący naturalne przedłużenie niedawno ustalonego. Mamy tu więc na podstawie (80.11) i (81.11):

$$\begin{aligned} \oint \tau_n ds &= \int_s^{s^*} \tau_n^* \left(\left(1 + \lambda \frac{b}{2}\right) \left(1 + \frac{b}{2r}\right) - \left(1 - \lambda \frac{b}{2}\right) \left(1 - \frac{b}{2r}\right) \right) ds^* = \\ &= \int_{s^*}^{s^*} \tau_n^* b \left(\lambda + \frac{1}{r} \right) ds^* = \frac{T}{I} \int_s^{s^*} U \left(\lambda + \frac{1}{r} \right) ds^* = \frac{\mu}{1 + \mu} \frac{T}{I} \int_{s^*}^{s^*} b x^* ds^*. \end{aligned}$$

Z rezultatu tego wynika równość funkcji podcałkowych, czyli

$$U \left(\lambda + \frac{1}{r} \right) = \frac{\mu}{1 + \mu} b x^*$$

skąd znajdujemy:

$$\lambda = \frac{\mu}{1 + \mu} \frac{bx^*}{U} - \frac{1}{r}.$$

Wstawiając znalezione λ w (80.11) razem z (77.11) otrzymamy

$$\tau_n = \frac{T}{I} \frac{U}{b} \left(1 - \frac{n}{r}\right) + \frac{T}{I} \frac{\mu}{1 + \mu} n x^*,$$

jako poszukiwaną zależność τ_n od n , w dowolnym razie przynależną odciętej x .

Rozważywszy rząd obu dodajników ostatniej formuły stwierdzimy, że drugi z nich jest mały w porównaniu z pierwszym jak małe jest b w porównaniu z innymi rozmiarami, więc np. z wysokością przekroju. Ponieważ ponadto na początku s_o^* i końcu s_k^* powoduje on drobne kolizje z warunkami brzegowymi dla τ_n , więc z korzyścią dla formuły pominiemy go. Ostatecznie więc mamy:

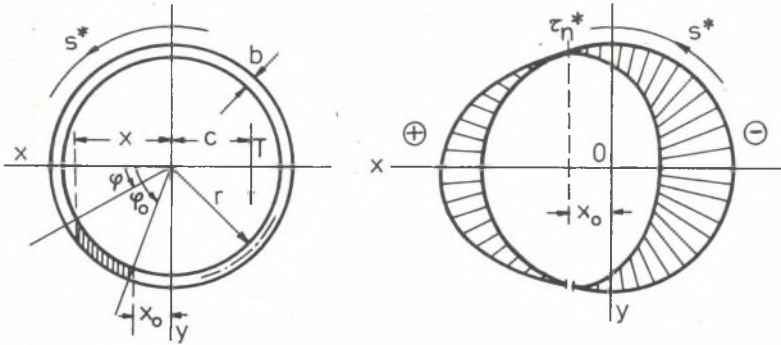
$$\tau_n = \frac{T}{I} \frac{U}{b} \left(1 - \frac{n}{r}\right), \tag{82.11}$$

który to wzór można było także bez rozważań cyrkulacyjnych wypisać, zważając na to, że średnia τ_n^* wymaga mniejszej wartości τ_n na brzegu dłuższym i większej na krótszym. Dodajnik $-n/r$ ma znaczenie w ostrych wklęsłych wyobleniach, gdzie przyjmuje on znak dodatni i zwiększa wyraźnie wartość dwumianu nawiasowego. Dla niezakrzywionych części profilu znika on, powodując stałą wartość τ_n na całej szerokości b rozważanego suwu. Jest to przyczyna, dla której na rys. 11.11 w stopkach przekroju dwuteowego i teowego zaznaczyłem kierunek przepływu naprężeń odmiennie, niż czyni się to w literaturze przedmiotu. Na tym rysunku podano wykresy naprężeń τ_n względnie τ_x, τ_y zgodnych z rezultatem (77.11) i (78.11) lub (82.11).

Nie ma żadnych trudności dla przejścia do przypadku ścinania, tj. wypadku z ewentualnym $\psi \neq 0$. Należy podane wyżej rozwiązanie rozszerzyć podaniem τ_n dla skręcania przekroju momentem, którego wartość jest równa miejscownikowi siły T względem środka sztywności, zatem momentem $N = -Tc$, przy czym c określa wzór (79.11) ilorazem H/I . Współczynniki α^*, β^* wyznacza się analogicznie jak w teorii prętów litych, tj. przy użyciu wyrażenia dla energii sprężystości. Obliczając tę ostatnią wystarczy użyć przedstawienia (77.11), ponieważ całką kwadratu dwumianu $1 - n/r$ można skreślić mały ułamek b^2/r^2 w porównaniu z 1.

Przykład 10.11. Wyznaczyć naprężenia styczne dla przekroju utworzonego z rozciątego wąskiego pierścienia kołowego założywszy, że siła mimoprzeczna przechodzi przez środek sztywności tego przekroju.

Odpowiedź 10.11. Pomijając znaczek * przy x możemy dla współrzędnych dowolnego punktu osi pierścienia napisać $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ i



Rys. 13.11

analogicznie dla współrzędnych punktu rozcięcia pierścienia, dodając znaczek \circ . Jeśli końcowi przynależą kąt φ_0 , to początek określa kąt $\varphi_0 - 2\pi$. Mamy tu $U = br(x - x_0)$, a stąd $\tau_n^* = \frac{T}{I} r(x - x_0) = 2 \frac{T}{I} \frac{x - x_0}{r}$, gdzie $I = br^3\pi = \frac{Ar^2}{2}$ jest momentem bezwładności, a $A = 2br\pi$ polem przekroju. Stąd wykres naprężeń na rys. 13.11. Dla $x \geq x_0$ jest $\tau_n^* \geq 0$, przy czym należy tu pamiętać, że $\tau_n^* \geq 0$ oznacza kierunek zgodny względnie niezgodny ze zwrotem współrzędnej s^* . Zatem największe liczebnie naprężenie wynosi $2 \frac{T}{A} (1 + \frac{x_0}{r})$, jeśli pominiemy uzupełnienie czynnikiem $1 + \frac{b}{2r}$. W dalszym

ciągu znajdziemy
$$H = r^2 \int_{\varphi_0 - 2\pi}^{\varphi_0} U d\varphi = -2br^4\pi \cos \varphi_0 = -2br^3\pi x_0 = -2 I x_0$$

czyli $c = \frac{H}{I} = -2x_0$.

Ponieważ analogiczne rozumowanie przeprowadzić możemy i dla drugiego kierunku, przeto widzimy, że środek sztywności na promieniu przynależnym szczelinie leży po przeciwległej stronie środka pierścienia w odległości od niego równej $(\sqrt{(2x_0)^2 + (2y_0)^2}) = 2r$.

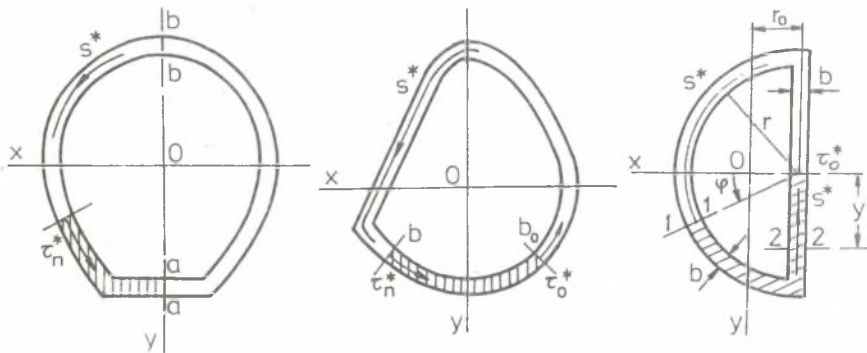
Przykład 11.11. Jak się zmienią rezultaty poprzedniego zadania, gdy siłę T przesuniemy przez środek przekroju?

Odpowiedź 11.11. Należy dołączyć naprężenia τ_n od momentu skręcającego $N = -Tc = 2Tx_0$. Według przykładu 9.10 wynoszą one $\tau_n = \pm \frac{3N}{2b^2r\pi}$ wzdłuż zewnętrznego względnie wewnętrznego obwodu. Zatem $\tau_n = \pm 6 \frac{T}{A} \cdot \frac{x_0}{b}$, co czyni bardzo wiele z powodu małego b . Kąt owinięcia według przykładu 11.10 będzie równy $\psi = \frac{3N}{2Gb^2r\pi} = \frac{3Tx_0}{Gb^3r\pi}$.

Przekroje wielospójne nastęrczają przy rozwiązywaniu jeszcze więcej kłopotów aniżeli jednospójne. W teorii sprężystości posiadamy raptem kilka przekrojów w tej dziedzinie potraktowanych. Należy do nich np. przekrój ograniczony dwoma współśrodkowymi kołami. Warto jest wiedzieć, że, gdy promień koła wewnętrznego maleje nieograniczenie, współczynnik α na brzegu zatrzymuje bez zmiany wartość jak dla pełnego przekroju kołowego, zaś współczynnik $\bar{\alpha}$ w środku przekroju - więc przy brzegu małego otworu wewnętrznego - podwaja swą wartość, jaki miał dla pełnego przekroju. O t w ó r z e r o w y w c i a ł a c h r z e c z y w i s t y c h t o n i e t o s a m o c o b r a k o t w o r u.

Gdy cienkościenny przekrój dwuspójny jest symetryczny względem kierunku siły T - jak w lewej części rys. 14.11 - przecinamy go szwem $a-a$ lub $b-b$, położonym na osi symetrii. Naprężenie τ_n^* w tych szwach jest zerowe. Wobec tego nic się nie zmienia w równaniu (77.11), jeśli za szew końcowy uważać będziemy właśnie ów $a-a$ względnie $b-b$.

Gdy jednakże tak nie jest, zagadnienie staje się jednokrotnie - odmiennie, więc jak w wypadku skręcania - hyperstatyczne. Z konieczności przecinamy przekrój w dowolnym miejscu, zakładając tam niewiadome naprężenie τ_o^* . Rozwiązanie zadania przedstawia się następująco:



Rys. 14.11

Obierzmy zwrot dla współrzędnej s^* i dla celów obliczenia przyjmijmy zgodny z nim zwrot naprężeń. Ustalony przed chwilą przekrój uważajmy za k o ń c o w y. Dla wydzielonej przekrojem miejscowym części warunek równowagi przybierze postać:

$$\tau_n^* = \tau_o^* \frac{b_o}{b} + \frac{T}{I} \cdot \frac{U}{b}. \quad (83.11)$$

przy czym U oznacza średnik pola odciętego w kierunku od miejsca rozważanego do miejsca końcowego względem osi x , jeśli $T = T_y$. Tym samym na-

prężenie τ_n^* będzie znane, jeśli znane nam będzie τ_o^* . To ostatnie znajdziemy, stosując twierdzenie o cyrkulacji. Obierając za obwód zamknięty obwód średni s^* , napiszemy je w postaci:

$$\oint \tau_n^* ds^* = \frac{\mu}{1+\mu} \frac{T}{I} V^*$$

gdzie V^* oznacza średnik pola obwiedzionego krzywą s^* względem osi y , jeśli T jest siłą do niej równoległą i tak ułożoną, że $\psi' = 0$. Podstawiając powyżej (83.11) otrzymamy z łatwością

$$\tau_o^* = \frac{T}{I} \frac{\frac{\mu}{1+\mu} V^* - \oint U \frac{ds^*}{b}}{\oint \frac{ds^*}{b}} \quad (84.11)$$

Wracając z tym rezultatem do (83.11), określimy τ_n^* w zupełności.

Środek sztywności nie może być wyznaczony dotychczasową relacją z powodu obecności nadliczbowego dodajnika τ_o^* . Wyznamy go przeto z podstawowej definicji (79.11)

$$Tc = \int (x\tau_x - y\tau_y) dA.$$

Przyjmując tu $dA = bds^*$ rozumiemy pod x, y współrzędne punktów krzywej s^* , a pod τ_x, τ_y średnie składowe (78.11). Mamy więc, uwzględniając (83.11)

$$Tc = \oint \tau_n^* b(x^*s_y^* - y^*s_x^*) ds^* = \frac{T}{I} \oint U(x^*dy^* - y^*dx^*) + \tau_o^* b_o \oint (x^*dy^* - y^*dx^*).$$

Lecz w pierwszej całce prawej strony poznajemy parametr H , druga zaś - jak wiadomo z analizy matematycznej - oznacza podwójne pole objęte krzywą s^* . Ostatecznie więc jest:

$$c = \frac{H}{I} + 2b_o \frac{A^* \tau_o^*}{T} \quad (85.11)$$

gdzie τ_o^* jest określone przez (84.11). Tym samym i ten szczegół został rozwiązany.

Przykład 12.11. Rozwiązać zagadnienie ścinania zamkniętego przekroju półkolistego jak na rys. 14.11.

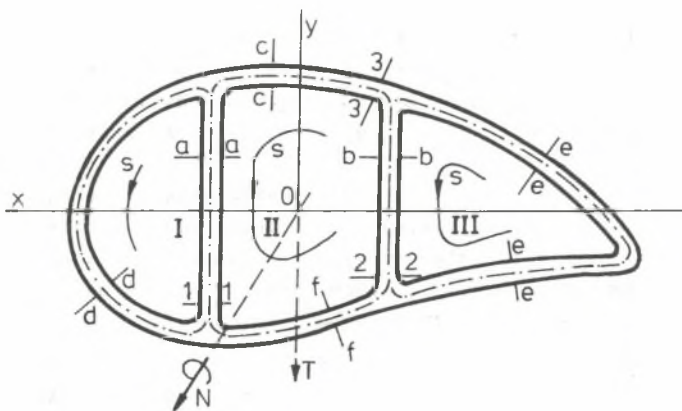
Odpowiedź 12.11. Środek geometryczny przekroju pręta określa $r_o = \frac{2r}{\pi + 2}$ środek zaś pola $A^* = r^2\pi/2$ odległy jest od średnicy o $4r/3\pi$. Otwieramy przekrój w miejscu $y = 0$ części prostej. W przekroju 1 - 1 jest $\tau_1^* = \tau_o^*$

+ $\frac{T}{I} r(x + r_0 + \frac{r}{2})$, w przekroju zaś 2 - 2 jest $\tau_2^* = \tau_0^* + \frac{T}{I} \frac{y^2}{2}$. Twierdzenie o cyrkulacji brzmi:

$$\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \tau_1^* r \, d\varphi + \int_{-r}^{+r} (-\tau_2^*)(-dy) = \frac{\mu}{1+\mu} \frac{T}{I} r^3 \frac{4-\pi}{\pi+2}$$

skąd otrzymujemy $\tau_0^* = -\frac{T}{I} \frac{r^2}{\pi+2} (\frac{\pi}{2} + \frac{7}{3} - \frac{1}{3} \frac{\mu}{1+\mu} \cdot \frac{4-\pi}{\pi+2})$, tj. dla $\mu = \frac{1}{4}$ wartość $\tau_0^* = -0,757 \frac{Tr^2}{I}$ przy zwrocie s^* jak na rys. 14.11. Znaczy to, że τ_0^* skierowane jest zgodnie z dodatnim kierunkiem osi y . W przekroju $y = 0$ połowiącym łuk jest $\tau_n^* = +0,743 \frac{Tr^2}{I}$. W tych warunkach ramię c jest bardzo małe.

Przekrój n - spójny jest z uwagi na naprężenia styczne $(n-1)$ -krotnie statycznie niewyznaczalny. Na rys. 15.11 naszkicowano przekrój czterospójny. Celem rozwiązania musimy przeciąć go w trzech miejscach, tak by uzyskać układ jednospójny. Naprężenia przecięć 1 - 1, 2 - 2 - 3 - 3, τ_1^* , τ_2^* , τ_3^* są niewiadomymi hyperstatycznymi. Naprężenie miejsca a - a wyrazić



Rys. 15.11

trzeba przy pomocy τ_1^* , miejsca $b - b$ przy użyciu τ_2^* , miejsca $c - c$ przy użyciu τ_3^* . W wyrażeniu zaś naprężenia szwu $d - d$ wejść τ_1^* i τ_3^* , szwu $e - e$ naprężenia τ_2^* i τ_3^* , szwu zaś $f - f$ albo naprężenia τ_1^* i τ_2^* albo też τ_2^* i τ_3^* . Twierdzenie o krążeniu trzeba tu będzie zastosować trzykrotnie, a to dla części I, II i III. Wypisując je należy zważyć, że zwroty krążeniowe s nie będą zawsze zgodne ze zwrotami s^* , które przyją-

to przy ustawianiu równań dla τ_n^* . Położenie środka sztywności znajdziemy z zastosowania warunku redukcyjnego momentów dla punktu O.

Gdy siła T jest ściśle poprzeczna, tj. gdy pokrywa się ona z główną środkową osią bezwładności przekroju y należy do rozwiązania dołączyć dodatkowe naprężenia pochodzące od momentu skręcającego $N = -Tc$. Służyć tu winny zasady podane w punkcie poprzednim. Przekroje jednospójne otrzymują z rozwiązania dodatkowego niekiedy znaczne naprężenia. Przekroje wielospójne są na ogół niezbyt czułe na ten dodatek.

Podamy na zakończenie metodę eksperymentalnego pomiaru naprężeń przy nierównomiernym zginaniu. Jest to znów metoda wyzyskująca analogię membrany. Punkt wejścia stanowią równania (70.11), (73.11) i (74.11). Najprościej przyjąć wypadek niewirowy $\psi' = 0$, a ze znalezionych składowych τ_x, τ_y wyznaczyć na końcu mimośród c siły T , odpowiadający takiemu założeniu. Sprowadzenie siły T do środka przekroju jest - jak wiadomo - identyczne z rozwiązaniem problemu skręcania momentem $-Tc$, który to problem można również rozwiązać metodą błonową. Wiadomo nam jest z poprzedniego ustępu, że przy zastosowaniu stosowanej podziałki dymensyjnej prawa strona równania (73.11) stanowi obciążenie błony. Ponieważ jest tu ono liniowo zmienne, zatem zastosować należy obciążenie ciężką cieczą, przyjmując poziome zwierciadło w odpowiedniej wysokości nad membranę ustawioną pionowo. Przyjmując stosowane B w równaniu (73.11) możemy też doprowadzić do skreślenia dodajnika proporcjonalnego względem x , czyli zastosować obciążenie o stałym natężeniu. Wreszcie czyniąc $C = 0$ możemy w ogóle błony nie obciążać. Oczywiście pamiętać należy o tym, że ma ona być na wstępie równomiernie napięta w dwóch kierunkach. Na ogół błona mydlana nie nadaje się tu i stosujemy gumową. Kreśląc na niej koło przed napięciem możemy łatwo skontrolować, czy napięcie jest istotnie równomierne w obu kierunkach. Brzeg błony nie może tu - jak przy badaniu skręcania - tworzyć krzywej płaskiej lecz według (74.11) należy go umocować nad zamkniętą krzywą przestrzenną, wyciętą np. w odpowiednio wygiętej blaszce miedzianej. Tylko nachylenie ypsilonowe błony jest we wspomnianej podziałce naprężeniem τ_y . Nachylenie iksowe stanowi tylko część odnośnego naprężenia, jak o tym poucza zestawienie (70.11). Brakującą resztę $3Bx^2 + 2Cx + D - \frac{Ty^2}{2I}$ należy - zresztą bez żadnych trudności - wyznaczyć rachunkowo, stosując konsekwentnie stałe jak przy ustalaniu brzegu (74.11). Podobnie jak przy skręcaniu można przy nierównomiernym zginaniu również na drodze eksperymentu membranowego znaleźć rozwiązanie dla przekrojów niejednospójnych.

Zaopatrzymy rozważania tego ustępu kilku rozważaniami końcowymi. Przykłady 1.11-4.11 pouczają - jak to podano w formule (19.11) - że w wypadku zgięcia bez owinięcia ψ' naprężenie styczne przekrojów litych co najwyżej osiąga wartość $\tilde{\alpha} \cdot \frac{T}{A}$. Potwierdzają to również rozważania i przykłady dotyczące tego rodzaju zgięcia przekrojów cienkościennych. Wiadomo nam jest, że naprężenia normalne σ wynoszą $\frac{M}{X}$, gdzie X jest nośnikiem zgięcia. Można jest o prętach pryzmatycznych, tj. posiadających wszędzie - a więc rów-

niez w miejscu $M = 0$ - stały przekrój A. Aktualne jest zatem obliczanie stosunku największego τ do największego σ . Najwidoczniej jest on równy $\tilde{\alpha} \frac{T}{M} \frac{X}{A}$, lecz M jest rzędu $T l$, gdzie l jest proporcjonalne do długości pręta. Analogicznie jest X rzędu $A d$, gdzie d jest proporcjonalne do poprzecznego rozmiaru pręta. Przeto konstatujemy:

$$\frac{\tau}{\sigma} \approx \frac{d}{l}, \quad (86.11)$$

czyli że poszukiwany stosunek jest rzędu $\frac{d}{l}$. Ponieważ w przypadkach podstawowych wykluczamy możliwość nadmiernie skróconego pręta, przeto wykładnik tego stosunku jest liczbą małą w porównaniu do 1. Widzimy stąd, że obecność naprężenia τ należy u prętów długich uwzględniać tylko w tych wypadkach, gdzie wyteżenie, spowodowane obecnością τ , jest wielokrotnie większe od wyteżenia spowodowanego naprężeniem σ . Wypadek taki może zaistnieć w belce betonowej, przy oczywistym założeniu, że ciągnięcia zostały w tym układzie przyjęte przez podłużne umacniające pręty stalowe. Wtedy nawet okaże się, że trzeba będzie analogicznymi wzmocnieniami uwzględnić obecność τ . Gdy zgięciu towarzyszy owinięcie, naprężenia styczne w pewnych miejscach doznają pomniejszenia, lecz w innych powiększenia. Specjalnie uczulone są na tę zmianę cienkościenne profile jednoczępne. Wprawdzie i obecnie rząd (86.11) jest zachowany, niemniej jednak zwrócić tu trzeba uwagę na to, że warunki w takich wypadkach wybitnie się pogarszają.

Weźmy pod uwagę zagadnienie nierównomiernie zginanego pręta o przekroju prostokątnym wysokości h . Wiemy, że odnośne składowe wynoszą: $\sigma_z = \sigma = \frac{M}{I} y$, $\tau_x = \tau = \frac{3}{2} \frac{T}{A} \left(1 - \frac{4y^2}{h^2}\right)$, $\tau_y = 0$. Możemy wobec tego w płaszczyźnie xy wyznaczyć wzorem (14.2) $\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2\tau}{\sigma}$ względnie analogicznymi (15.2) $\operatorname{tg} \alpha_1 = \left(\frac{dy}{dz}\right)_1$ kierunki naprężeń głównych σ_1 jak i wzorem (16.2) ich wartości. Tak np. dla $y = 0$ jest $\sigma = 0$, czyli $\alpha_1 = \pi/4$, $\alpha_2 = -\pi/4$ zaś dla $y = \pm h/2$ jest $\tau = 0$, czyli $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \pi/2$. Daje nam to już pewne pojęcie o przebiegu trajektorii. Jedna z nich wychodząc stycznie z górnej krawędzi pręta zakrzywia się ku osi pręta, przecinając ją pod $\pi/4$ i zmierzając ku dolnej krawędzi, którą przecina ortogonalnie. Druga przebiega analogicznie, wychodząc stycznie z dolnej krawędzi. Wiadomo nam jest, że naprężenia główne są naprężeniami ekstremalnymi. W rozważanym wypadku jedno z nich jest ciągiem, drugie cistem. W materiale kruchym, jak np. beton, ciągnięcia przenosimy wkładkami stalowymi. Widzimy, że w warstwach skrajnych winny one przebiegać równoległe do osi pręta i odginać się stosownie w strefę środkową i drugą skrajną.

Zarówno rozważania teoretyczne jak i przykłady, np. 7.11, 8.11 pouczają, że na wielkość przemieszczeń v osi pręta obecność siły T ma lub nie ma wpływu. Znaczenie przeto ma rozpatrzenie wpływu tej obecności na posunięcie pręta. Uwidacznia się ono albo w nachyleniu v' osi, albo

w średnim odchyleniu w_* przekroju od położenia normalnego względem osi. Przykłady powyższe pouczają, że stosunek $v_T' : v_m'$ lub $w_{*T}' : w_{*M}'$ jest rzędu $\frac{\alpha_{*T}'}{GA} : \frac{Ml}{EI}$. Skoro zaś M jest rzędu $T l$, I rzędu Ad^2 , zaś $E/G = 2(1 + \mu)$, przeto ostatecznie zanotować możemy:

$$\frac{v_T'}{v_M'} = \frac{w_{*T}'}{w_{*M}'} \approx \left(\frac{d}{l}\right)^2, \quad (87.11)$$

co jest pomijalne w porównaniu z 1. Dopiero u prętów nadmiernie skróconych - co w tym punkcie wykluczaliśmy - stosunek ten mógłby ewentualnie zasługiwać i to na niewielką uwagę.

Jest oczywiście rzeczą przykrą po tylu trudach dojść do przekonań (86.11) i (87.11). Trzeba jednak pamiętać o tym, że dociekania teoretyczne nie muszą iść w parze z korzyściami ekonomicznymi. Zyskaliśmy cenny dla przyszłych rozważań jak i dla wiedzy konstrukcyjnej pogląd na rzecz, utrwaliśmy sobie pewne wielce interesujące zjawiska kinematyczne i mechaniczne - i to jest warte bardzo wiele.

Gdy materiał pręta nie podlega prawu Hooke'a albo też, gdy przekroczona została granica jego ważności, teoria nierównomiernego zginania nader komplikuje się, nawet jeśli założymy, że na stan napięcia składają się bez zmiany tylko trzy naprężenia τ_x , τ_y , σ_z - jak zakłada się z konieczności celem uproszczenia zagadnienia. Jako prawa wiążące przyjąć należy z braku czegoś lepszego wykres $\sigma = f(\epsilon)$, uzyskany z jednoosiowego rozciągania, nadto wykres $\tau = g(\gamma)$ uzyskamy ze skręcania cienkościennej rury. Ogólne zasady postępowania muszą odpowiadać postulatowi mechaniki układów odkształcalnych. Należy więc spełnić równania równowagi i nierozdzielności oraz stosowne warunki brzegowe. Wynik końcowy prowadzi i tu do wniosku, że wpływ siły poprzecznej jest u prętów długich mały. Nie będziemy z braku miejsca rozwijać tej teorii. Kilka dodatkowych uwag zamieścimy w następnym punkcie rozdziału.

12. SUPERPOZYCJA PRZYPADKÓW PODSTAWOWYCH

Rozważyliśmy szczegółowo następujące przypadki podstawowe prętów przy-
 matycznych: Równomierne rozciąganie względnie ściskanie, proste równomier-
 ne zginanie, ukośne równomierne zginanie, mimośrodkowe równomierne rozcią-
 ganie względnie ściskanie, równomierne skręcanie, liniowo zmienne zgina-
 nie bez owinięcia, wreszcie liniowo zmienne zginanie z owinięciem. Wprowa-
 dziliśmy następujące terminy geometryczne: w y d ł u ż e n i e względ-
 nie s k r ó c e n i e w' , z a k r z y w i e n i e φ' lub ψ' , o w i-
 n i ę c i e ϑ' , p o s u n i ę c i e v' lub u' , o d c h y l e n i e
 w'_x l i b w'_y . Nie mogąc się ze względów praktycznych pogodzić z warun-
 kami podporowymi de Saint-Venanta wprowadziliśmy z dociekań energetycz-
 nych pojęcie z a s t ę p c z e g o p r z e k r o j u p ł a s k i e-
 g o i dla niego ś r e d n i e o d c h y l e n i e w''_x lub w''_y
 - zerowe przy skręcaniu, ewentualnie różne od zera przy równomiernym ści-
 naniu, czyli l i n i o w o z m i e n n y m z g i n a n i u. Podaliśmy
 przy każdej sposobności aktualne wyrażenie dla energii sprężystości.

Nic nie stoi na przeszkodzie superpozycji powyższych wypadków, którą
 zresztą już kilkakrotnie zastosowaliśmy np. przechodząc od zgięcia proste-
 go do ukośnego, od rozciągania osiowego do mimośrodkowego, od zgięcia bez
 owinięcia do zgięcia z owinięciem. Równie łatwo możemy stosować inne kom-
 binacje. Należy pamiętać, że w zastosowanym przez nas i powszechnie przyję-
 tym definiowaniu pojęć podstawowych kolejno sobie odpowiada:

- rozciąganiu siłą podłużną S - wydłużenie w' ,
- ściskaniu siłą podłużną S - skrócenie w' ,
- pojedynczemu zginaniu momentem M_x lub M_y -
- pojedyncze zakrzywienie φ' lub ψ' ,

skręcaniu momentem N - owinięcie ϑ' , j e d n a k p o j e d y n-
 c z e m u ś c i n a n i u s i ł ą m i m o p r z e c z n ą T_y lub T_x , przechodzącą przez
 środek sztywności (c,d) - p o d w ó j n e p o s u n i ę c i e $v' + w''_x$ i u' lub
 $u' + w''_y$ i v' z w y k l u c z e n i e m o w i n i ę c i a ϑ' m i m o i s t n i e-
 nia momentu skręcającego $T_c - T_d$, wreszcie p o j e d y n c z e m u
 ś c i n a n i u s i ł ą p o p r z e c z n ą T_y lub T_x , leżącą na osi y lub x - p o-
 d w ó j n e p o s u n i ę c i e $v' + w''_x$ i u' oraz owinięcie ϑ' lub $u' + w''_y$ i
 v' a także owinięcie ϑ' , odpowiadające momentowi skręcającemu $T_d - T_c$,
 mimo iż momentu tego n i e m a, bo $(T_c - T_d) + (T_d - T_c) = 0$.

Należy przy tym zawsze pamiętać o tym, że zarówno wpływy mechaniczne
 T_x, T_y, S, M_x, M_y, N jak i skutki geometryczne $u', v', w', w''; \varphi', \psi', \vartheta'$ zde-
 finiowane zostały w układzie prostokątnym ś r o d k o w y c h i g ł ó w-
 n y c h osi ukształtowania pręta.

Superpozycja w przypadku zagadnienia pręta prostego polega tu na tym, że dołączając mechaniczne wpływy musimy pamiętać o dołączeniu wyżej scharakteryzowanych skutków geometrycznych. Najogólniejsze - w literaturze nieznane - wyrażenie na energię sprężystości ma przy tym postać:

$$\begin{aligned}
 W' = & \frac{S^2}{2EA} + \frac{M_x^2}{2EI_x} + \frac{M_y^2}{2EI_y} + \\
 & + \frac{\alpha_y^* T_y^2}{2GA} + \frac{\alpha_x^* T_x^2}{2GA} + \frac{\beta_z^* T_x T_y}{GA} + \\
 & + \frac{(T_x d - T_y c)^2}{2GI} + \\
 & + \frac{N^2}{2GI} + \frac{N(T_x d - T_y c)}{GI} \quad *
 \end{aligned}
 \tag{1.12}$$

Pierwszy wiersz pochodzi od obecności siły podłużnej S i momentów zginających M_x, M_y . Wpływy te separują się między sobą i nie ujawiają w dalszych wierszach, separując się więc dalej. Wiersz drugi pochodzi od mimościnania bez owinięcia. W wierszu tym trzeci dodatek jest mieszany. Odpada on dla przekrojów posiadających jedną oś symetrii. Współczynniki $\alpha_x^*, \alpha_y^*, \beta_z^*$ znane nam są z (32.11) i (38.11), wiersz cały zaś z (37.11). Wiersz trzeci należy dołączyć, gdy siły T_x, T_y przesuwamy ze środka sztywności do położenia środkowego. Współrzędne c, d znane nam są z (47.11), a wiersz ten z (52.11). Gdy $c = d = 0$ oba wypadki ścinania niczym się między sobą nie różnią. Wiersz ostatni pochodzi od obecności momentu skręcającego N . Pierwszy dodatek jest nam dobrze znany. Drugi pochodzi stąd, że przy $c \neq 0, d \neq 0$ siły poprzeczne T_x, T_y wywołują owinięcie ϑ^* . Wtedy moment skręcający wykonuje pracę na tym obrocie. Ponieważ owinięcie dodatkowe jest od N niezależne, przeto w dodatniku ostatnim brak jest czynnika $1/2$.

W caawianej superpozycji odróżniamy pod względem wytrzymaniałościowym przypadki proste od złożonych. Uświadomimy się tu, że przez proste rozumiemy teoretycznymi te, w których stan napięcia jest jednoosiowy. Przeto złożonymi są te, w których stan napięcia jest dwuosiowy. Jak wiadomo pręta trójosiowego w teorii podstawowych przypadków nie ma. Stosujemy ten podział, kierując się następującymi względami. W ustępie czwartym wykazaliśmy, że z dostateczną dokładnością potrafimy wyrazić wyrażenie matematyki w dowolnym stanie napięcia, gdy znamy jej zachowanie się pod tym względem w jednoosiowym rozciąganiu względnie jeszcze i w takim ścisnaniu. W tym sensie znajomość danych doświadczalnych np. K_r, ϵ_c wystarcza

nam do znalezienia wszelkich pozostałych innych, więc np. K_s . Uważamy, że hipotezy wyteżenia są ważne równie dobrze dla stanów jednorodnych jak i niejednorodnych, czyli że mają one zastosowanie nie tylko dla m a t e r i i, lecz również dla utworzonego z niej u k ł a d u m a t e r i a l n e g o. W układzie materialnym wyteżenie przebiega niejednorodnie. Niebezpieczne są te miejsca układu, w których jest ono największe. Znajomość dat K_r , K_c pozwala nam oszacować wielkość niebezpieczeństwa w tych miejscach, a dobór rozmiarów układu stosownie je ograniczyć.

Fakt istnienia w praktyce konstruktorskiej pojęć w rodzaju (36.8) względnie (37.8) zamiast (38.8) nie przeczy powyższej opinii, dowodzi jedynie niedostatecznego rozwoju teoretycznego mechaniki układów odkształcalnych. Chcielibyśmy - jak o tym informowaliśmy w punkcie czwartym - wprowadzić w rachunek b e z p i e c z n y u d ź w i g, do czego jest potrzebny nośnik X_k . Nie chcąc stosować sposobu obliczania polegającego na uwzględnieniu tzw. b e z p i e c z n e g o n a p r ę ż e n i a względem bezpiecznego wyteżenia, konstruktorzy wprowadzają namiastkę poprzedniego sposobu w postaci parametrów układowych K_g w miejsce materiałowych K_r . Wyjaśniliśmy w odnośnym miejscu, na czym rzecz polega. Równie dobrze można - jeśli Z oznacza sprężysty, a Z_k wytrzymałościowy nośnik skręcania, N_n niszczący moment skręcający, K_s wytrzymałość skrętu - wprowadzić w miejsce formuły teoretycznej:

$$K_s = \frac{N}{Z_k} \quad (2.12)$$

wzór praktyczny:

$$K_n = \frac{N}{Z}, \quad (3.12)$$

w którym K_n nazywane bywa wytrzymałością na skręcanie. I tutaj - jak przy zgięciu - trudność obliczenia Z_k spowodowała do wykorzystania wzoru (3.12). I tutaj jednak - jak przy zgięciu - musi się przy podaniu daty K_n określić także postać geometryczną przekroju, dla którego ta data obowiązuje. Przyjście z tą datą bez zmiany z koła na prostokąt powoduje zmianę współczynnika pewności.

Rozumiemy więc ostatecznie następująco: Gdyby teoria zginania była nam w każdym stadium, więc z włączeniem etapu niszczącego znana, to zabezpieczenia zgięcia dokonalibyśmy datą K_r względnie K_c , więc datą pochodzącą z jednoosiowego doświadczenia. Przypadek ten jest więc p r o s t y. Gdyby równie opanowana była teoria skręcania, to korzystalibyśmy z daty K_s . Ta jednak wymaga d o d a t k o w e g o jej wyznaczenia z krócej z miarodajnych hipotez. Przeto skręcanie jest przypadkiem z i e z o n y m. W tym samym sensie złożone są wszelkie zagadnienia dwuosowego stanu napięcia.

Jeśli chodzi o przypadek skręcania, to przykłady 3.4 i 9.4 określają granicę plastyczności k_s zależnie od hipotezy jako $k_s = k/2$ lub $k_s = k/\sqrt{3}$. Obowiązuje dla ciągliwych metali. Dla materiałów kruchych jak np. dla żeliwa przykłady 5.4, 7.4 i 10.4 prowadzą do wniosku $K_s = \frac{K_c K_r}{K_c + K_r}$ lub $K_s = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{K_c K_r}{K_c + K_r}$. Przyjmując dla materiałów ciągliwych stopień pewności n , tj. $\tau = k_s/n$, a dla kruchych N , tj. $\tau = K_s/N$ oraz wzór (2.12), załatwiamy rzecz całkowicie.

Przypadek jednoczesnego zginania i skręcania rozpatrzmy dla pręta o przekroju kołowym¹⁾.

1) Ostatnie zdanie jest zapowiedzią nie napisanej już dalszej części "Mechaniki ciał odkształcalnych". Zostawione zostało dla wierności wobec wydanego tekstu (przyp. wyd.).

WYKAZ WAŻNIEJSZYCH PRAC NAUKOWYCH
PROF. DRA INŻ. WŁODZIMIERZA BURZYŃSKIEGO

- [1] W kwestii najtańszej belki żelbetowej - "Czasopismo Techniczne", Lwów 1923.
- [2] Proste uzasadnienie twierdzenia Mohra - "Czasopismo Techniczne", Lwów 1926.
- [3] Studium nad hipotezami wyężenia (dysertacja doktorska) - Akademia Nauk Technicznych, Lwów 1928, s. 192.
- [4] Ogólna formuła wytrzymałościowa - "Przegląd Techniczny", 1929.
- [5] Ueber Anstrengungshypothesen - Schweizerische Bauzeitung, Bd 95, Nr 7, 1930, s. 87-88.
- [6] Teoretyczne podstawy hipotez wyężenia - "Czasopismo Techniczne", Lwów 1929, s. 41.
- [7] O wyboczeniu posprężystym - "Czasopismo Techniczne", Lwów 1930, s. 1-36.
- [8] Kilka słów o zastrzykach cementowych - "Czasopismo Techniczne", Lwów 1930.
- [9] W sprawie wyboczenia - 2 art. dyskus. - "Czasopismo Techniczne", Lwów 1930.
- [10] Z teorii łuku bezprzegubowego - Księga pamiątkowa ku czci Prof. dr h.c. Thulliego. Pierwsza Związkowa Drukarnia, Lwów 1931, s. 1-21.
- [11] O znanych i nieznanach ograniczeniach stosowalności twierdzenia Menabrea-Castigliano - "Czasopismo Techniczne", Lwów 1931, s. 24.
- [12] W sprawie przejawów plastyczności - "Czasopismo Techniczne", Lwów 1931.
- [13] W sprawie naprężeń w przegrodach - 2 art. dyskusyjny - "Czasopismo Techniczne", Lwów 1931.
- [14] O rozwinięciu potencjału sprężystości i zastosowaniach (praca habilitacyjna) - Akademia Nauk Technicznych, Lwów 1932, s. 131.
- [15] O dwóch twierdzeniach minimalnych teorii sprężystości i zastosowaniu ich do rozwiązań przybliżonych - "Czasopismo Techniczne", Lwów 1933, s. 1-48.
- [16] Przybliżone metody teorii sprężystości - "Życie Techniczne" z. 4, r. X, 1934, s. 2-4.
- [17] Nowa metoda obliczania i wykonania łuku betonowego i żelbetowego - Referat na II Zjazd Inżynierów Budowl. w Katowicach 15-17. II. 1936, s. 1-4.
- [18] Most łukowy żelbetowy na Sole w Tresnej-Czernichowie - "Czasopismo Cement" - 1936.
- [19] Na marginesie nowej książki Prof. dr A. Łomnickiego - "Czasopismo Techniczne", Lwów 1936, (Recenzja).
- [20] W sprawie obliczenia cienkościennych walczaków nitowanych - "Technika Ciepła", Warszawa 1937, s. 40.
- [21] Recenzja o "Mechanice Technicznej" Doc dr St. Neumarka - "Czasopismo Techniczne", Lwów 1937.

- [22] Kilka zagadnień z dziedziny płyty kołowej osiowo symetrycznie obciążonej - "Technika Ciepła" Nr 1, V. XVI, Warszawa 1938, s. 11.
- [23] Recenzja o Mechanice z zakresu szkół akademickich dr Stefana Banacha - "Czasopismo Techniczne", Lwów 1938.
- [24] Recenzja o "Einführung in die technische Schwingungslehre" dr Ing.habil. K. Klotter - "Czasopismo Techniczne", Lwów 1938.
- [25] W obronie słusznych pojęć i dobrych zwyczajów w nauce - "Czasopismo Techniczne", Lwów 1939.
- [26] Moment - "Przegląd Mechaniczny" Nr 7-9, 1949, "Notatka", s.1-22.
- [27] Skręcenie bez skręcenia - Przegląd Mechaniczny, 1949, s. 1-14.
- [28] Z teorii cienkościennych powłok obrotowych. Komitet Uczczenia Zasług Naukowych Prof. dr inż. Maksymiliana T. Hubera Gdańsk - Politechnika 1950, s. 1-34.
- [29] Mechanika ogólna - Skrypt wykładów Wyd. Nakładem Sekcji ZSI i SBPS Wydziałów Politechnicznych w Krakowie. Kraków 1947, s. 224.
- [30] Wytrzymałość materiałów - Skrypt wykładów na Wydziale Inżynierii.
- [31] Nowy sposób rozwiązania układów liniowo-sprężystych statycznie niewyznaczalnych metodą modelową - Ref. wygł. na Zjeździe Inżynierów Bud. Gdańsk 1949.
- [32] O niedomaganiach i koniecznych uzupełnieniach de Saint-Venantowskiej teorii prętów prostych - Prace Wrocławskiego Towarzystwa Naukowego Seria B. Nr 2, Wyd. Nakładem Wrocławskiego Towarzystwa Naukowego, Wrocław 1951, s. 75.

MECHANIKA CIAŁ ODKSZTAŁCALNYCH

S t r e s z c z e n i e

W pracy sformułowano zagadnienia mechaniki technicznej w aspekcie nośności układów.

Wychodząc z założenia, że najogólniejszym celem mechaniki technicznej jest wyznaczenie współczynnika pewności rzeczywistych układów materialnych, przeanalizowano stan odkształcenia i naprężenia, własności reologiczne, wytężenie i bezpieczeństwo układów odkształcalnych.

Następnie, wykorzystując zależności wyprowadzone w rozdziale pierwszym, przedstawiono ciąg różnych obciążeń prętów prostych, a między innymi mimośrodowe rozciąganie, liniowe zmienne zginanie aż do superpozycji przypadków podstawowych.

Poszczególne zagadnienia pracy są bogato ilustrowane przykładami o dużym znaczeniu praktycznym. W przeliczonych przykładach starano się podać rozwiązania ogólne, natomiast w zakończeniu każdego podrozdziału zamieszczono problemy do opracowania.

Praca ta należy do pośmiertnej spuścizny Autora i zbiega się z dwudziestolecie Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej, którego prof. W. Burzyński był członkiem honorowym.

МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЮЩИХСЯ ТЕЛ

Р е з ю м е

В работе сформулированы проблемы технической механики в аспекте предельной нагрузки систем.

Исходя из того, что самой общей целью технической механики является определение коэффициента запаса прочности действительных материальных систем, проанализированы: состояние деформации и напряжения, реологические свойства, натяжение и безопасность деформируемых систем.

Используя зависимости, выведенные в первом разделе, представлена дальше последовательность разных нагрузок прямых стержней, а между прочим внецентренное растяжение, линейное переменное изгибание вплоть до суперпозиции основных случаев.

Отдельные проблемы работы богато иллюстрируются примерами, имеющими большое практическое значение. В приведённых примерах поданы общие решения, а в конце каждого подраздела находятся проблемы для разработки.

Эта работа принадлежит к посмертному наследию Автора и совпадает с двадцатилетием Польского общества теоретической и прикладной механики, почётным членом которого был проф. В. Бужиньский.

MECHANICS OF DEFORMABLE BODIES

S u m m a r y

The work presents problems of technical mechanics in the aspects of the carrying capacities of systems.

Assuming that the most general aim of technical mechanics is the determination of the reliability factor for real systems strain and stress states, rheologic properties, efforts and the safety of deformable systems have been analysed.

Basing on the dependencies derived in Chapter I a sequence of loads for straight rods as e.g. eccentric tension, rope variable bending and superpositions of basic cases. Particular problems are widely illustrated by valuable practical examples.

Calculated examples provide general solutions and at the end of each section problems to be solved have been included.

This is a posthumous work of the Author and it coincides with the twentieth anniversary of the Polish Society of Theoretical Mechanics of which Professor W. Burzyński was a honorary member.