

Józef WOJNAROWSKI, Gabriel WRÓBEL

Instytut Podstaw Konstrukcji Maszyn

ALGEBRAICZNE METODY BADAŃ DRGAŃ UKŁADÓW MECHANICZNYCH
Z WIĘZAMI HOLOMOMICZNYMI

Streszczenie. Modelując liniowe dyskretne układy mechaniczne, skrępowane liniowymi więzami holonomicznymi, podano w pracy sposób konstruowania oraz opisu grafu biegunowego jako modelu struktury dynamicznej układu. Uogólniając następnie algebraiczne metody opisu układów mechanicznych, przedstawione w pracach [4, 5, 7], podano twierdzenia dotyczące analizy widmowej i modalnej układów skrępowanych więzami. Stosując liczby strukturalne składowych spójności grafu układu oraz określone w zbiorze liczb strukturalnych funkcje wyznacznikową oraz jednoczesności, wyprowadzono formuły będące podstawą analizy.

1. Wstęp

Przedstawione w pracy metody analizy układów mechanicznych skrępowanych więzami holonomicznymi stanowią z jednej strony rozwinięcie opracowanej przez Bellerte i Woźniackiego [1] metody grafów i liczb strukturalnych w kierunku zastosowań do modelowania układów nieelektrycznych, z drugiej zaś strony stanowią uogólnienie prezentowanych w pracach [3, 4, 5, 7] metod analizy na modele topologiczne o liczbie składowych spójności ≥ 1 , uwzględniające nałożone na układ dyskretny więzy holonomiczne. Uwzględniają one również możliwość binarnej reprezentacji liczb strukturalnych [2, 5].

Do opisu dyskretnego, liniowego układu mechanicznego przyjmijmy zbiór 1^S współrzędnych $1^s_i \in 1^S$, $i = 1, 2, \dots, \text{card}_1 S$ położenia układu w przestrzeni konfiguracji oraz zbiór 2^S współrzędnych $2^s_k \in 2^S$, $k = 1, 2, \dots, \text{card}_2 S$, natomiast l przyjmuje wartość 1 dla oddziaływań biernych, 2 dla oddziaływań z wymuszeniem dynamicznym, 3 - kinematycznym oraz 4 dla reakcji więzów sił uogólnionych, stanowiących wzajemne oddziaływania elementów układu. Trójkę uporządkowaną:

$$S = [1^S, 2^S, 3^S], \quad (1)$$

gdzie

$$3^S \subset 1^S \times 1^S \times 2^S \quad (2)$$

jest trójargumentową relacją konstytutywną, nazywamy strukturą dynamiczną układu mechanicznego.

Elementy ${}_{3^S}a_k \in {}_{3^S}S$ relacji wyznaczone są przez liniowe związki konstytutywne układu:

$${}_{21^S}a_k = ({}_{1^S}i_1 - {}_{1^S}i_j)z_k, \quad (3)$$

albo

$${}_{21^S}a_k = {}_{1^S}i_{1j} z_k, \quad (4)$$

gdzie ${}_{21^S}a_k \in {}_{2^S}S$, ${}_{1^S}i_{1j} = {}_{1^S}i_1 - {}_{1^S}i_j$, ${}_{1^S}i_1, {}_{1^S}i_j \in {}_{1^S}S$, w przypadku oddziaływań biernych. Parametr z_k przyjmuje znaczenie: $m_k p^2$ dla oddziaływania inercyjnego, $b_k p$ dla oddziaływania tłumika viskozycznego zaś c_k dla oddziaływania sprężystego w ruchu postępowym lub obrotowym. Symbol p oznacza operator różniczkowy $\frac{d}{dt}$. Jeżeli oddziaływanie odpowiadające przemieszczeniu ${}_{1^S}i_{1j}$ ma charakter czynny, to opisujący je związek przyjmie postać:

$${}_{22^S}a_k = Q_k \quad (5)$$

- dla wymuszenia dynamicznego bądź

$${}_{1^S}i_{1j} = q_{1j} \quad (6)$$

- dla wymuszenia k przy czym współrzędną siły uogólnionej przyporządkowanej wymuszonej współrzędnej przemieszczenia oznaczać będziemy przez ${}_{23^S}a_k$. Założmy ponadto, że współrzędne położenia układu spełniają oprócz związków konstytutywnych liniowe równania więzów holonomicznych skleronomicznych w postaci:

$$h_1({}_{1^S}i_1) = \sum_1 {}_{1^S}i_1 a_{i1} = 0, \quad 1 = 1, 2, \dots, w, \quad (7)$$

gdzie: a_{i1} są liczbami rzeczywistymi, w jest liczbą równań więzów.

Przyjmując postulat idealności więzów, możliwe jest zastąpienie w opisie układu równań więzów przez odpowiednie reakcje więzów, które przyjmą postać:

$$R_1 = \sum_{l=1}^w \lambda_l a_{l1}, \quad (8)$$

gdzie λ_l są mnożnikami Lagrange'a.

Definicyjne równania elementów relacji ${}_3S$, odpowiadających odzyszczeniu dynamicznym więzów ${}_{24}S_k \in {}_2S$, są następujące:

$${}_{24}S_k = R_k, \quad (9)$$

Każdemu z równań (4), (5), (6), (8) odpowiada zatem element $[{}_1s_i, {}_1s_j, {}_2s_k]$ ze zbioru ${}_3S$.

Strukturę dynamiczną S układu odwzorujemy wzajemnie jednoznacznie w graf X układu [7]:

$$f_{SX} : S \rightarrow X = [{}_1X, {}_2X, {}_3X], \quad (10)$$

gdzie ${}_1X$ to zbiór wierzchołków, ${}_2X$ zbiór krawędzi, ${}_3X$ trójargumentowa relacja incydencji w następujący sposób:

$$\forall i, j, k \left\{ ({}_1s_i \in {}_1S) \Leftrightarrow [f_{SX}({}_1s_i) = {}_1x_i \in {}_1X]; ({}_2s_k \in {}_2S) \Leftrightarrow [f_{SX}({}_2s_k) = {}_2x_k \in {}_2X]; \right. \quad (11)$$

$$\left. ({}_1s_i, {}_1s_j, {}_2s_k) \in {}_3S \Leftrightarrow [f({}_1s_i), f({}_1s_j), f({}_2s_k)] = [{}_1x_i, {}_1x_j, {}_2x_k] \in {}_3X \right\}.$$

Jeżeli krawędziom otrzymanego w ten sposób grafu przyporządkować odpowiadające im współrzędne wielkości fizycznych - sił uogólnionych ${}_2s_k \in {}_2S$ oraz uogólnionych przemieszczeń ${}_1s_{ij}$, odpowiadających przyległej do krawędzi parze wierzchołków - to graf w ten sposób opisany nazywamy grafem biegunowym układu mechanicznego.

W celu zastosowania algebraicznych metod do opisu i badań charakterystyk dynamicznych układu wprowadzimy jeszcze inny sposób opisu grafu układu, mianowicie za pomocą funkcji

$$f_{XN} : {}_2X \rightarrow N, \quad (12)$$

która krawędziom grafu przyporządkowuje w sposób wzajemnie jednoznaczny liczby naturalne. Elementy zbioru N , będące oznaczeniami krawędzi grafu, można interpretować również jako kody parametrów odpowiadających im związków konstytutywnych, to znaczy z_k dla oddziaływań biernych oraz Q_k , q_{ij} , R_k dla oddziaływań czynnych oraz reakcji więzów.

2. Zastosowanie grafów i liczb strukturalnych układu w analizie dynamicznej

Na wstępie podamy twierdzenia, na których oparte zostały zastosowania liczb strukturalnych w analizie układów - dowody można znaleźć w pracach [5, 6].

T w i e r d z e n i e 1. Wyznacznik $\left| \frac{D}{n} \right|$ układu równań algebraicznych swobodnego układu mechanicznego o n -elementowej relacji konstytutywnej

$$\text{card}_3 S = n \quad (13)$$

jest sumą jednakowego znaku iloczynów estrywności dynamicznych tego układu, której wartość bezwzględna $\left| \frac{D}{n} \right|$ jest równa funkcji wyznacnikowej liczby strukturalnej grafu układu

$$\text{Det}_Z A_n = \left| \frac{D}{n} \right|. \quad (14)$$

T w i e r d z e n i e 2. Jeżeli do swobodnego układu mechanicznego o liczbie parametrów $m > 0$ wprowadzimy wymuszenie dynamiczne 22^s_k w kierunku współrzędnej 1^s_{ij} , to wartość wyznacznika $\frac{D}{nab}$, utworzonego z wyznacznika $\frac{D}{n}$ układu równań opisujących układ mechaniczny przez podstawienie w miejsce kolumny odpowiadającej przemieszczeniu 1^s_{k1} , $1^s_{k1} z_b = 21^s_b$, $z_b \in Z$, kolumny wyrazów wolnych jest równa wyrażeniu:

$$22^s_a S_{\frac{1}{2}} m \left(\frac{\partial A}{\partial a}, \frac{\partial A}{\partial b} \right), \quad (15)$$

gdzie A jest liczbą strukturalną układu z wymuszeniem dynamicznym, natomiast Z jest zbiorem parametrów dynamicznych układu.

T w i e r d z e n i e 3. Jeżeli do swobodnego układu mechanicznego o liczbie parametrów $n \geq 2$ włączymy wymuszenie dynamiczne $22^s_{k_1}$ i zachodzi

$$21^s_{a_t} = 1^s_{i_t} i_{t-1} z_{a_t}, \quad t = 1, 2, \dots, l, \quad (16)$$

co równoważne jest włączeniu wymuszenia, któremu odpowiadająca w grafie krawędź tworzy cykl z łańcuchem o oznaczeniach a_1, a_2, \dots, a_l , to wartość bezwzględna wyznacznika $\frac{D}{nab}$ utworzonego z wyznacznika głównego $\frac{D}{n}$ układu równań opisujących układ mechaniczny przez podstawienie w miejsce kolumny odpowiadającej współrzędnej 1^s_j , $1^s_j \neq 1^s_{k_1}$, $1^s_{j0} z_b = 21^s_b$, kolumny wyrazów wolnych jest równa wyrażeniu:

$$\left| \frac{D}{nab} \right| = 22^s_a S_{\frac{1}{2}} m \left(\sum_{i=1}^l \frac{\partial A}{\partial a_i}, \frac{\partial A}{\partial b} \right). \quad (17)$$

2.1. Analiza widmowa

Graf będący modelem analizowanego układu składa się, ogólnie rzecz biorąc, z pewnej liczby składowych spójności zawierających krawędzie bierne oraz krawędzie odpowiadające reakcjom więzów, opisane odpowiednio równaniami (4) i (9). Wobec twierdzenia 3 lub w szczególnym przypadku twierdzenia 2 oraz twierdzenia 1 można współrzędne położenia układu wyznaczyć z zależności:

$$1^s i = \frac{\sum_k 2^s s_k \text{Sim} \left(\sum_t \frac{\partial A^J}{\partial a_t}, \frac{\partial A^J}{\partial b_i} \right)}{\text{Det}_Z A^J}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (18)$$

Podstawiając te wyrażenia do równań więzów otrzymujemy:

$$h_1(1^s k) = h_1(\lambda_i) = 0, \quad i, l = 1, 2, \dots, w, \quad (19)$$

gdzie λ_i są mnożnikami Lagrange'a, h_1 - funkcjami liniowymi.

Wyznacznik główny układu równań (19) względem mnożników λ_i , przyrównany do zera, stanowi równanie charakterystyczne układu mechanicznego, skrupowanego więzami o postaci (7).

Na podstawie twierdzenia 1 dla układu swobodnego równanie charakterystyczne sprowadza się do postaci:

$$\text{Det}_Z A = 0. \quad (20)$$

2.2. Analiza modalna

Aby określić główne postacie drgań własnych, zachodzi konieczność wyznaczenia elementów macierzy modalnej układu mechanicznego.

Oznaczając przez $r_s(i)|_t$ współczynnik będący ilorazem amplitud współrzędnych $1^s i$ $1^s t$, odpowiadającym częstości drgań własnych ω_i , korzystając z twierdzenia 3 można dla układu z więzami wyrazić wzorem:

$$r_s(i)|_t = \frac{\sum_k 2^s s_k \text{Sim} \left(\sum_{p_k=1_1}^{1_k} \frac{\partial A^J}{\partial a_{p_k}}, \frac{\partial A^J}{\partial a_c} \right)}{\sum_k 2^s s_k \text{Sim} \left(\sum_{p_k=1_1}^{1_k} \frac{\partial A^J}{\partial a_{p_k}}, \frac{\partial A^J}{\partial a_t} \right)} \Big|_{\omega_i} \quad (21)$$

w którym $2^s s_k$, $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ są oznaczeniami wartości współrzędnych reakcji więzów

$$z^{s_k} = z^{s_k}(\lambda_1), \quad i = 1, 2, \dots, w, \quad (22)$$

natomiast $\{a_{1_1}, a_{1_2}, \dots, a_{1_k}\}$ jest zbiorem oznaczeń krawędzi grafu tworzących cykl z krawędzią odpowiadającą współrzędnej z^{s_k} reakcji więzów. A^j jest liczbą strukturalną składowej spójności x^j grafu X zawierającej krawędzie odpowiadające współrzędnym $1^{s_s}, 1^{s_t}, z^{s_k}$. Równania (22) dla przypadku układu swobodnego redukują się po wykonaniu przejścia granicznego dla $z^{s_k} \rightarrow 0$ do postaci [7]:

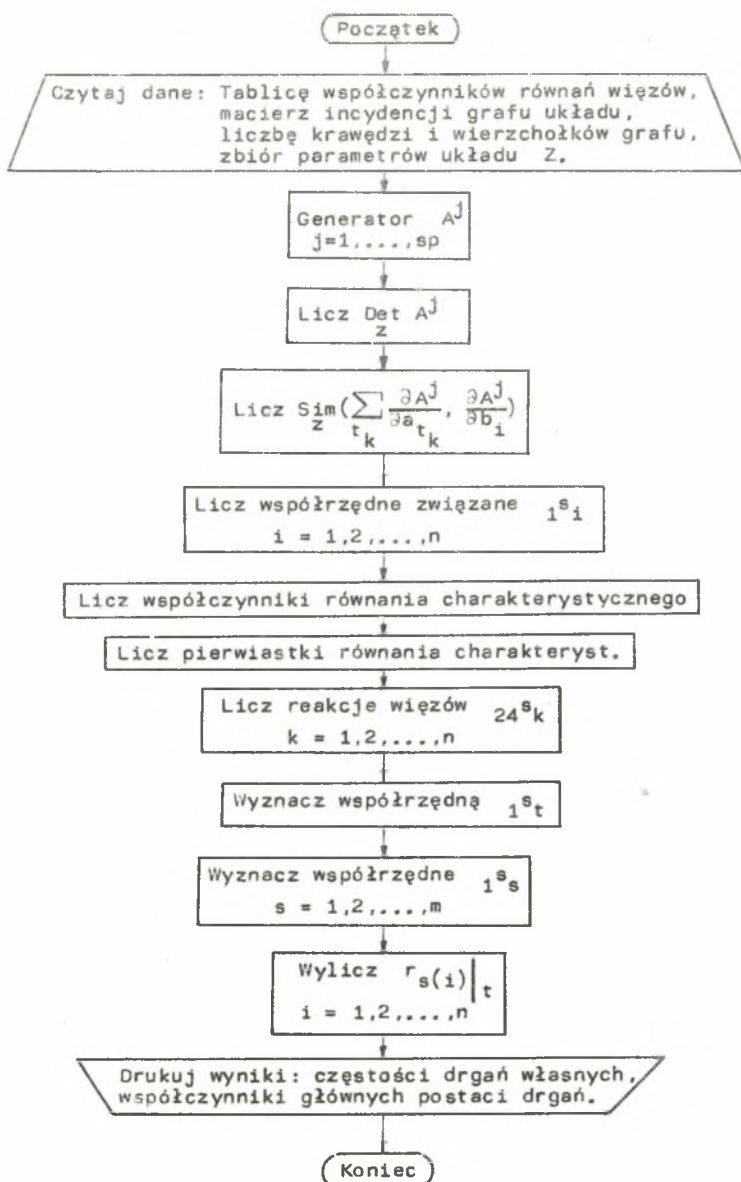
$$r_{s(i)} \Big|_t = \frac{\text{Sim} \left(\frac{\partial A}{\partial a_p}, \frac{\partial A}{\partial a_s} \right)}{\text{Sim} \left(\frac{\partial A}{\partial a_p}, \frac{\partial A}{\partial a_t} \right)} \Big|_{\omega_1} = \frac{\text{Sim} \left(\frac{\partial A}{\partial a_s}, \frac{\partial A}{\partial a_t} \right)}{\text{Det} \frac{\partial A}{\partial a_t}} \Big|_{\omega_1}. \quad (23)$$

3. Zakończenie

Graf biegunowy układu mechanicznego może być, jak to wykazano, podstawę analizy dynamicznej układu. Wyznaczona na podstawie grafu liczba strukturalna wraz z określonymi dla niej funkcjami stanowi przy tym pełną informację o strukturze dynamicznej układu, pozwalając na wyznaczenie charakterystyk układu, co na przykładzie częstości własnych oraz współczynników głównych postaci drgań pokazano w tej pracy. Metoda obejmuje swoją ogólnością zarówno układy swobodne jak i skrępowane więzami w postaci (7).

Ze względu na charakter działań określonych na liczbach strukturalnych prezentowana metoda jest szczególnie dogodna do algorytmizacji i automatyzacji. Mając to na względzie w procesie numerycznym, stosuje się również binarną postać liczb strukturalnych [2], co sprowadza znaczną ilość działań do operacji logicznych, a przez to jest czynnikiem optymalizacji procesów numerycznych.

Poniżej przedstawiono schemat blokowy algorytmu analizy widmowej i modalnej układu mechanicznego z więzami.



LITERATURA

- [1] S. Bellert, H. Woźniacki: Analiza i synteza układów elektrycznych metodą liczb strukturalnych, WNT, Warszawa 1968.
- [2] C. Syc: O pewnym sposobie kodowania liczb strukturalnych Bellerta dla maszyn cyfrowych. Biul. WAT N^o 7 (191) Warszawa (1968), 61-77.
- [3] J. Wojnarowski: Analiza dyskretnych liniowych układów mechanicznych o skończonej liczbie stopni swobody metodą grafów. Proc. Polish Czechoslovak Conf. on Machine Dynamics, 2, (1971), 567-581.
- [4] J. Wojnarowski, A. Buchacz: Zastosowanie grafów i liczb strukturalnych do wyznaczania równania charakterystycznego i widma częstości drgań. Mech. Teoret. i Stos., 4, 13 (1975), 545-560.
- [5] J. Wojnarowski, G. Wróbel: Zastosowanie liczb strukturalnych binarnych w analizie i optymalizacji dyskretnych liniowych układów mechanicznych. Zbiór referatów XV Jubileuszowego Sympozjonu - Optymalizacja w Mechanice, PTMTS, Gliwice Vol. 34 (1976), 633-651.
- [6] J. Wojnarowski, G. Wróbel: Modelowanie i analiza drgań dyskretnych liniowych układów mechanicznych z więzami metodą grafów i liczb strukturalnych. Zb. ref. VII Ogólnopolskiej Konf. Naukowej Teorii Maszyn i Mechanizmów, Akad. Rol. w Lublinie, Lublin (1977), 607-617.
- [7] J. Wojnarowski: Grafy i liczby strukturalne jako modele układów mechanicznych. IPKM Pol. Śl., PTMTS, Gliwice, Nr 38, Gliwice 1977.

D o d a t e k 1

Elementy algebry liczb strukturalnych Bellerta

Liczbą strukturalną stałowierszową nazywamy rodzinę A zbiorów równolicznych a_i , których elementy a_{ij} są liczbami z określonego podzbiory liczb naturalnych, przy czym zbiory a_i nie zawierają powtarzających się elementów, zaś rodzina A nie zawiera identycznych zbiorów. Zbiory a_i nazywa się kolumnami liczby strukturalnej A . Ze względu na określone działania symboli liczb strukturalnych A i B jako różnicy symetrycznej zbiorów

$$A + B = C, \quad C = A \setminus B \cup B \setminus A \quad (1)$$

oraz iloczynu

$$A \cdot B = C, \quad (2)$$

$$(a_i b_j \in C) \Leftrightarrow [(a_i \in A) \wedge (b_j \in B) \wedge (a_i \cap b_j = \emptyset) \wedge r(a_i b_j) = 2(k+1)],$$

gdzie $r(a_i b_j)$ oznacza liczbę równych zbiorów $\{a_i b_j\}$ w iloczynie $A \cdot B$, k jest liczbą całkowitą, liczby strukturalne tworzą pierścień, którego elementami neutralnymi dodawania 0 i mnożenia 1 są odpowiednio liczba strukturalna pusta oraz liczba strukturalna o jednej kolumnie, będącej zbiorem pustym.

Z określonych działań wynika możliwość przedstawienia liczby strukturalnej A w postaci:

$$A = \sum_i \prod_j a_{ij}. \quad (3)$$

Liczbą strukturalną Bellerta układu mechanicznego będziemy nazywać liczbą strukturalną związaną z grafem układu. Można wyznaczyć ją w postaci iloczynu liczb strukturalnych jednowierszowych złożonych z oznaczeń krawędzi incydentnych z $(n-1)$ wierzchołkami grafu układu, gdzie n jest liczbą wierzchołków grafu

$$A = A_1 A_2 \dots A_{n-1}. \quad (4)$$

Dla liczb strukturalnych określone są ponadto: funkcja wyznacznikowa $\text{Det}_Z A$ oraz funkcja jednoczesności $\text{Sim}_Z(A, B)$.

Funkcja $\text{Det}_Z A$ liczby strukturalnej A nad zbiorem parametrów Z określona jest następująco:

$$\text{Det}_Z A = \text{Det}_Z \sum_i \prod_j [a_{ij}] = \sum_i \prod_j z_{ij}. \quad (5)$$

gdzie $z_{ij} \in Z$ jest parametrem odpowiadającym elementowi a_{ij} liczby strukturalnej.

Funkcja $\text{Sim}_Z(A, B)$ określona jest następująco:

$$\text{Sim}_Z(A, B) = \sum_{i(f)} \text{Det}_z a_i - \sum_{k(f)} \text{Det}_z a_k, \quad (6)$$

gdzie:

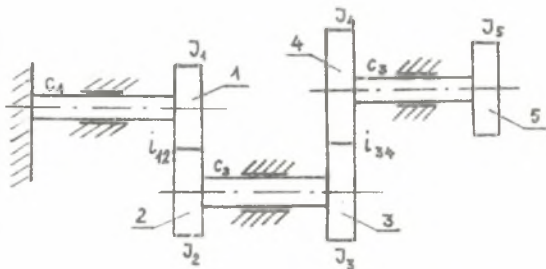
$$\{a_i\} \cap \{a_k\} = \emptyset, \quad \{a_i\} \cup \{a_k\} = A \cup B,$$

zakresy wskaźników i oraz k zależą od warunku f .

D o d a t e k 2

Przykład analizy układu mechanicznego z więzami

Na rys. 1 pokazany jest przykład układu liniowego z więzami. Przyjmując oznaczenia krawędzi grafu układu jak na rys. 2a graf niespójny układu mechanicznego przedstawiony jest na rys. 2b.



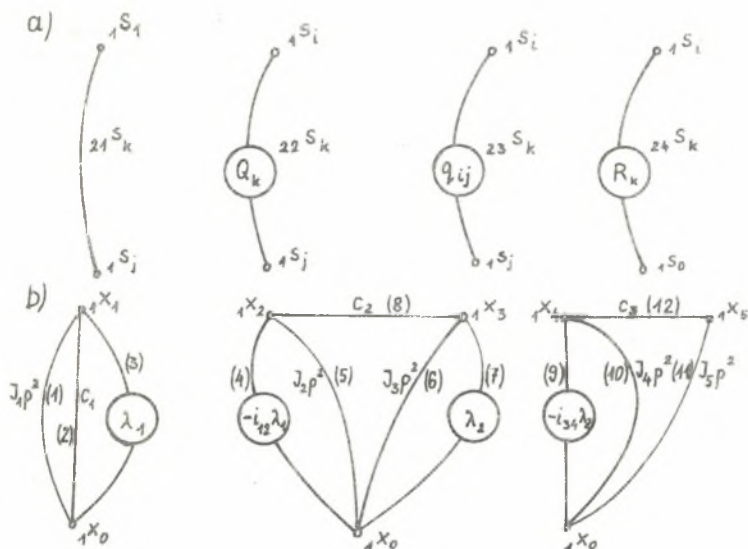
Rys. 1

- Równania więzów układu:

$$1^s_{10} - 1_{12} 1^s_{20} = 0,$$

(7)

$$1^s_{30} - 1_{34} 1^s_{40} = 0.$$



Rys. 2

Reakcje więzów:

$$\begin{aligned}
 24^{s_1} &= \lambda_1, & 24^{s_3} &= \lambda_2, \\
 24^{s_2} &= -i_{12}\lambda_1, & 24^{s_4} &= -i_{34}\lambda_2.
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

Liczby strukturalne składowych spójności grafu układu mają postać:

$$\begin{aligned}
 A^1 &= [1 \ 2 \ 3], \\
 A^2 &= [4 \ 5 \ 8] [6 \ 7 \ 8] = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 & 5 & 5 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 8 & 6 & 7 & 8 & 8 & 8 \end{bmatrix}, \\
 A^3 &= [9 \ 10 \ 12] [11 \ 12] = \begin{bmatrix} 9 & 9 & 10 & 10 & 11 \\ 11 & 12 & 11 & 12 & 12 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}
 \tag{9}$$

Współrzędne występujące w równaniach więzów:

$$1^{s_1} = 1^{s_{10}} = \frac{\lambda_1 \text{Sim}\left(\frac{\partial A^1}{\partial z_2}, \frac{\partial A^1}{\partial z_1}\right)}{\text{Det} \frac{A^1}{z}} = \frac{\lambda_1}{z_1 + z_2} = \frac{\lambda_1}{c_1 + I_1 p^2},$$

$$1^{s_5} = 1^{s_{20}} = \frac{-1_{12} \lambda_1 \text{Sim}\left(\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial A^2}{\partial z_4}, \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial A^2}{\partial z_7}\right) + \lambda_2 \text{Sim}\left(\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial A^2}{\partial z_7}, \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial A^2}{\partial z_4}\right)}{\text{Det} \left(\frac{\partial A^2}{z} \begin{vmatrix} 4 \\ 7 \end{vmatrix} \right)} =$$

$$= \frac{-1_{12} \lambda_1 (z_6 + z_8) + \lambda_2 z_8}{z_5 z_6 + z_5 z_8 + z_6 z_8},$$

$$1^{s_6} = 1^{s_{30}} = \frac{-1_{12} \lambda_1 \text{Sim}\left(\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial A^2}{\partial z_7}, \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial A^2}{\partial z_6}\right) + \lambda_2 \text{Sim}\left(\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial A^2}{\partial z_7}, \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial A^2}{\partial z_4}\right)}{\text{Det} \left(\frac{\partial A^2}{z} \begin{vmatrix} 4 \\ 7 \end{vmatrix} \right)} =$$

$$= \frac{-1_{12} \lambda_1 z_8 + \lambda_2 (z_5 + z_8)}{z_5 z_6 + z_5 z_8 + z_6 z_8},$$

$$1^{s_{10}} = 1^{s_{40}} = \frac{-1_{34} \lambda_2 \text{Sim}\left(\frac{\partial A^3}{\partial z_9}, \frac{\partial A^3}{\partial z_{10}}\right)}{\text{Det} \left(\frac{\partial A^3}{z} \right)} = \frac{-1_{34} \lambda_2 (z_{11} + z_{12})}{z_{10} z_{11} + z_{11} z_{12} + z_{10} z_{12}}.$$

Po podstawieniu tych wyrażeń do równań więzów oraz po rozwinięciu wyznacznika tego układu względem mnożników Lagrange'a otrzymamy:

$$(z_5 + z_8)(z_{10} z_{11} + z_{11} z_{12} + z_{10} z_{12}) +$$

$$+ i_{12}^2 (z_1 + z_2)(z_{10} z_{12} + z_{11} z_{12} + z_{10} z_{11}) +$$

$$+ i_{34}^2 (z_{11} + z_{12})(z_5 z_6 + z_5 z_8 + z_6 z_8) +$$

$$+ i_{12}^2 i_{34}^2 (z_1 + z_2)(z_6 + z_8)(z_{11} + z_{12}) = 0,$$

które to równanie stanowi równanie charakterystyczne układu mechanicznego.

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЙ КОЛЕБАНИЙ
МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ГОЛОНОМИЧЕСКИМИ СВЯЗЯМИ

Р е з ю м е

Моделируя линейные дискретные механические системы, стеснённые линейными голономическими связями, в работе производства способ строения и описания полюсного графа как модели динамической структуры системы. Затем, обобщая алгебраические методы описания механических систем, представленные в работе [4, 5, 7], были предложены законы, касающиеся спектрального и модального анализа систем, стеснённых связями. Применяя структурные числа составляющих сплочённости графа системы и определённые во множестве структурных чисел функции – определительную и одновременности, были выведены формулы, которые являются основанием для анализа.

ALGEBRAIC INVESTIGATION METHODS OF MECHANICAL SYSTEMS
VIBRATIONS WITH HOLONOMIC CONSTRAINTS

S u m m a r y

A construction method and description of a pole graph as a model of the system's dynamical structure has been presented for discrete linear mechanical systems restricted by linear holonomic constraints. The paper also presents some theorems on spectral and modal analysis of such systems as a generalization of algebraic descriptive methods stated in [4, 5, 7]. By using structural numbers of graph's coherence components and the functions determined in the structural numbers set i.e. the determinant and the simultaneity functions, the authors showed some formulas that serve as a basis for the analysis.