ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 2000
Seria: AUTOMATYKA z. 131 Nr kol. 1476

Marek KUBALE
Politechnika Gdańska

PROBLEM HARMONICZNEGO KOLOROWANIA WIERZCHOŁKÓW GRAFU

Streszczenie. Kolorowanie harmoniczne wierzchołków grafu jest taką odmianą kolorowania klasycznego, która ma oryginalne zastosowania praktyczne. W niniejszej pracy pokazujemy, że problem kolorowania harmonicznego jest NP-trudny, podajemy najważniejsze wyniki teoretyczne dotyczące harmonicznej liczby chromatycznej i proponujemy algorytm heurystyczny dla takiego kolorowania. Algorytm ten jest 2-przybliżony, ma złożoność $O(n^4)$ i działa skutecznie na grafach losowych.

PROBLEM OF HARMONIOUS COLORING OF GRAPH VERTICES

Summary. Harmonious coloring the vertices of a graph is such a variation of classical model of coloring which has extraordinary applications. In the paper we show that the problem of harmonious coloring is NP-hard, give the main theoretical results for harmonious chromatic number and propose a heuristic algorithm for such a coloring. This algorithm is 2-approximate, runs in $O(n^4)$ time and behaves effectively on random graphs.

1. Wprowadzenie

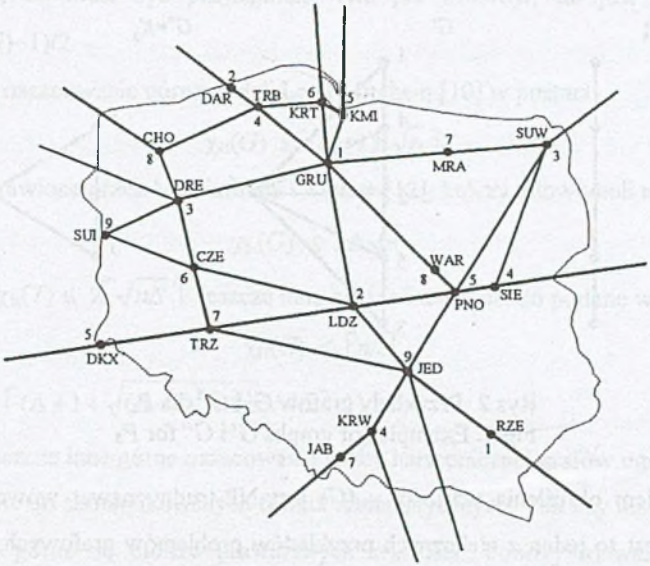
Istnieje kilkanaście modeli kolorowania grafów. Niektóre z nich dotyczą kolorowania wierzchołków, inne - kolorowania krawędzi, a jeszcze inne - kolorowania ścian grafu płaskiego. Spośród tych pierwszych do najciekawszych pod względem praktycznych zastosowań należy kolorowanie harmoniczne. Jest ono zdefiniowane następująco. Niech dany jest graf G i zbiór k kolorów. Legalne k-pokolorowanie grafu G jest takim przyporządkowaniem kolorów jego wierzchołkom, że każdy wierzchołek otrzymuje jeden z k dostępnych kolorów przy ograniczeniu, że wierzchołki sąsiednie nie mogą mieć tych samych barw. Pokolorowanie harmoniczne k barwami polega na takim pokolorowaniu legalnym, że żadne dwie krawędzie nie mają tych samych kolorów, gdzie przez kolor krawędzi rozumiemy parę liczb $\{i,j\}$, $i,j \in \{1,...,k\}$ użytych do pokolorowania wierzchołków tej krawędzi. Najmniejszą liczbę k, dla której istnieje pokolorowanie harmoniczne, nazywamy *liczbą harmoniczną* grafu G i oznaczamy przez $\chi_H(G)$. Potencjalnie, problem kolorowania

harmonicznego może być wykorzystany w tak odległych dziedzinach, jak: radiokomunikacja lotnicza [8], kompresja obrazów [1] i bazy danych [2]. Poniżej, tytułem przykładu, zilustrujemy to pierwsze zastosowanie.

Jednym z tradycyjnych systemów nawigacji stosowanych w warunkach ograniczonej widoczności obiektów naziemnych jest nawigacja radiowa. Do radiotechnicznych środków nawigacyjnych należą m.in. radiolatarnie lotnicze, wśród których na szczególną uwagę zasługują latarnie ogólnokierunkowe systemu VOR. Pojedyncza radiolatarnia VOR pracuje na falach ultrakrótkich wyznaczając nieskończoną liczbę dróg wychodzących z niej promieniście. Wyznaczenie pozycji samolotu następuje w wyniku namiaru względem dwóch radiolatarni. Aby jednoznacznie wyznaczyć położenie samolotu, dwie sąsiednie latarnie nie mogą wysyłać tego samego sygnału oraz nie mogą występować dwa korytarze powietrzne, których węzły wysyłają takie same sygnały.

Jeżeli założymy hipotetycznie, że władze pewnego państwa zdecydowały się zmodernizować istniejący system latarni VOR i aby obniżyć koszt tej operacji postanowiły zainstalować możliwie najmniejszą liczbę różnych typów radiolatarni (i tym samym różnych sygnałów rozpoznawczych), to nasuwa się pytanie: Jak znaleźć liczbę potrzebnych typów radiolatarni i jak je rozmieścić w węzłach sieci korytarzy powietrznych, aby nie przekroczyć przewidzianego budżetu? Każde państwo o rozwiniętej komunikacji lotniczej posiada sieć korytarzy lotniczych. Dwa węzły tej sieci wyznaczają dokładnie jeden korytarz. Przyporządkowując każdemu węzłowi wierzchołek grafu, zaś korytarzowi - krawędź, otrzymujemy graf G modelujący tę sieć. Jeśli teraz znajdziemy liczbę harmoniczną oraz harmoniczne pokolorowanie grafu G, to liczba ta będzie liczbą różnych typów radiolatarni, natomiast pokolorowanie określi, jakiego typu radiolatarnia ma być umieszczona w odpowiednim węźle (patrz rys. 1).

W następnym punkcie pokażemy, że problem kolorowania harmonicznego jest NP-trudny. W kolejnym podamy najważniejsze wyniki teoretyczne dotyczące liczby $\chi_H(G)$ oraz klasy grafów, dla których ta wartość jest znana z góry lub może być obliczona w czasie wielomianowym. Dla pozostałych grafów podamy w punkcie 4 wielomianowy algorytm przybliżony o gwarantowanej dokładności względnej, mianowicie liczba użytych przez niego kolorów nie przekracza nigdy $2\chi_H(G)$. Rozważania ogólne zamykamy raportem z przeprowadzonych eksperymentów komputerowych na grafach losowych.



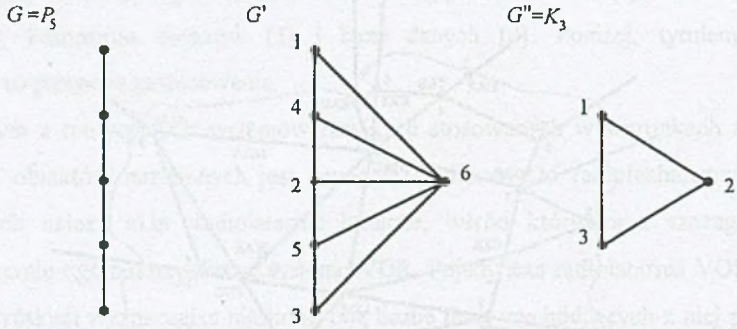
Rys.1. Graf dolnych korytarzy obszaru Polski wraz z pokolorowaniem harmonicznym
Fig.1. Graph of lower corridors of Poland and its harmonious coloring

2. Dowód NP-trudności

Po raz pierwszy dowód NP-trudności kolorowania harmonicznego został podany w [6]. Polegał on na wykazaniu, że problem 3-SAT jest wielomianowo sprowadzalny do problemu harmonicznego kolorowania dowolnego grafu G. Poniżej podamy prostszy dowód tego faktu, dopuszczający grafy niespójne.

Twierdzenie. *Problem harmonicznego kolorowania dowolnego grafu jest* NP-*trudny.*

Dowód. Przypuśćmy, że chcemy wiedzieć, czy graf G ma niezależny zbiór o rozmiarze r lub większym. W tym celu na podstawie grafu G konstruujemy grafy G' i G''. Graf G' jest grafem G powiększonym o dodatkowy wierzchołek ze wszystkimi wierzchołkami grafu G. Grafem G'' jest graf pełny K_r. Zauważmy, że zbiory niezależne grafu G odpowiadają zbiorom niezależnym grafu G', dla którego $\chi_H(G) = n+1$. Jeśli G ma zbiór niezależny rozmiaru r, to wierzchołki tego zbioru mogą być pokolorowane kolorami $1,\ldots,r$, pozostałe kolorami $r+1,\ldots, n+1$, zaś wierzchołki grafu K_r ponownie mogą otrzymać r pierwszych kolorów i pokolorowanie to jest harmoniczne. Jeżeli $G' \cup G''$ daje się pomalować harmonicznie $n+1$ kolorami, to w G' musi istnieć zbiór niezależny rozmiaru przynajmniej r i tym samym graf G posiada taki sam zbiór niezależnych wierzchołków. ❑



Rys.2. Przykłady grafów G' i G'' dla P_5
Fig.2. Examples of graphs G' i G'' for P_5

W istocie problem określenia wartości $\chi_H(G)$ jest NP-trudny nawet wówczas, gdy G jest drzewem [5]. Jest to jeden z nielicznych przykładów problemów grafowych, które pozostają NP-trudne na drzewach.

3. Szacowanie wartości liczby harmonicznej

Ponieważ problem jest NP-trudny nawet dla drzew, w praktyce zmuszeni jesteśmy do korzystania z oszacowań i algorytmów heurystycznych. Poniżej podajemy najważniejsze oszacowania liczby harmonicznej w przypadku ogólnym. W dalszym ciągu zakładamy, że G ma n wierzchołków i m krawędzi. Nasz przegląd zaczynamy od oczywistego oszacowania dolnego

$$\chi(G) \leq \chi_H(G), \tag{1}$$

gdzie $\chi(G)$ jest liczbą chromatyczną grafu G. Niestety, oszacowanie to jest kiepskie dla gwiazd, gdyż różnica $\chi_H(K_{1,n-1})-\chi(K_{1,n-1}) = n-2$ i może być dowolnie duża, gdy $n\to\infty$. Istnieją dwa prostsze oszacowania, mianowicie

$$\Delta+1 \leq \chi_H(G), \tag{2}$$

gdzie Δ jest maksymalnym stopniem grafu G. Oszacowanie to jest wręcz dokładne dla gwiazd. Ogólnie, gdy dana para wierzchołków jest sąsiednia lub ma wspólnego sąsiada, to musi dostać różne kolory. Dlatego każdy graf o średnicy 2 ma liczbę harmoniczną równą n.

Drugie oszacowanie

$$\sqrt{2m} < \chi_H(G) \tag{3}$$

wynika z faktu, że musi być przynajmniej tyle par kolorów, ile jest krawędzi, czyli $m \le \chi_H(G)(\chi_H(G)-1)/2$.

Pierwsze oszacowanie górne podali Lee i Mitchem [10] w postaci

$$\chi_H(G) \le (\Delta^2+1)\lceil \sqrt{n} \rceil \tag{4}$$

Zostało ono poprawione przez McDiarmida i Xinhua [12], którzy udowodnili nierówność

$$\chi_H(G) \le 2\Delta\sqrt{n}, \tag{5}$$

zaś dla drzew T $\chi_H(T) \le 2\lceil \sqrt{n\Delta} \rceil$. Jeszcze inne oszacowanie zostało podane w [7] w formie

$$\chi_H(G) \le \lceil n/t \rceil, \tag{6}$$

gdzie $t = \max\{1, \lceil (\Delta+1+\sqrt{(\Delta+1)^2+8n})/4\Delta \rceil - 1\}$.

Istnieją jeszcze inne górne oszacowania liczby harmonicznej grafów ogólnych (np. [4]), lecz prowadzą one do skomplikowanych formuł matematycznych. Tak czy inaczej, wydaje się, że oszacowania górne są bliższe prawdziwych wartości. Poniżej rozważymy przypadki szczególne grafów, dla których znane oszacowania dolne i górne są sobie równe. Innymi słowy, podamy klasy grafów, dla których znamy wartości $\chi_H(G)$ lub potrafimy je obliczyć w czasie wielomianowym.

Istnieje kilka klas grafów, które mogą być pomalowane w czasie wielomianowym. Przede wszystkim grafy o średnicy 2 mają $\chi_H(G) = n$, czyli musimy każdemu wierzchołkowi nadać inny kolor. Ta klasa grafów zawiera rodzinę grafów z gwiazdą spinającą, np. K_n, koła W_n, gwiazdy $K_{1,n}$ oraz pełne grafy dwudzielne $K_{r,s}$. Inną taką rodziną są ścieżki P_n. Wiadomo, że $\chi_H(P_n) = 2k$ dla wszystkich $\binom{2k-1}{2} < n-1 \le \binom{2k}{2} - (k-1)$ i $\chi_H(P_n) = 2k+1$, gdy $\binom{2k}{2} - (k-1) < n-1 \le \binom{2k+1}{2}$. Następną rodziną są cykle. Niech k będzie najmniejszą liczbą naturalną taką, że $\binom{k}{2} \ge n$. Jeśli k jest nieparzyste i $n \ne \binom{k}{2}$, $i = 1,2$ lub k jest parzyste oraz $n \ne \binom{k}{2} - 1$, $i = 0,1,\ldots, k/2-1$, to $\chi_H(C_n) = k$. W przeciwnym przypadku $\chi_H(C_n) = k+1$. Kolejną klasą grafów są pełne drzewa k-arne o wysokości t. Ostatnio Edwards [3] podała wzór dla $t \ge 4$ dowodząc, że dla dowolnego k $\chi_H(T_t) = \lceil (1+\sqrt{8m+1})/2 \rceil$, z wyjątkiem $\chi_H(T_4) = 7$ dla drzew binarnych. Dokładna wartość $\chi_H(G)$ została również ustalona dla komet, czyli zespolenia ścieżek i gwiazd [11]. Podobnie znamy wartość liczby harmonicznej dla niektórych krat kwadratowych (por. [9]).

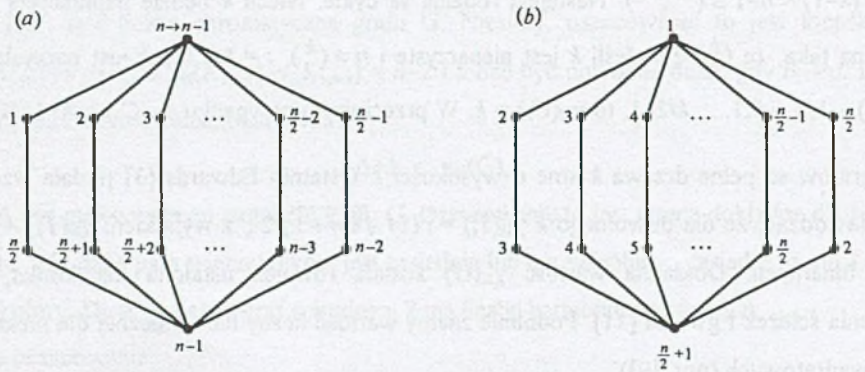
4. Algorytm degresywny

Jak wspomnieliśmy, istnieje kilka algorytmów specjalnych dla optymalnego kolorowania grafów silnie ustrukturalizowanych - bardzo gęstych lub bardzo rzadkich. Jednakże w zastosowaniach praktycznych pojawiają się najczęściej rozrzedzone grafy ogólne. Dlatego potrzebny jest nam uniwersalny algorytm heurystyczny o złożoności wielomianowej i gwarantowanej dokładności względnej. Takim algorytmem jest tzw. algorytm degresywny.

Algorytm degresywny

1. Pokoloruj wierzchołki grafu nadając każdemu wierzchołkowi kolor odpowiadający jego liczbie porządkowej.
2. Znajdź największy kolor *maxc* występujący w grafie (początkowo *maxc* = *n*).
3. Jeśli *maxc* ≠ 0, to znajdź zbiór wierzchołków V_{maxc} o kolorze *maxc*; w przeciwnym wypadku STOP.
4. Zaczynając od wierzchołka ze zbioru V_{maxc} o największej liczbie porządkowej spróbuj zmniejszyć jego kolor badając kolejno kolory *maxc*−1,...,1, dopóki nie nastąpi konflikt legalności lub harmoniczności pokolorowania. Wykonuj pkt. 4 aż do wyczerpania wszystkich wierzchołków ze zbioru V_{maxc}. Jeśli dla wszystkich wierzchołków ze zbioru V_{maxc} uda się zmniejszyć kolor, to idź do pkt. 2.
5. Zmniejsz *maxc* o 1 i wróć do pkt 3.

Szacując liczbę prób zmniejszenia koloru pojedynczego wierzchołka otrzymujemy, że całkowita liczba kroków algorytmu nie przekracza $O(n^4)$. Najgorszym przypadkiem danych dla algorytmu degresywnego jest poniższy dwudzielny graf planarny o parzystej liczbie wierzchołków. Liczby przy najwyższym wierzchołku na rys. 3 to początkowy numer koloru i końcowy numer koloru.



Rys.3. Pokolorowania harmoniczne: (*a*) metodą degresywną; (*b*) optymalne
Fig.3. Harmonious colorings: (*a*) by degresive method; (*b*) optimal

Jak widzimy, liczba harmoniczna tych grafów wynosi $\chi_H(G) = n/2+1$, podczas gdy za pomocą algorytmu degresywnego otrzymujemy pokolorowanie $n-1$ kolorami, gdyż możemy przekolorować tylko ostatni wierzchołek.

Niech $R_A(G)$ oznacza stosunek $A(G)/\chi_H(G)$, gdzie $A(G)$ jest liczbą kolorów użytych przez algorytm A do harmonicznego pokolorowania grafu G. Błąd względny algorytmu A jest zdefiniowany jako

$$R_A = \inf\{r \geq 1 : R_A(G) \leq r \text{ dla wszystkich } G\}.$$

Ponieważ dla algorytmu degresywnego i grafu G z rys. 3

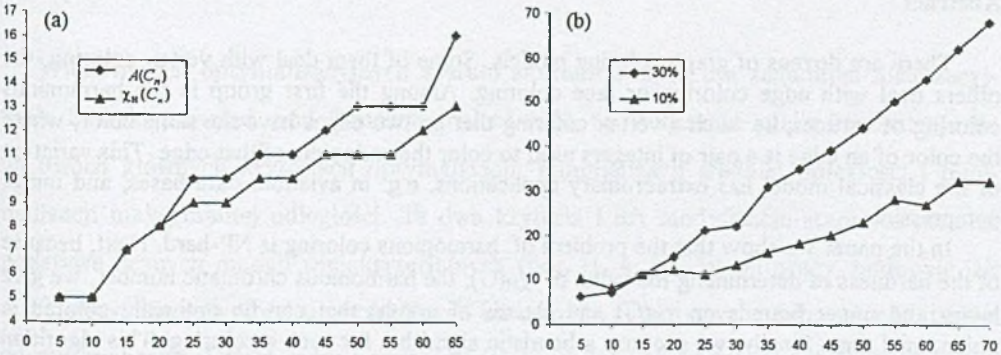
$$R_A(G) = \frac{n-1}{n/2+1} = \frac{2n-2}{n+2},$$

więc $R_A = 2$.

Zauważmy, że metoda degresywna jest bardzo czuła na początkową numerację wierzchołków. Stąd pewna modyfikacja algorytmu (na przykład kilkukrotne losowe przydzielanie kolorów, a następnie wybranie najlepszego pokolorowania) może spowodować poprawę wyników.

5. Doświadczenia komputerowe z algorytmem degresywnym

Dla oceny zachowania się algorytmu degresywnego w przypadku średnim przeprowadzona została seria testów komputerowych, polegająca na kolorowaniu grafów o znanych wartościach liczby harmonicznej (cykle C_n) i grafów losowych o gęstościach $d = 10\%$ i $d = 30\%$, gdzie $d = 2m/(n(n-1))$. Wyniki tych eksperymentów przedstawiamy na poniższych wykresach.



Rys.4. Degresywne kolorowanie grafów: (a) cyklicznych; (b) losowych
Fig.4. Degresive coloring of graphs: (a) cycles; (b) random graphs

LITERATURA

1. Borowiak G., Szyfelbein D.: Zastosowanie kolorowania harmonicznego w kompresji danych, Mat. Krajowego Sympozjum Telekomunikacji'98, Bydgoszcz 1998, vol. B, 353-359.
2. Cichelli R.J.: Minimal perfect hash functions made simple, Communications of the ACM 23, 1980, 17-19.
3. Edwards K.: The harmonious chromatic number and the achromatic number, w: *Surveys in Combinatorics*, Cambridge University Press, London 1997, 13-47.
4. Edwards K., McDiarmid C.: New upper bounds on harmonious colorings, J. Graph Theory 18, 1994, 257-267.
5. Edwards K., McDiarmid C.: The complexity of harmonious colouring for trees, Disc. Appl. Math. 57, 1995, 133-144.
6. Hopcroft J.E., Krishnamoorthy M.S.: On the harmonious coloring of graphs, SIAM J. Algebraic Discrete Methods 4, 1983, 306-311.
7. Krasikov I., Roditty Y.: Bounds for the harmonious chromatic number of a graph, J. Graph Theory 18, 1994, 205-209.
8. Kubale M.: Kolorowanie harmoniczne i jego możliwe zastosowania w radiokomunikacji lotniczej, Mat. II Konf. "Informatyka na Wyższych Uczelniach dla Gospodarki Narodowej", Gdańsk 1996, 399-402.
9. Kubale M.: Introduction to Computational Complexity and Algorithmic Graph Coloring, Wydawnictwo GTN, Gdańsk 1998.
10. Lee S.-M., Mitchem J.: An upper bound for the harmonious chromatic number of a graph, J. Graph Theory 11, 1987, 565-567.
11. Marszałkowska J.: Harmoniczne kolorowanie grafów, Praca dyplomowa, Instytut Matematyki UG, Gdańsk 1998.
12. McDiarmid C., Xinhua L.: Upper bounds for harmonious colorings, J. Graph Theory 15, 1991, 629-636.

Recenzent: Prof.dr hab.inż. J.Klamka

Abstract

There are dozens of graph coloring models. Some of them deal with vertex coloring, the others deal with edge coloring or face coloring. Among the first group is the harmonious coloring of vertices, i.e. such a vertex coloring that no two edges have the same color, where the color of an edge is a pair of integers used to color the endpoints of that edge. This variation of the classical model has extraordinary applications, e.g. in aviation, data bases, and image compression.

In the paper we show that the problem of harmonious coloring is NP-hard. Next, because of the hardness of determining the value of $\chi_H(G)$, the harmonious chromatic number, we give lower and upper bounds on $\chi_H(G)$ and classes of graphs that can be optimally colored in polynomial time. Finally, we propose a heuristic algorithm for such a coloring. This algorithm is 2-approximate, runs in $O(n^4)$ time and behaves effectively on random graphs.