ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 2000

Seria: AUTOMATYKA z. 131 Nr kol. 1476

Ryszard GESSING
Politechnika Śląska

TRANSFORMACJA MODALNA W ZASTOSOWANIU DO BADANIA WŁASNOŚCI DYSKRETNEGO REGULATORA LQ

Streszczenie. Transformacja modalna bazująca na podprzestrzeniach modów została zaproponowana i wykorzystana do badania własności dyskretnego regulatora LQ z dynamicznym sprzężeniem od wyjścia obiektu. Pokazano, że równanie charakterystyczne układu zamkniętego z tym regulatorem zachowuje stabilne niezerowe pierwiastki układu z regulatorem LQ i sprzężeniem od stanu, a otrzymany obserwator jest optymalny ze skończonym czasem zanikania (ang. dead-beat).

MODAL TRANSFORMATION USED FOR RESEARCHING THE PROPERTIES OF DISCRETE-TIME LQ REGULATOR

Summary. A transformation based on the subspace of modes is proposed and used for researching the properties of discrete-time linear-quadratic regulator (DLQR) with dynamic output feedback. It is shown that the characteristic equation of the system with this regulator retains the stable roots of the system with DLQR and state feedback, while the appearing observer is optimal and dead-beat.

1. Wprowadzenie

W niniejszej pracy istotną rolę odgrywają podprzestrzenie, w których występują mody rozumiane jako funkcje występujące w macierzy podstawowej (tranzycji) układu. Wykorzystując te podprzestrzenie zaproponowano transformację modalną wiążącą ze sobą równoważne modele i problemy LQ sformułowane w przestrzeniach stanu.

Rozwiązanie klasycznego problemu LQ ma postać prawa sterowania ze sprzężeniem od stanu. Można je wykorzystać, gdy wszystkie współrzędne stanu są mierzone, co zazwyczaj nie zachodzi. Gdy tylko wyjście obiektu jest mierzone, wtedy prawo sterowania ze sprzężeniem od wyjścia można wykorzystać, gdy włączamy do układu odpowiedni obserwator stanu.

W niniejszej pracy model regulatora-obserwatora został wyprowadzony z rozwiązania odpowiedniego problemu LQ, w którym istotną rolę odegrało określenie współrzędnych stanu i transformacja modalna. Wynikiem jest układ z dynamicznym sprzężeniem od wyjścia obiektu, stosowanym, gdy tylko to wyjście jest mierzone, i zawierającym opymalny obserwator ze skończonym czasem zanikania (ang. dead-beat) [1].

Główne wyniki pracy to propozycja współrzędnych stanu i transformacji modalnej, które razem ze stosowaną techniką LQ określają dynamiczne sprzężenie od wyjścia obiektu zawierające optymalny obserwator typu dead-beat, oraz pokazanie, że otrzymany układ zamknięty ma takie same stabilne, niezerowe pierwiastki równania charakterystycznego, jak układ zamknięty z regulatorem LQ i sprzężeniem od stanu.

2. Transformacja modalna

Rozważmy układ ciągły / dyskretny - w czasie opisany równaniem

$$\dot{\hat{x}}(t) = \hat{A}\hat{x}(t) \quad / \quad \hat{x}(t+1) = \hat{A}\hat{x}(t) \tag{1}$$

gdzie $\hat{x} \in R^{n+m}$, $n > 0$, $m > 0$, $\hat{A}$ jest stałą macierzą, $t \in R$ / $t = 0, 1, 2, ...$ jest czasem ciągłym / dyskretnym.

W literaturze z pojęciem modu związane są różne interpretacje. W niniejszej pracy przez mod λ_i układu (1) rozumiemy funkcję związaną z wartością własną λ_i macierzy $\hat{A}$ i występującą w macierzy podstawowej $\exp(\hat{A}t)$ / $\hat{A}^t$. Na przykład mod dla pojedynczej, rzeczywistej wartości własnej λ_i jest określony przez funkcję $\exp(\lambda_i t)$ / λ_i^t. Podprzestrzeń modu λ_i jest to zbiór wszystkich warunków początkowych $\hat{x}_0$, które pobudzają tylko mod λ_i i w której ten mod występuje. Na przykład dla pojedynczej wartości własnej λ_i podprzestrzeń modu λ_i jest podprzestrzenią jednowymiarową rozpiętą na wektorze własnym związanym z λ_i.

Dla zespolonych wartości własnych $\lambda_{ik} = \delta \pm j\omega$ i związanych z nimi zespolonych wektorów własnych $v_{ik} = q \pm jr$, dwuwymiarowa podprzestrzeń modu (λ_i, λ_k) jest podprzestrzenią rozpiętą na wektorach q i r, natomiast mod (λ_i, λ_k) jest określony przez macierz $\exp(\Lambda_{ik}t)$ / Λ_{ik}^t gdzie $\Lambda_{ik} = [\delta, \omega; -\omega, \delta]$ - macierz 2×2 zapisana w konwencji MATLAB'a.

Jeżeli λ_i jest $\bar{m}$-krotną rzeczywistą wartością własną, to macierz Λ formy kanonicznej zawiera $m \times m$ wymiarową, $m \leqslant \bar{m}$ klatkę Jordana (jedną lub kilka - w tym ostatnim przypadku suma wymiarów m klatek jest równa $\bar{m}$) w postaci

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_i & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & \lambda_i \end{bmatrix} \tag{2}$$

Z każdą klatką Jordana (2) związany jest m-wymiarowy mod λ_i o postaci J^t. Bazę $v_1, v_2, ..., v_m$ podprzestrzeni tego modu można wyznaczyć z następujących zależności

$$\hat{A}v_m = \lambda_i v_m, \quad \hat{A}v_{m-1} = \lambda_i v_{m-1} + v_m, ..., \hat{A}v_1 = \lambda_i v_1 + v_2 \tag{3}$$

z których dla $\lambda_i = 0$ otrzymujemy

$$\hat{A}v_m = 0, \hat{A}^2 v_{m-1} = 0, ..., \hat{A}^m v_1 = 0 \tag{4}$$

Zależności (3) można wyprowadzić z równania $\hat{A}T = T\Lambda$ wynikającego z określenia macierzy transformacji T zbudowanej z wektorów $v_1, v_2, ..., v_m$ oraz macierzy Λ formy kanonicznej [4].

Należy podkreślić, że jeżeli $\hat{x}_0$ należy do podprzestrzeni modu λ_i, to rozwiązanie równania (1) ma postać $\hat{x}_0 \exp(\lambda_i t)$ / $\hat{x}_0 \lambda_i^t$. To właśnie oznacza, że takie $\hat{x}_0$ pobudza tylko mod λ_i.

Rozważmy inny układ

$$\dot{\bar{x}}(t) = \bar{A}\bar{x}(t) \quad / \quad \bar{x}(t+1) = \bar{A}\bar{x}(t) \tag{5}$$

w którym $\bar{x} \in R^n$ a macierz $\bar{A}$ jest stała. Mody układu (1), które występują również w (5), nazywamy modami zachowanymi, a mody układu (1), które nie występują w (5) - modami pominiętymi. Niechaj

$$\bar{x} = H\hat{x} \tag{6}$$

określa transformację z macierzą prostokątną H, $n \times (n+m)$ wymiarową. Niechaj wybrane wartości własne λ_i, $i = n+1, n+2, ..., n+m$ macierzy $\hat{A}$ określają m zer wielomianu $p(s) = (s - \lambda_{n+1})(s - \lambda_{n+2})...(s - \lambda_{n+m})$ m-tego rzędu. Niechaj S^m określa w m-wymiarową podprzestrzeń modów R^{n+m}, związanych z tymi wartościami własnymi. Tak więc S^m jest iloczynem kartezjenskim podprzestrzeni modów związanych z zerami wielomianu $p(s)$. Niechaj $S^n \in R^{n+m}$ określa n-wymarową podprzestrzeń ortogonalną do S^m. Oznacza to, że każdy wektor z S^n jest ortogonalny do każdego wektora z S^m.

Lemat 1. Transformacja (6) przekształca układ (1) w (5) wtedy i tylko wtedy, gdy wektory wierszowe macierzy H tworzą bazę podprzestrzeni S^n ortogonalnej do S^m. Mody układu (1), których podprzestrzenie mają niezerowe rzuty na S^n, są zachowane w (5), a mody, których podprzestrzenie należą do S^m, są pominęte w (5).

Dowód. Zauważmy, że transformacja (6) przekształca (1) w (5) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje rozwiąznie $\breve{A}$ równania macierzowego

$$\breve{A}H = H\hat{A} \tag{7}$$

Rzeczywiście mnożąc obie strony (1) przez H lewostronnie i uwzględniając (7) i (6) otrzymujemy (5). Zauważmy także, że rozwiązanie $\breve{A}$ równania (7) istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy wektory wierszowe macierzy $\bar{H} = H\hat{A}$ są ortogonalne do S^m (czyli należą do S^n). Aby to pokazać, rozważmy dowolny wektor $v \in S^m$. Z (3) wynika, że $\hat{A}v \in S^m$, a więc $H\hat{A}v = \bar{H}v = 0$, co oznacza, że wiersze macierzy $\bar{H}$ są ortogonalne do S^m.

3. Model z rozszerzonym stanem

W dalszych rozważaniach zastosujemy transformację modalną do układów dyskretnych. Rozważmy obiekt opisany transmitancją dyskretną

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_{n-l}z^l + b_{n-l+1}z^{l-1} + ... + b_n}{z^n + a_1 z^{n-1} + ... + a_n} \tag{8}$$

gdzie $l < n$, $Y(z) = \mathcal{Z}[y(t)]$, $U(z) = \mathcal{Z}[u(t)]$, $\mathcal{Z}$ określa transformację Z; $y(t)$ i $u(t)$ są sygnałami wyjścia i wejścia, a $t = 0, 1, 2, ...$ określa czas dyskretny. Zakładamy, że licznik i mianownik transmitancji (8) są względnie pierwszymi wielomianami. Określamy współrzędne $(2n-1)$ - wymiarowego rozszerzonego stanu w postaci

$$\begin{aligned} &\hat{x}_1(t) = y(t), \qquad \hat{x}_2(t) = y(t-1), \quad \ldots, \quad \hat{x}_n(t) = y(t-n+1), \\ &\hat{x}_{n+1}(t) = u(t-1), \quad \hat{x}_{n+2}(t) = u(t-2), \quad \ldots, \quad \hat{x}_{2n-1}(t) = u(t-n+1) \end{aligned} \tag{9}$$

Zastępując w (9) t przez $t+1$, uwzględniając (9), jak również wynikające z (8) równanie

$$\begin{aligned} &y(t+n-m) + \ldots + a_{n-m}y(t) + a_{n-m+1}y(t-1) + \ldots + a_n y(t-m) = \\ &= b_{n-l}u(t+l-m) + b_{n-l+1}u(t+l-m-1) + \ldots + b_n u(t-m) \end{aligned} \tag{10}$$

otrzymujemy model z rozszerzonym stanem o postaci

$$\hat{x}(t+1) = \hat{A}\hat{x}(t) + \hat{B}u(t), \qquad y(t) = \hat{C}\hat{x}(t) \tag{11}$$

gdzie $\hat{x}(t) = [\hat{x}_1(t), \hat{x}_2(t), \ldots, \hat{x}_{2n-1}(t)]^T$, natomiast

$$\hat{A} = \left[\begin{array}{ccc|ccccc} -a_1 & \ldots & -a_{n-1} & -a_n & b_2 & \ldots & b_{n-1} & b_n \\ 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \hline 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{array}\right] \tag{12}$$

Pierwszy wiersz macierzy $\hat{A}$ wynika z (10) i (9), pozostałe wiersze wynikają bezpośrednio z określenia (9). $\hat{B}$ i $\hat{C}$ mają postać

$$\hat{B} = [b_1, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0]^T$$
$$\check{C} = [1, 0, 0, \ldots, 0] \tag{13}$$

Oczywiście, w (12), (13) $b_i = 0$ dla $1 \leqslant i \leqslant n-l-1$, co wynika z (8).

Zauważmy, że w macierzy $\hat{A}$ występuje $(n-1) \times (n-1)$ wymiarowa klatka Jordana (2) z $\lambda_i = 0$, zatem mamy

$$\det[z\hat{I} - \hat{A}] = z^m \det[z\bar{I} - \bar{A}] \tag{14}$$

gdzie $\bar{A}$ jest $n \times n$ wymiarową macierzą powstającą z $\hat{A}$ przez skreślenie $n-1$ ostatnich wierszy i kolumn, a $\hat{I}$ i $\bar{I}$ są macierzami jednostkowymi $(2n-1) \times (2n-1)$ i $n \times n$ wymiarowymi. Zatem macierz $\hat{A}$ ma n wartości własnych pokrywających się z biegunami transmitancji (8) i dodatkowo $(n-1)$-krotną wartość własną zerową. Transmitancja układu opisanego równaniem (11) zawiera czynnik z^m zarówno w liczniku, jak i w mianowniku. Można pokazać że układ (11) jest sterowalny, nieobserwowalny, ale jest odtwarzalny [3]. Ta ostatnia własność wynika z określenia (9) współrzędnych stanu.

4. Minimalna realizacja

Zastosujemy teraz transformację modalną (6), aby przekształcić model (4) do równania stanu opisującego tzw. minimalną realizację z minimalnym wymiarem wektora stanu. W dalszych rozważaniach macierz H będzie $n \times (2n-1)$-wymiarową macierzą transformacji o wierszach ortogonalnych do podprzestrzeni $(n-1)$-krotnego modu zerowego.

Twierdzenie 1. Załóżmy, że wektory wierszowe $n \times (2n-1)$-wymiarowej macierzy H transformacji (6) są ortogonalne do podprzestrzeni S^{n-1}, $(n-1)$-krotnego modu zerowego układu (11). Wtedy

1. Istnieją rozwiązania $\check{A}$ i $\check{C}$ równań

$$\check{A}H = H\hat{A}, \qquad \check{C}H = \hat{C} \tag{15}$$

2. Transformacja (6) przekształca model (11) do następujących równań stanu opisujących minimalną realizację

$$\check{x}(t+1) = \check{A}\check{x}(t) + \check{B}u(t), \qquad y(t) = \check{C}\check{x}(t) \tag{16}$$

gdzie

$$\check{B} = H\hat{B} \tag{17}$$

3. Oba modele (11) i (16) są opisane tą samą transmitancją dyskretną (8).

Dowód. 1. Z dowodu Lematu 1 wynika, że istnieje rozwiązanie $\check{A}$ pierwszego równania (15). Rozwiązanie $\check{C}$ drugiego równania (15) istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy $\hat{C} \in S^n$.

Aby wykazać tę ostatnią przynależność, zauważmy, że $(2n - i - 1)$-ty wiersz macierzy $\hat{A}^i$, $i = 1, 2, ..., n - 1$ pokrywa się z $\hat{C}$. Z warunków (4) wynika, że $\hat{C}$ jest ortogonalne do v_i, $i = 1, 2, ..., n - 1$, a więc również do S^m, zatem $\hat{C} \in S^n$.

2. Mnożąc obie strony równania (11) przez H lewostronnie i uwzględniając (6), (15) i (17) otrzymujemy równanie (16) opisujące minimalną realizację.

3. Wynika to z zastosowania transformacji Z do (11) po przekształceniach, w których uwzględnia się zależności $Hz\hat{I} = z\check{I}H$ i $\check{X}(z) = H\hat{X}(z)$; $\hat{X}(z)$ i $\check{X}(z)$ są transformatami Z wielkości $\check{x}(t)$ i $\hat{x}(t)$.

□

5. Regulator liniowo-kwadratowy

Dla układu (11) wprowadźmy kwadratowy wskaźnik jakości o postaci

$$\hat{J} = \sum_{t=0}^{N} [\hat{x}^T(t+1)\hat{Q}\hat{x}(t+1) + ru^2(t)], \qquad N \to \infty \tag{18}$$

gdzie $\hat{Q}$ jest $(2n - 1) \times (2n - 1)$ wymiarową macierzą symetryczną półdodatnio określoną, a r jest małą dodatnią liczbą. Rozwiązanie problemu LQ (11), (18) w stanie ustalonym, w postaci prawa sterowania ze sprzężeniem od stanu, jest określone przez:

$$u = -\hat{k}\hat{x} = -\hat{k}_1\hat{x}_1 - \hat{k}_2\hat{x}_2 - ... - \hat{k}_{n+m}\hat{x}_{n+m} \tag{19}$$

gdzie $\hat{k}$ jest $(2n - 1)$-wymiarowym wektorem wierszowym ze stałymi składowymi $\hat{k}_i$, $i = 1, 2, ..., 2n - 1$.

Podstawiając (9) do (19) oraz przenosząc wyrażenie zawierające u na lewą stronę otrzymujemy równanie różnicowe wiążące u z y. Po zastosowaniu transformacji Z otrzymujemy transmitancję dyskretną regulatora-obserwatora w postaci

$$\hat{R}(z) = -\frac{U(z)}{Y(z)} = -\frac{\hat{k}_1 z^{n-1} + \hat{k}_2 z^{n-2} + ... + \hat{k}_n}{z^m + \hat{k}_{n+1} z^{m-1} + ... + \hat{k}_{n+m}} \tag{20}$$

Regulator-obserwator (20) jest elementem dynamicznym mogącym być wykorzystywanym, gdy tylko wyjście y jest mierzone.

Uwaga 1. Zarówno model opisany równaniami stanu (11), (19) jak i model opisany transmitancjami (9), (20) opisują ten sam układ zamknięty $(2n-1)$-go rzędu.

Rzeczywiście model (11) z rozszerzonym stanem ma transmitancję (8), a dla stanu określonego przez (9) opisy (20) i (19) są równoważne.

Niechaj kwadratowy wskaźnik jakości dla obiektu (16) jest

$$\check{J} = \sum_{t=0}^{N}[\check{x}^T(t+1)\check{Q}\check{x}(t+1) + ru^2(t)], \qquad N \to \infty \tag{21}$$

gdzie $\check{Q}$ jest $n \times n$ wymiarową macierzą symetryczną, półdodatnio określoną. Rozwiązanie problemu LQ (16), (21), w postaci prawa sterowania ze sprzężeniem od stanu, jest określone przez:

$$u = -\check{k}\check{x} = -\check{k}_1\check{x}_1 - \check{k}_2\check{x}_2 - \dots - \check{k}_n\check{x}_n \tag{22}$$

gdzie $\check{x} = [\check{x}_1, \check{x}_2, \dots, \check{x}_n]^T$ a $\check{k} = [\check{k}_1, \check{k}_2, \dots, \check{k}_n]$.

Układ zamknięty złożony z obiektu (16) i sprzężenia od stanu (22) jest optymalny w stanie ustalonym i ma równanie charakterystyczne n-tego rzędu. Ale sprzężenie (22) może być wykorzystane tylko wtedy, gdy wszystkie współrzędne stanu $\check{x}_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ są mierzone, co zazwyczaj nie jest możliwe. Dlatego powstaje pytanie: jaka jest wzajemna relacja pomiędzy układami zamkniętymi (11), (19) i (16), (22) w przypadku gdy wskaźniki (18) i (21) są identyczne? Albo, czy z (22) można otrzymać transmitancję regulatora-obserwatora podobną do (20)?

6. Omówienie wyników

Niechaj $\hat{k} = [\hat{k}_1, \hat{k}_2, \dots, \hat{k}_{2n-1}]$ i $\check{k} = [\check{k}_1, \check{k}_2, \dots, \check{k}_n]$ są wektorami wzmocnień występującymi odpowiednio w (19) i (22). Niechaj $\hat{S}$ i $\check{S}$ są rozwiązaniem algebraicznego równania Riccatiego dla problemów LQ odpowiednio (11), (18) i (16), (21). Macierz $\check{S}$ $n \times n$ wymiarowa spełnia zatem następujące algebraiczne równanie Riccatiego

$$\check{S} = \check{Q} + \check{A}^T\check{S}\check{A} - \check{A}^T\check{S}\check{B}(r + \check{B}^T\check{S}\check{B})^{-1}\check{B}^T\check{S}\check{A}, \tag{23}$$

natomiast $\check{k}$ jest określone przez

$$\check{k} = -(r + \check{B}^T\check{S}\check{B})^{-1}\check{B}^T\check{S}\check{A} \tag{24}$$

Macierz $\breve{S}$ i wzmocnienie $\breve{k}$, odpowiednio $(2n-1)\times(2n-1)$ i $(2n-1)$-wymiarowe spełniają podobne równanie wynikające z (23) i (24) przez zastąpienie znaku "˘" przez "ˆ".

Równanie charakterystyczne układu zamkniętego (11), (19) ma postać

$$\det\left[z\hat{I} - \hat{A} + \hat{B}\hat{k}\right] = 0 \tag{25}$$

gdzie po lewej stronie równania (25) występuje tzw. wielomian charakterystyczny. Równanie charakterystyczne układu zamkniętego (16), (22) wynika z (25) przez zastąpienie znaku "ˆ" przez "˘".

Twierdzenie 2. Załóżmy, że H jest takie, jak w twierdzeniu 1, a macierze $\hat{Q}$ i $\breve{Q}$ występujące we wskaźnikach jakości (18) i (21) spełniają zależność

$$\hat{Q} = H^T\breve{Q}H \tag{26}$$

wtedy

1. Rozwiązania $\hat{S}$ i $\breve{S}$ algebraicznego równania Riccatiego odpowiednio dla problemów LQ (11), (18) i (16), (21) spełniają równanie

$$\hat{S} = H^T\breve{S}H \tag{27}$$

2. Odpowiadające tym rozwiązaniom wzmocnienia $\hat{k}$ i $\breve{k}$ spełniają zależność

$$\hat{k} = \breve{k}H \tag{28}$$

3. Wielomiany charakterystyczne układów zamkniętych (11), (19) i (16), (22) spełniają związek

$$\det[z\hat{I} - \hat{A} + \hat{B}\hat{k}] = z^m \det[z\breve{I} - \breve{A} + \breve{B}\breve{k}] \tag{29}$$

Dowód. Mnożąc obie strony równania (23) lewostronnie przez H^T i prawostronnie przez H oraz wykorzystując (15) i (17) otrzymujemy (27). Zależność (28) wynika z przemnożenia obu stron równania (24) przez H prawostronnie i uwzględnienia (15) oraz (17).

Aby udowodnić (29), napiszmy najpierw równanie stanu układu zamkniętego (11), (19)

$$\dot{\hat{x}} = (\hat{A} - \hat{B}\hat{k})\hat{x} \tag{30}$$

Mnożąc obie strony (30) przez H lewostronnie i uwzględniając (15), (17), (28) i (6) otrzymujemy

$$H\dot{\tilde{x}} = (H\hat{A} - H\hat{B}\hat{k})\tilde{x} = (\check{A}H - \check{B}kH)\tilde{x} = (\check{A} - \check{B}k)\check{x}$$

i w końcu

$$\dot{\check{x}} = (\check{A} - \check{B}k)\check{x} \tag{31}$$

Zatem transformacja (6) przekształca (30) do (31), zatem z lematu 1 wynika, że wektory wierszowe macierzy H są ortogonalne do podprzestrzeni S^{n-1} pomijanych modów układu (30). Ponieważ z (28) wynika, że $\hat{k}$ jest ortogonalne do S^{n-1}, więc podprzestrzeń S^{n-1}, $(n-1)$-krotnego zerowego modu, nie jest zmieniana przez sterowanie w układzie zamkniętym ze sprzężeniem (19). Dlatego podprzestrzeń S^{n-1} pozostaje podprzestrzenią $(n-1)$-krotnego zerowego modu również dla układu zamkniętego (11), (19). Zatem z lematu 1 wynika, że $(n-1)$-krotny mod zerowy układu (30) jest pomijany w (31), a pozostałe mody układu (30) są zachowane w (31), z czego wynika (29).

□

Aby otrzymać z (22) transmitancję regulatora-obserwatora, podstawiamy (6) i (9) do (22) i przenosimy wyrażenie zawierające u na lewą stronę równania. Po przekształceniach, w których stosujemy transformację Z, otrzymujemy

$$\check{R}(z) = -\frac{\check{p}_1 z^{n-1} + \check{p}_2 z^n + ... + \check{p}_n}{z^m + \check{p}_{n+1} z^{m-1} + ... + \check{p}_{n+m}} \tag{32}$$

gdzie $\check{p}_i = \check{k}h_i$, h_i są kolumnami macierzy H czyli $H = [h_1, h_2, ..., h_{2n-1}]$. Z (28) wynika, że $\check{p}_i = \hat{k}_i$, $i = 1, 2, ..., 2n-1$. Zatem transmitancja $\check{R}(z)$ (32) jest identyczna z $\hat{R}(z)$ (20).

Uwaga 2. Przy założeniu (26) transmitancje regulatorów obserwatorów (20) i (32) są identyczne. Układ zamknięty (8), (32) z dynamicznym sprzężeniem od wyjścia (32) realizuje bezinercyjne prawo sterowania (19) wynikające z rozwiązania problemu LQ (11), (18). Oznacza to, że mody obu układów zamkniętych (11), (19) i (8), (32) są takie same.

Zauważmy, że układ zamknięty złożony z obiektu (8) i regulatora (32) jest $(2n-1)$-rzędu, tak jak układ (11), (19). Tak więc w porównaniu do układu zamkniętego (16), (22) ze sprzężeniem od stanu (22), dynamiczne sprzężenie od wyjścia (32) powoduje wzrost rzędu układu o $(n-1)$.

Zauważmy, że założenie (26) oznacza, że stany $\hat{x}$ należące do S^{n-1} nic nie kosztują. Natomiast z (27) i uwagi 1 wynika, że warunki początkowe obserwatora należące do S^{n-1} nie zwiększają optymalnej wartości wskaźnika jakości (21) układu zamkniętego (16), (22) ze sprzężeniem od stanu. Uwzględniając dodatkowo (29) widzimy, że występujący w (32) obserwator jest optymalny ze skończonym czasem zanikania (ang. dead-beat) [1].

Ponieważ równania (16) określają realizację minimalną w przestrzeni stanu, więc układ (16) jest sterowalny i obserwowalny. Wynika stąd [2] i z (29) następująca własność.

Uwaga 3. Niezerowe stabilne pierwiastki równania charakterystycznego układu zamkniętego (16), (22) n-tego rzędu z bezinercyjnym sprzężeniem od stanu są takie same, jak układu zamkniętego (8), (32), $(2n-1)$-ego rzędu z dynamicznym sprzężeniem od wyjścia. Obserwator występujący w (32) jest optymalny ze skończonym czasem zanikania.

7. Wnioski

Zaproponowane podejście umożliwia wyprowadzenie transmitancji regulatora-obserwatora określającej dynamiczne sprzężenie od wyjścia obiektu i umożliwiającej realizację sterowania, gdy tylko wyjście obiektu jest mierzone. Za pomocą wprowadzonej transformacji modalnej pokazano, że otrzymany obserwator jest optymalny ze skończonym czasem zanikania (ang. dead-beat). Pokazano także, że układ zamknięty z dynamicznym sprzężeniem od wyjścia zachowuje stabilne niezerowe pierwiastki równania charakterystycznego układu zamkniętego z regulatorem LQ i sprzężeniem od stanu.

Podziękowanie

Praca była częściowo finansowana przez Komitet Badań Naukowych¡ Grant Nr. 8 T11A 012 19.

LITERATURA

1. Åström K. J., Wittenmark B.: Computer Controlled Systems, Theory and Design. Prentice Hall, New Jersey 1997.

2. Dorato P.,Abdallah C., Cerone V.: Linear-quadratic Control, An Introduction. Prentice Hall, New Jersey 1995.
3. Middleton R.H., Goodwin G.C.: Digital Control and Estimation, A Unified Approach. Prentice Hall, New Jersey 1990.
4. Takahashi Y., Rabins M.J., Auslander D.M.: Control and Dynamic System, Addison- Wesley, Reading 1972.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. W. Mitkowski

Abstract

An augmented and minimal realization state space models are proposed for direct implementation of the discrete-time linear-quadratic regulator (DLQR) with measured not all the state variables but only the output of the plant. Both the models are related by means of original transformation with a rectangular matrix. Using this transformation it is shown that the resulting closet-loop (CL) system with dynamic output feedback regulator (DOFR) has the same stable roots of its characteristic equation as the CL system with state feedback and DLQR; the additional zero roots of the first CL system generated by DOFR do not decrease its very strong robustness properties. It is also shown that the CL system with DOFR realizes the optimal control with feedback from the augmented state, resulting from solving an appropriate DLQR problem.