ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 2000
Seria: AUTOMATYKA z. 131 Nr kol. 1476

Robert JANCZEWSKI
Politechnika Gdańska

O PROBLEMIE PRZYDZIAŁU CZĘSTOTLIWOŚCI, ZWARTYCH *T*-POKOLOROWANIACH I GRAFACH DWUDZIELNYCH

Streszczenie. Tytułowy problem przydziału częstotliwości to następująco sformułowane zagadnienie: na pewnym obszarze znajduje się grupa nadajników radiowych, którym trzeba przydzielić częstotliwości w taki sposób, aby nie zakłócały się podczas nadawania. Tak postawiony problem staje się trudny dopiero w momencie, gdy interesuje nas nie tyle jego rozwiązanie, co znalezienie rozwiązania spełniającego pewne dodatkowe warunki, np. minimalizującego szerokość wykorzystanego pasma częstotliwości. W niniejszej pracy zajmujemy się sytuacjami, w których tytułowy problem ma rozwiązanie korzystające z pasma częstotliwości o minimalnej szerokości i równocześnie wykorzystuje wszystkie częstotliwości pośrednie (znajdujące się pomiędzy najmniejszą a największą z wykorzystanych częstotliwości). Przypominamy teoriografowy model Hale'a dla rozważanego zagadnienia związany z grafami interferencji oraz *T*-pokolorowaniami, i formułujemy w języku teorii grafów szereg warunków równoważnych z istnieniem rozwiązania o opisanych wcześniej własnościach.

ON THE FREQUENCY ASSIGNMENT PROBLEM, NO-HOLE *T*-COLORINGS AND BIPARTITE GRAPHS

Summary. The frequency assignment problem can be defined as follows: there are several transmitters situated in a certain region of a plane; assign channels to them (one transmitter receives one channel) in such a way that interference during transmitting is avoided. It is easy to find a solution to this problem. The problem becomes hard only when we are interested in finding solutions that satisfy some additional requirements, e.g. minimize the span of frequency band. In the paper we investigate these cases in which the problem has a solution that uses a frequency band of minimal span and uses all intermediate channels, i.e. these channels which lie between the smallest and the largest channel used. We recall graph-theoretic model of the problem due to Hale and state in graph-theoretic terms several conditions that are equivalent to the existence of solutions satisfying requirements described earlier.

1. Wprowadzenie

Jednym z wielu trudnych zagadnień, na które natrafiamy w telekomunikacji, jest *problem przydziału częstotliwości* (*PPCz*), tj. zagadnienie postawione następująco: na pewnym obszarze znajduje się grupa nadajników radiowych, z których część może ze sobą interferować; trzeba dokonać takiego przydziału częstotliwości do nadajników, aby nie zakłócały się podczas nadawania i aby pewne dodatkowe kryteria optymalizacyjne były spełnione. W literaturze poświęconej temu zagadnieniu można znaleźć co najmniej trzy takie kryteria, ale w praktyce najczęściej korzystamy tylko z jednego z nich, związanego z szerokością wykorzystanego pasma częstotliwości[1].

Według tego kryterium, przydział częstotliwości jest tym lepszy, im mniejsza jest szerokość pasma częstotliwości, z którego korzysta. Dostępne w praktyce zakresy częstotliwości są zawsze ograniczone, więc jasne jest, że przydział częstotliwości korzystający z pasma o minimalnej możliwej szerokości będzie lepszy niż każdy inny. Okazuje się przy tym, że minimalizacja szerokości pasma nie musi wiązać się z jego efektywnym wykorzystaniem — przydział częstotliwości korzystający z pasma, którego szerokość jest minimalna, może pozostawić wiele częstotliwości pośrednich[2] nie wykorzystanych. Powstaje naturalne w takiej sytuacji pytanie: kiedy można tak przydzielić częstotliwości nadajnikom, aby wykorzystane pasmo miało równocześnie minimalną szerokość i wszystkie częstotliwości pośrednie były wykorzystane? W niniejszej pracy postaramy się na nie odpowiedzieć, a zaczniemy od przypomnienia, jak się modeluje problem przydziału częstotliwości na gruncie teorii grafów.

2. Modelowanie PPCz

Teoriografowy model dla tytułowego problemu został wprowadzony przez Hale'a [3] już na początku lat osiemdziesiątych i był od tego czasu intensywnie badany przez wielu autorów (czytelnika zainteresowanego uzyskanymi przez nich wynikami odsyłamy do literatury, a w szczególności do przeglądowego artykułu Robertsa [4]). Model Hale'a opiera się na trzech pojęciach — grafach interferencji, zbiorach odległości zakazanych i T-pokolorowaniach. *Graf interferencji* G to graf, którego wierzchołkami są nadajniki i w którym krawędź łączy parę wierzchołków-nadajników, wtedy i tylko wtedy, gdy mogą one z sobą interferować. Zbiór wierzchołków grafu interferencji G oznaczać będziemy literą V, a zbiór krawędzi literą E. *Zbiór odległości zakazanych*, to każdy taki skończony podzbiór zbioru liczb całkowitych nieujemnych, że zero jest jego elementem. Jeżeli T jest zbiorem

[1] Przez szerokość pasma rozumiemy tutaj różnicę pomiędzy największą a najmniejszą z wchodzących w jego skład częstotliwości.
[2] Pisząc o częstotliwościach pośrednich mamy na myśli te, które znajdują się pomiędzy najmniejszą a największą z częstotliwości wchodzących w skład wykorzystanego pasma.

odległości zakazanych, to *T-pokolorowaniem grafu G* nazywamy każdą funkcję c, która przyporządkowuje wierzchołkom grafu G liczby całkowite (zwane dalej kolorami) w taki sposób, że jeżeli wierzchołki $u, v \in V$ sąsiadują w grafie G, to $|c(u) - c(v)| \notin T$.

Po ponumerowaniu dostępnych częstotliwości liczbami całkowitymi wystarczy tak dobrać zbiór odległości zakazanych T, żeby warunek $|i - j| \notin T$ gwarantował brak interferencji pomiędzy dowolną parą nadajników, którym przydzielimy częstotliwości o numerach i oraz j, aby zobaczyć, że można rozwiązać problem przydziału częstotliwości poprzez znalezienie odpowiedniego T-pokolorowania grafu interferencji. Oczywiste przy tym jest, że odpowiednikiem szerokości pasma wykorzystanego przez przydział częstotliwości jest rozpiętość T-pokolorowania, tj. różnica pomiędzy największym a najmniejszym kolorem użytym w trakcie kolorowania. Rozpiętość T-pokolorowania c oznaczać będziemy symbolem $sp(c)$, a najmniejszą możliwą z rozpiętości T-pokolorowań grafu interferencji G nazywać będziemy *T-rozpiętością grafu G* i oznaczać będziemy symbolem $sp_T(G)$.

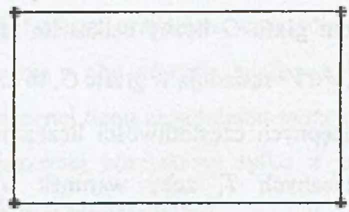
Pytanie, które postawiliśmy na końcu poprzedniego punktu — kiedy można tak przydzielić częstotliwości nadajnikom, aby wykorzystane pasmo miało równocześnie minimalną szerokość i wszystkie częstotliwości pośrednie były wykorzystane? — możemy teraz sformułować w języku teorii grafów. Będzie ono brzmiało następująco: dla jakich zbiorów odległości zakazanych T istnieje zwarte[3] i optymalne[4] T-pokolorowanie grafu interferencji G? Pokażemy na przykładach, że te dwa warunki są od siebie niezależne.

3. Przykłady

Na pierwszym rysunku znajduje się graf, który nie tylko nie posiada żadnych zwartych i optymalnych $\{0, 1, 2, 3\}$-pokolorowań, ale w ogóle nie posiada zwartych $\{0, 1, 2, 3\}$-pokolorowań. Rzeczywiście, przypuśćmy, że posiada on zwarte $\{0, 1, 2, 3\}$-pokolorowanie c. Ponieważ wierzchołki sąsiadujące muszą otrzymać kolory odległe co najmniej o 4, to zbiór kolorów wykorzystanych przez c musi być przedziałem zawierającym co najmniej 5 liczb. Z drugiej strony, rozpatrywany graf ma tylko 4 wierzchołki, więc ten przedział nie może zawierać więcej niż 4 liczby — sprzeczność.

[3] T-pokolorowanie c jest zwarte, wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór $c(V)$ kolorów użytych w trakcie kolorowania jest przedziałem, tj. gdy istnieją takie liczby całkowite i oraz j, że $i \leq j$ i $c(V) = \{i, i+1, ..., j\}$.

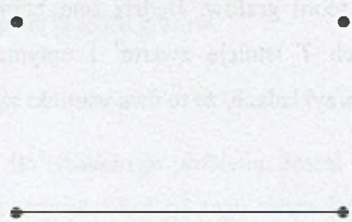
[4] T-pokolorowanie c jest optymalne, wtedy i tylko wtedy, gdy $sp(c) = sp_T(G)$.



Rys.1. Graf nie posiadający zwartych {0, 1, 2, 3}-pokolorowań
Fig.1. A graph without no-hole {0, 1, 2, 3}-colorings

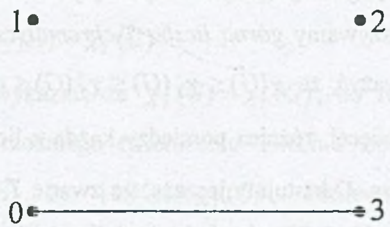
Na drugim rysunku mamy do czynienia z grafem, który posiada zarówno zwarte i optymalne {0, 1, 2}-pokolorowanie (patrz rys. 3), jak i optymalne {0, 1, 2}-pokolorowanie, które nie jest zwarte (patrz rys. 4). Te pokolorowania są optymalne, bo ich rozpiętości są równe {0, 1, 2}-rozpiętości rozważanego grafu, która wynosi 3, co jest bezpośrednią konsekwencją następującego twierdzenia:

Twierdzenie 1 (Cozzens, Roberts [1]). *Dla dowolnej liczby całkowitej $k \geq 0$ występuje równość $sp_{\{0,1,2,\ldots,k\}}(G) = (k+1)(\chi(G)-1)$, gdzie $\chi(G)$ jest liczbą chromatyczną grafu G.* □

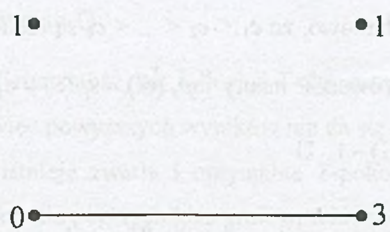


Rys.2. Graf, którego optymalne {0,1,2}-pokolorowania mogą, ale nie muszą być zwarte
Fig.2. A graph having optimal {0, 1, 2}-coloring with and without holes

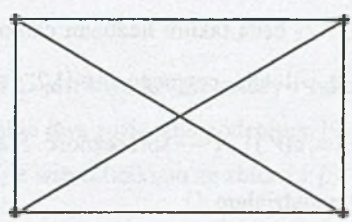
Wreszcie rysunek piąty przedstawia graf, którego wszystkie optymalne {0, 4}-pokolorowania są zwarte. Jest tak, gdyż jego {0, 4}-rozpiętość jest równa 3 i każde {0, 4}-pokolorowanie tego grafu musi być różnowartościowe. Aby to uzasadnić, wystarczy zauważyć, że w rozważanym grafie wszystkie wierzchołki z sobą sąsiadują, co powoduje, że żadne dwa różne wierzchołki nie mogą otrzymać tego samego koloru.



Rys.3. Optymalne i zwarte {0, 1, 2}-pokolorowanie
Fig.3. A no-hole optimal {0, 1, 2}-coloring



Rys.4. Optymalne, ale nie zwarte {0, 1, 2}-pokolorowanie
Fig.4. An optimal {0, 1, 2}-coloring with holes



Rys.5. Graf, którego każde optymalne {0, 4}-pokolorowanie jest zwarte
Fig.5. A graph whose optimal {0, 4}-colorings have no holes

4. Główne twierdzenie

Teraz, kiedy wiemy już, że optymalność i zwartość T-pokolorowania nie mają ze sobą wiele wspólnego, możemy przystąpić do sformułowania twierdzenia mówiącego o tym, kiedy te dwa warunki można połączyć. W tym celu musimy wprowadzić dwa nowe pojęcia: dolną i górną liczbę T-chromatyczną.

Niech T będzie zbiorem odległości zakazanych, a G dowolnym grafem. Najmniejszą liczbę naturalną k, dla której istnieje optymalne T-pokolorowanie grafu G korzystające z k kolorów, nazywamy *dolną liczbą T-chromatyczną* i oznaczamy symbolem $\chi_T^-(G)$.

Największą liczbę naturalną k, dla której istnieje optymalne T-pokolorowanie grafu G korzystające z k kolorów, nazywamy *górną liczbą T-chromatyczną* i oznaczamy symbolem $\chi_T^+(G)$. Nietrudno jest zauważyć, że $\chi(G) \le \chi_T^-(G) \le \chi_T^+(G) \le n(G)$, gdzie $n(G)$ jest liczbą wierzchołków grafu G. Co więcej, różnica pomiędzy każdą z liczb $\chi(G)$, $\chi_T^-(G)$, $\chi_T^+(G)$ i $n(G)$ może być dowolnie duża. Odnotujmy jeszcze, że zwarte T-pokolorowania były badane przez innych autorów (zobacz [2, 6, 7]), ale nie korzystali oni z liczb T-chromatycznych.

Twierdzenie 2. $sp_T(G) \ge \chi_T^+(G) - 1$

Dowód. Niech c będzie takim optymalnym T-pokolorowaniem grafu G, że $|c(V)| = k$, gdzie $k = \chi_T^+(G)$. Przyjmijmy dodatkowo, że $c_1 < c_2 < \ldots < c_k$ są takimi liczbami całkowitymi, że $c(V) = \{c_1, c_2, \ldots, c_k\}$. Wówczas mamy $sp_T(G) = sp(c) = c_k - c_1 = \sum_{i=1}^{k-1}(c_{i+1} - c_i)$ oraz $\sum_{i=1}^{k-1}(c_{i+1} - c_i) \ge k - 1 = \chi_T^+(G) - 1$. □

Lemat 3. *T-pokolorowanie c jest zwarte, wtedy i tylko wtedy, gdy* $sp(c) = |c(V)| - 1$.

Dowód. ($\Rightarrow$) Ponieważ $c(V)$ jest przedziałem, więc istnieją takie liczby całkowite i oraz j, że $i \le j$ i $c(V) = \{i, i+1, \ldots, j\}$. Stąd $sp(c) = j - i = |c(V)| - 1$.

($\Leftarrow$) Niech $c_1 < c_2 < \ldots < c_k$ będą takimi liczbami całkowitymi, że $k = |c(V)|$ i $c(V) = \{c_1, c_2, \ldots, c_k\}$. Gdyby $c_{i+1} - c_i > 1$ dla pewnego $i \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$, to $sp_T(G) = sp(c) = c_k - c_1 = \sum_{i=1}^{k-1}(c_{i+1} - c_i) > k - 1 = |c(V)| - 1$ — sprzeczność. Stąd $c_2 = c_1+1$, $c_3 = c_2+1$, ..., $c_k = c_{k-1}+1$, co dowodzi, że $c(V)$ jest przedziałem. □

Twierdzenie 4. *Graf G posiada optymalne i zwarte T-pokolorowanie, wtedy i tylko wtedy, gdy* $sp_T(G) = \chi_T^+(G) - 1$.

Dowód. ($\Rightarrow$) Niech c będzie optymalnym i zwartym T-pokolorowaniem grafu G. Na mocy lematu 3 zachodzi równość $sp(c) = |c(V)| - 1$. Ponieważ $|c(V)| \le \chi_T^+(G)$, więc $\chi_T^+(G) - 1 \le sp_T(G) = sp(c) = |c(V)| - 1 \le \chi_T^+(G) - 1$.

($\Leftarrow$) Niech c będzie takim optymalnym T-pokolorowaniem grafu G, że $|c(V)| = \chi_T^+(G)$. Wówczas $sp(c) = \chi_T^+(G) - 1 = |c(V)| - 1$, co na mocy lematu 3 dowodzi, że c jest zwarte. □

Twierdzenie 5. *Każde optymalne T-pokolorowanie grafu G jest zwarte wtedy i tylko wtedy, gdy* $sp_T(G) = \chi_T^+(G) - 1$ *i* $\chi_T^-(G) = \chi_T^+(G)$.

Dowód. ($\Rightarrow$) Wystarczy wykazać, że $\chi_T^-(G) = \chi_T^+(G)$, bo równość $sp_T(G) = \chi_T^+(G) - 1$ wynika natychmiast z poprzedniego twierdzenia. Niech c będzie takim optymalnym T-pokolorowaniem grafu G, że $|c(V)| = \chi_T^-(G)$. Ponieważ c jest zwarte, więc $sp(c) = |c(V)| - 1 = \chi_T^-(G) - 1$. Stąd $\chi_T^-(G) = sp(c) + 1 = sp_T(G) + 1 = \chi_T^+(G)$.

($\Leftarrow$) Niech c będzie optymalnym T-pokolorowaniem grafu G. Ponieważ $\chi_T^-(G) = \chi_T^+(G)$, więc $|c(V)| = \chi_T^+(G)$. Stąd $sp(c) = \chi_T^+(G) - 1 = |c(V)| - 1$, co na mocy lematu 3 dowodzi, że c jest zwarte. □

Niestety, zarówno T-rozpiętość, jak i liczby T-chromatyczne są parametrami grafu trudnymi do wyznaczenia, więc powyższych wyników nie da się zastosować bezpośrednio do efektywnego badania, czy istnieje zwarte i optymalne T-pokolorowanie dowolnego grafu interferencji G. Tym niemniej, dla pewnych klas grafów, takich jak grafy dwudzielne, podane powyżej twierdzenie można zastosować bezpośrednio, gdyż znamy zarówno wzór na T-rozpiętość, jak i wzory opisujące górne i dolne liczby T-chromatyczne.

5. Grafy dwudzielne

Przypomnijmy, że graf G jest dwudzielny wtedy i tylko wtedy, gdy można podzielić zbiór jego wierzchołków na takie dwa rozłączne podzbiory V_1, V_2, że każda krawędź grafu G łączy wierzchołek ze zbioru V_1 z wierzchołkiem ze zbioru V_2.

Twierdzenie 6. *Jeżeli G jest grafem dwudzielnym, to*

$$sp_T(G) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } E = \varnothing \\ \min \overline{T} & \text{gdy } E \neq \varnothing \end{cases}$$

gdzie $\overline{T} = \{0, 1, \ldots, \max T + 1\} \setminus T$. □

Jeżeli G jest grafem pustym, to nietrudno sprawdzić, że dla każdego zbioru odległości zakazanych T wszystkie optymalne T-pokolorowania grafu G są zwarte. Dla niepustych grafów dwudzielnych kwestię istnienia zwartych i optymalnych T-pokolorowań można rozstrzygnąć za pomocą poniższego twierdzenia.

Twierdzenie 7. *Jeżeli G jest niepustym grafem dwudzielnym posiadającym k wierzchołków izolowanych, to* $\chi_T^-(G) = 2$ *oraz* $\chi_T^+(G) = \min\{\min \overline{T} + 1, k + 2\}$.

Dowód. Ponieważ wierzchołki sąsiadujące muszą otrzymać kolory odległe o co najmniej $\min \overline{T}$, więc wszystkie wierzchołki poza izolowanymi otrzymają w każdym optymalnym *T*-pokolorowaniu jeden z kolorów *i*, $i + \min \overline{T}$, gdzie *i* jest pewną liczbą całkowitą. Kolorując wierzchołki izolowane kolorem *i* otrzymamy *T*-pokolorowanie korzystające z 2 kolorów, skąd $\chi_T^-(G) = 2$. Kolorując każdy z nich jednym kolorem z przedziału $\{i+1, i+2, ..., i + \min \overline{T}\}$ i starając się wykorzystać jak najwięcej kolorów otrzymamy *T*-pokolorowanie korzystające z $\min\{\min \overline{T} + 1, k + 2\}$ kolorów, co dowodzi, że $\chi_T^+(G) = \min\{\min \overline{T} + 1, k + 2\}$. □

Wystarczy teraz skorzystać z twierdzenia 4, aby stwierdzić, że niepusty graf dwudzielny *G* posiada zwarte i optymalne *T*-pokolorowanie wtedy i tylko wtedy, gdy posiada co najmniej $\min \overline{T} - 1$ wierzchołki izolowane. Nietrudno jest także wykazać korzystając z twierdzenia 5, że wszystkie optymalne *T*-pokolorowania tego grafu są zwarte wtedy i tylko wtedy, gdy $\min \overline{T} = 1$.

LITERATURA

1. Cozzens M.B., Roberts F.S.: T-colorings of graphs and the channel assignment problem, Congressus Numerantium 35, 1982, pp. 191-208.
2. Guichard D.R.: No-hole k-tuple (r+1)-distant colorings of odd cycles, Discrete Applied Mathematics 64, 1996, pp. 87-92.
3. Hale W.K.: Frequency assignment: theory and applications, Proceedings of the IEEE 68, 1980, pp. 1497-1514.
4. Roberts F.S.: T-colorings of graphs: recent results and open problems, Discrete Mathematics 93, 1991, pp. 229-245.
5. Roberts F.S.: No-hole 2-distant colorings, Mathl. Comput. Modelling, vol. 17, no. 11, 1996, pp. 139-144.
6. Troxell D.S.: Minimizing the number of holes in 2-distant colorings, Ars Combinatoria 41, 1995, pp. 77-86.
7. Troxell D.S.: No-hole k-tuple (r+1)-distant colorings, Discrete Applied Mathematics 64, 1996, pp. 67-85.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. J.Klamka

Abstract

The frequency assignment problem can be defined as follows: there are several transmitters situated in a certain region of a plane; assign channels to them (one transmitter receives one channel) in such a way that interference during transmitting is avoided. It is easy to find a solution of the problem. The problem becomes hard only when we are interested in

finding solutions that satisfy some additional requirements, e.g. minimize the span of frequency band. In the paper we investigate these cases in which the problem has a solution that uses a frequency band of minimal span and uses all intermediate channels, i.e. these channels which lie between the smallest and the largest channel used. We recall graph-theoretic model of the problem due to Hale which is based on two notions: sets of disallowed separations and interference graphs. We state in graph-theoretic terms several conditions that are equivalent to the existence of solutions satisfying requirements described earlier and prove each of them. Next, we apply these theorems to show that if G is a bipartite interference graph and T is a set of disallowed separations then G has a no-hole and optimal T-coloring if and only if it has at least $\min \overline{T} - 1$ vertices of degree 0.