ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 2000
Seria: AUTOMATYKA z. 131 Nr kol. 1476

Robert JANCZEWSKI
Politechnika Gdańska

O ZŁOŻONOŚCI PROBLEMU PRZYDZIAŁU CZĘSTOTLIWOŚCI I KONTRASTOWEGO KOLOROWANIA GRAFÓW

Streszczenie. Tytułowy problem przydziału częstotliwości można opisać następująco: na pewnym obszarze znajduje się grupa nadajników radiowych, którym trzeba przydzielić częstotliwości w taki sposób, żeby nie zakłócały się podczas nadawania. Zagadnienie to można sprowadzić do wyszukiwania tzw. kontrastowych pokolorowań grafu interferencji. Celem niniejszej pracy jest przedstawienie bieżącego stanu wiedzy na temat złożoności zagadnienia polegającego na wyszukiwaniu kontrastowych pokolorowań optymalizujących pewne kryteria jakości, takie jak rozpiętość czy rozpiętość krawędziowa. Wyodrębnione zostaną znane przypadki wielomianowe (grafy dwudzielne, kaktusy, grafy zewnętrznie planarne) i **NP**-zupełne (grafy pełne, r-regularne dla $r \geq 4$ i podkubiczne).

ON THE COMPLEXITY OF FREQUENCY ASSIGNMENT PROBLEM AND *T*-COLORING OF GRAPHS

Summary. The frequency assignment problem can be defined as follows: there are several transmitters situated in a certain region of a plane; a channel is to be assigned to each of them in such a way that there is no interference during transmitting. The problem can be represented as one of graph coloring problems. More precisely, it has been proved that to solve the problem it suffices to build the so-called interference graph and find one of its T-colorings. The aim of the paper is to present state-of-the-art on the complexity of the problem of finding T-colorings optimizing some criterions such as the span or edge span. We discuss known polynomial (bipartite graphs, cacti, outerplanar) and **NP**-complete (complete graphs, subcubic and r-regular for $r \geq 4$) cases.

1. Wprowadzenie

Teoria grafów jest jednym z tych działów matematyki, które znajdują zastosowanie w modelowaniu zagadnień z zakresu informatyki, telekomunikacji i automatyki. Jednym z zagadnień modelowanych na gruncie teorii grafów jest niewątpliwie *problem przydziału częstotliwości* (*PPCz*), tj. zagadnienie, w którym dla danej grupy nadajników radiowych poszukujemy przydziału częstotliwości (każdy nadajnik ma otrzymać jedną częstotliwość), który zagwarantuje brak interferencji w trakcie nadawania. Teoriografowy model dla *PPCz*

został wprowadzony przez Hale'a [5] już na początku lat osiemdziesiątych; opiera się on na trzech pojęciach: grafach interferencji, zbiorach odległości zakazanych i T-pokolorowaniach.

Graf interferencji to graf, którego wierzchołkami są rozważane nadajniki; w grafie interferencji krawędź łączy parę wierzchołków-nadajników wtedy i tylko wtedy, gdy mogą ze sobą interferować. *Zbiór odległości zakazanych* to każdy taki skończony podzbiór zbioru liczb całkowitych nieujemnych, że zero jest jego elementem. Jeżeli T jest zbiorem odległości zakazanych, a G grafem, to *T-pokolorowaniem grafu G* nazywamy każdą funkcję c, która przyporządkowuje wierzchołkom grafu G liczby całkowite (zwane dalej kolorami) w taki sposób, że jeżeli wierzchołki u, v sąsiadują w grafie G, to $|c(u) - c(v)| \notin T$.

Nietrudno jest zauważyć, że każdy graf posiada nieskończenie wiele różnych T-pokolorowań. Ponieważ T-pokolorowanie jest w modelu Hale'a odpowiednikiem rozwiązania problemu przydziału częstotliwości, więc oczywiste jest, że nie wszystkie T-pokolorowania grafu interferencji będą równie dobre z punktu widzenia zastosowań. To wszystko powoduje, że badania nad T-pokolorowaniami nie koncentrują się na wyszukiwaniu dowolnych T-pokolorowań, ale na wyszukiwaniu tych, które minimalizują pewne kryteria jakości, takie jak rozpiętość (różnica pomiędzy największym a najmniejszym kolorem wykorzystanym przez pokolorowanie), rozpiętość krawędziowa (największa z odległości pomiędzy kolorami przydzielonymi przez pokolorowanie wierzchołkom sąsiadującym), czy też liczba użytych kolorów.

W niniejszym artykule postaramy się zawrzeć jak najwięcej informacji o złożoności zagadnienia polegającego na wyznaczaniu wartości T-rozpiętości i T-rozpiętości krawędziowej, gdzie *T-rozpiętością (krawędziową) grafu G* nazywa się najmniejszą z rozpiętości (krawędziowych) jego T-pokolorowań. Rozpoczniemy od przedstawienia związków łączących T-kolorowanie z H-kolorowaniem.

2. *H*-kolorowanie

Niech G oraz H będą dowolnymi grafami. Każdą funkcję, która odwzorowuje zbiór wierzchołków grafu G w zbiór wierzchołków grafu H w taki sposób, że obrazy wierzchołków sąsiadujących w grafie G sąsiadują w grafie H, jest nazywana *H-pokolorowaniem* lub *homomorfizmem grafów*. Liu [12] wykazała, że T-pokolorowanie, które nie wykorzystuje liczb ujemnych jako kolorów i posiada rozpiętość mniejszą lub równą d, jest G_T^{d+1}-pokolorowaniem, gdzie G_T^{d+1} jest grafem, którego wierzchołkami są liczby 0, 1, ..., d, a zbiór $\{i, j\}$ jest krawędzią w G_T^{d+1} wtedy i tylko wtedy, gdy $|i - j| \notin T$.

Twierdzenie 1 (Liu [12]). *$sp_T(G) \leq d$ wtedy i tylko wtedy, gdy graf G jest G_T^{d+1}-kolorowalny.* □

Podstawowy, ale bardzo użyteczny wynik mówiący o złożoności H-kolorowania pochodzi od Hella i Nešetřila. Przytaczamy go poniżej.

Twierdzenie 2 (Hell, Nešetřil [6]). *Niech H będzie ustalonym grafem prostym. Następujące zagadnienie: „dany jest graf G; czy G posiada chociaż jedno H-pokolorowanie?" jest wielomianowe, gdy H jest grafem dwudzielnym i NP-zupełne, gdy H nie jest grafem dwudzielnym.* □

3. Notacja

Aby móc w krótki i wygodny sposób opisywać rozważane dalej zagadnienia, wprowadzamy specjalną notację, posiadającą trzy pola: α, β i γ. Pola α i β określać będą dozwolone zestawy danych dla analizowanego problemu, a pole γ albo warunek, o którego prawdziwość pytamy, albo funkcję zależną od danych wejściowych, której wartość nas interesuje. Jeżeli pole γ zawierać będzie warunek, to zagadnienie opisane jako $\alpha \mid \beta \mid \gamma$ będziemy rozumieli następująco: dany jest graf należący do klasy α i zbiór odległości zakazanych, należący do rodziny β; czy spełniony jest dla nich warunek γ? Jeżeli pole γ zawierać będzie nazwę funkcji, to zagadnienie opisane jako $\alpha \mid \beta \mid \gamma$ będziemy rozumieli następująco: dany jest graf G należący do klasy α i zbiór odległości zakazanych T, należący do rodziny β; oblicz $\gamma(G, T)$.

W polu α może pojawić się jeden z następujących napisów: • — dowolne grafy; $\chi \leq 2$ — grafy dwudzielne; $\Delta \leq k$ — grafy o stopniu nie przekraczającym liczby k (gdy $k = 3$, to są to grafy podkubiczne); K_n — grafy pełne; *gc* — grafy kolczaste (zobacz [10]) i *r-reg* — grafy r-regularne. Pole β będzie zawierało albo napis $T = S$, co należy interpretować jako ustalony zbiór odległości zakazanych równy S, albo będzie puste, co należy interpretować jako dowolny zbiór odległości zakazanych. W polu γ może pojawić się jeden z następujących napisów: $sp \leq d$ — T-rozpiętość jest mniejsza lub równa d; $esp \leq d$ — T-rozpiętość krawędziowa jest mniejsza lub równa d; *sp* — T-rozpiętość; *esp* — T-rozpiętość krawędziowa. Dla przykładu napis $\chi \leq 2 \mid T = \{0\} \mid esp \leq 2$ oznacza następujący problem: „dany jest graf dwudzielny G oraz zbiór odległości zakazanych $T = \{0\}$; czy $esp_T(G) \leq 2$?", a napis $\Delta \leq 3 \mid\mid sp$ oznacza: „dany jest graf podkubiczny G oraz zbiór odległości zakazanych T, oblicz $sp_T(G)$".

4. Przypadki NP-zupełne

Listę znanych trudnych zagadnień otwierają, rzecz jasna, problemy • || *sp* i • || *esp*, o których wiemy, że są silnie NP-trudne, a ich wersje decyzyjne • || $sp \le d$, • || $esp \le d$ są NP-zupełne dla każdego $d \ge 3$. Korzystając z twierdzeń 1 i 2 nietrudno jest wykazać, że dla każdego zbioru odległości zakazanych S i każdej liczby naturalnej d zagadnienie • | $T = S$ | $sp \le d$ jest NP-zupełne, wtedy i tylko wtedy, gdy graf G_S^{d+1} nie jest dwudzielny. Ponieważ niemal wszystkie z grafów G_S^{d+1} mają liczbę chromatyczną większą niż 2, więc zagadnienie • | $T = S$ | *sp* jest silnie NP-trudne. Okazuje się przy tym, że aby uzyskać silną NP-trudność lub silną NP-zupełność nie trzeba rozważać aż tak ogólnych przypadków. Giaro [3] wykazał, że problemy $\Delta \le k$ | $T = S$ | $sp \le d_0$ oraz *k-reg* | $T = S$ | $sp \le d_0$, gdzie k jest dowolną liczbą naturalną większą niż 3, a d_0 jest najmniejszą liczbą naturalną, dla której graf $G_S^{d_0+1}$ nie jest dwudzielny, są NP-zupełne, skąd od razu wynika, że zagadnienia $\Delta \le k$ | $T = S$ | *sp*, *k-reg* | $T = S$ | *sp* są silnie NP-trudne. Co więcej, ten sam autor wykazał, że problem $\Delta \le 3$ | $T = S$ | $sp \le d_0$ jest NP-zupełny wtedy i tylko wtedy, gdy $G_S^{d_0+1}$ jest grafem bez trójkątów. Inny zaskakujący wynik został uzyskany przez Jansena [11]. Wykazał on, że wersje decyzyjne równoważnych problemów K_n || *sp*, K_n || *esp* są NP-zupełne, po czym Gräf [4] poprawił jego wynik, dowodząc, że te zagadnienia są silnie NP-zupełne!

Warto na koniec odnotować, że zagadnienia • | $T = \{0\}$ | *sp* i • | $T = \{0\}$ | *esp* są równoważne z następującym problemem: „dany jest graf G; oblicz $\chi(G)$"; stąd od razu wynika, że jeżeli wyznaczanie liczby chromatycznej dla grafów należących do klasy Γ jest NP-trudne, to i zagadnienia Γ | $T = \{0\}$ | *sp* i Γ | $T = \{0\}$ | *esp* są NP-trudne.

5. Przypadki wielomianowe

Lista znanych przypadków wielomianowych nie jest długa, bo nawet dla grafów o tak prostej strukturze jak grafy pełne wyznaczanie T-rozpiętości i T-rozpiętości krawędziowej jest silnie NP-trudne, co odnotowaliśmy już w punkcie poprzednim. Omawianie przypadków wielomianowych rozpoczniemy od grafów dwudzielnych, tj. od problemów $\chi \le 2$ || *sp* i $\chi \le 2$ || *esp*. Oba rozważane zagadnienia są wielomianowe, bo dla grafów dwudzielnych znamy proste i efektywne wzory zarówno na T-rozpiętość, jak i T-rozpiętość krawędziową. Warto odnotować, że jest to bodajże jedyna klasa grafów, dla której znamy proste wzory na T-rozpiętość i T-rozpiętość krawędziową dla każdego zbioru odległości zakazanych T.

Zagadnieniem wielomianowym jest także $\Delta \le 2 \parallel sp$ (zobacz [3,10]), choć tutaj sprawa nie jest już taka prosta, jak w przypadku grafów dwudzielnych. Może się to wydawać dziwne, bo jedyne grafy spójne spełniające warunek $\Delta \le 2$ to cykle i ścieżki, ale T-kolorowanie cykli nieparzystych jest znacznie trudniejsze niż ich wierzchołkowe kolorowanie. Problem $\Delta \le 2 \parallel esp$ jest w chwili obecnej otwarty, choć wiemy, że jego podproblem $\Delta \le 2 \mid T = S \mid esp$ jest wielomianowy dla każdego zbioru odległości zakazanych S.

Zagadnieniem wielomianowym jest także $gc \parallel sp$, co częściowo wykazano już w [10]. Jest to wynik uzyskany niedawno, ale bardzo interesujący, bo do klasy gc należą m.in. wszystkie kaktusy, drzewa wielokątowe i spójne grafy zewnętrznie planarne. Na samym końcu odnotujmy, że zagadnieniem wielomianowym jest także $\bullet \mid T = T_0 \mid sp \le d$, o ile tylko graf G_T^{d+1} jest dwudzielny, co natychmiast wynika z twierdzenia 2.

Tabela 1

Problemy NP-trudne i NP-zupełne

Zagadnienie	Złożoność
$\bullet \parallel esp$, $\bullet \parallel sp$	silnie NP-trudne
$K_n \parallel esp$, $K_n \parallel sp$	silnie NP-trudne
$\bullet \mid T = S \mid sp$	silnie NP-trudne
$\Delta \le k \mid T = S \mid sp$, $k\text{-}reg \mid T = S \mid sp$	silnie NP-trudne
$\bullet \parallel esp \le d\ (d \ge 3)$, $\bullet \parallel sp \le d\ (d \ge 3)$	NP-zupełne
$\bullet \mid T = S \mid sp \le d\ (\chi(G_S^{d+1}) > 2)$	NP-zupełne
$\Delta \le k \mid T = S \mid sp \le d_0$, $k\text{-}reg \mid T = S \mid sp \le d_0\ (k \ge 4)$	NP-zupełne
$\Delta \le 3 \mid T = S \mid sp \le d_0$ ($G_S^{d_0+1}$ jest grafem bez trójkątów)	NP-zupełne
$\bullet \mid T = \{0\} \mid sp$, $\bullet \mid T = \{0\} \mid esp$	NP-trudne

Tabela 2

Problemy wielomianowe

Zagadnienie	Złożoność
$\chi \le 2 \parallel sp$, $\chi \le 2 \parallel esp$	$O(\lvert T\rvert \log \lvert T\rvert)$
$\Delta \le 2 \parallel sp$	$O(\lvert T\rvert^5 \log \lvert T\rvert)$
$\Delta \le 2 \mid T = S \mid esp$	$O(1)$
$gc \parallel sp$	$O(n^4 + \lvert T\rvert^3 \log \lvert T\rvert)$
$\bullet \mid T = S \mid sp \le d\ (\chi(G_S^{d+1}) \le 2)$	$O(1)$

LITERATURA

1. Allen S.M., Hurley S., Smith D.H.: Lower bounding techniques for frequency assignment, Discrete Mathematics 197/198, 1999, pp. 41-52.
2. Cozzens M.B., Roberts F.S.: T-colorings of graphs and the channel assignment problem, Congressus Numerantium 35, 1982, pp. 191-208.
3. Giaro K.: Złożoność obliczeniowa problemu T-kolorowania grafu w zależności od jego maksymalnego stopnia, Politechnika Gdańska, Wydział ETI, Raport Techniczny 34/99.
4. Gräf A.: Distance graphs and the T-coloring problem, Discrete Mathematics 196, 1999, pp. 153-166.
5. Hale W.K.: Frequency assignment: theory and applications, Proceedings of the IEEE 68, 1980, pp. 1497-1514.
6. Hell P., Nešetřil J.: On the complexity of H-coloring, Journal of Combinatorial Theory, Series B, vol. 48, 1990, pp. 92-110.
7. Hurley S., Smith D.H.: Bounds for the frequency assignment problem, Discrete Mathematics 167/168, 1997, pp. 571-582.
8. Janczewski R.: Wielomianowy algorytm optymalnego T-kolorowania kaktusów, Politechnika Gdańska, Wydział ETI, Raport Techniczny 31/97.
9. Janczewski R.: O szczególnym przypadku problemu przydziału częstotliwości, Krajowe Sympozjum Telekomunikacji, Bydgoszcz 1998, tom D, p. 373-379.
10. Janczewski R.: Efektywne wyznaczanie optymalnego rozwiązania problemu przydziału częstotliwości dla niektórych klas grafów interferencji, Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, s. Automatyka, z.123, Gliwice 1998, p. 191-198.
11. Jansen K.: A rainbow about T-colorings for complete graphs, Discrete Mathematics 154, 1996, pp. 129-139.
12. Liu D.D.-F.: T-colorings of graphs, Discrete Mathematics 101, 1992, pp. 203-212.
13. Liu D.-D.F.: T-graphs and the channel assignment problem, Discrete Mathematics 161, 1996, pp. 197-205.
14. Roberts F.S.: T-colorings of graphs: recent results and open problems, Discrete Mathematics 93, 1991, pp. 229-245.
15. Tesman B.: T-colorings, list T-colorings, and set T-colorings of graphs, Ph.D. Thesis, Department of Mathematics, Rutgers University, New Brunswick, NJ, 1989.
16. Tesman B.: Applications of forbidden difference graphs to T-coloring, Congressus Numerantium 74 (1990), pp. 15-24.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. J.Klamka

Abstract

The frequency assignment problem can be defined as follows: there are several transmitters situated in a certain region of a plane; a channel is to be assigned to each of them in such a way that there is no interference during transmitting. The problem can be represented as one of graph coloring problems. More precisely, it has been proved that to solve the problem it suffices to build the so-called interference graph, i.e. the graph whose vertices are the transmitters and whose edges connect only these transmitters that interfere, and find one of its T-colorings, where a T-coloring of G is any function c that assigns an

integer $c(v)$ to each vertex v of G in such a way that $|c(u) - c(v)| \notin T$ whenever vertices u, v are adjacent. The aim of the paper is to present state-of-the-art on the complexity of the problem of finding T-colorings optimizing some criterions such as the span or edge span. We discuss known polynomial (bipartite graphs, cacti, outerplanar) and NP-complete (general graphs, complete graphs, subcubic and r-regular for $r \geq 4$) cases.