ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1978

Seria: ENERGETYKA z. 65 Nr kol. 561

Józef WOJNAROWSKI, Jerzy ŚWIDER

Instytut Podstaw Konstrukcji Maszyn

MODELOWANIE NIELINIOWYCH UKŁADÓW MECHANICZNYCH ZA POMOCĄ GRAFÓW PRZEPŁYWU SYGNAŁÓW

Streszczenie. W pracy sformułowano zagadnienie modelowania drgań nieliniowych układów mechanicznych za pomocą grafów przepływu sygnałów. Wykazano, że dokonując transformacji grafu biegunowego nieliniowego układu mechanicznego w graf przepływu sygnałów można zawsze doprowadzić go do postaci macierzowej, w której tylko jedna z gałęzi pętli obciążona jest nieliniową transmitancją **T**. Opracowaną metodę najwygodniej stosować w programowaniu elektronicznych maszyn analogowych i badaniu parametrycznej wrażliwości nieliniowych układów mechanicznych.

1. Wstęp

Grafy przepływu sygnałów, używane powszechnie w dyskretyzacji numerycznej układów elektrycznych i automatycznej regulacji [1, 2, 3, 4, 5], uzyskują coraz większe zainteresowanie specjalistów z dziedziny mechaniki [6, 7, 8, 9, 10, 11, 12]. Jest to konsekwencją formułowania problemów współczesnej techniki, których rozwiązanie coraz bardziej uzależnione jest od modelowania złożonych układów fizycznych. Spośród metod modelowania nieliniowych, dyskretnych układów mechanicznych godną zainteresowania jest metoda grafów przepływu sygnałów, ponieważ może być stosowana z bezpośrednim wykorzystaniem maszyn analogowych i cyfrowych. Efektywność metody grafów przepływu sygnałów polega między innymi na tym, że omijając etap układania równań różniczkowych ruchu, umożliwia wprost z grafu przejść do programu maszyny analogowej [5, 13] lub algorytmu obliczeń maszyny cyfrowej [6].

W przypadku stosowania grafów przepływu sygnałów do sporządzenia programu dla elektrycznej maszyny analogowej (EMA), zwiększanie liczby elementów nieliniowych układu mechanicznego praktycznie nieznacznie tylko komplikuje procedurę modelowania; ma jednak decydujący wpływ na złożoność grafu przepływu sygnałów. Liczba nieliniowych gałęzi grafu determinuje liczbę węzłów głównych [14], a w konsekwencji określa minimalny zbiór transmitancji zredukowanego, nieliniowego grafu przepływu sygnałów. Decyduje to istotnie o złożoności analizy wrażliwości parametrycznej.

2. Istota metody grafów przepływu sygnałów w modelowaniu nieliniowych układów mechanicznych

W konstruowaniu grafu przepływu sygnałów nieliniowego układu mechanicznego można posłużyć się:

1) metodą czwórnikowych grafów przepływu sygnałów,

2) metodą transformacji grafu biegunowego z nieliniowymi wagami krawędzi w nieliniowy graf przepływu sygnałów.

Sposób konstruowania czwórnikowych grafów przepływu sygnałów liniowych elementów układu mechanicznego przedstawiono w pracy [4]. Metodę tę można rozszerzyć o klasę elementów nieliniowych, jeśli w miejsce sztywności lub podatności dynamicznych elementów liniowych wstawić odpowiednie funkcje nieliniowe. Metoda czwórnikowych grafów przepływu sygnałów, w przypadku modelowania złożonych układów mechanicznych o mieszanej strukturze [9] staje się uciążliwa, z uwagi na złożoność koniecznych połączeń między zaciskami czwórników. Należy zwrócić jednak uwagę, że w modelowaniu układów mechanicznych ze sprzężeniami dynamicznymi, tj. takich, dla których nie istnieją grafy biegunowe pierwszej kategorii. Metoda ta jest praktycznie jedynym możliwym sposobem uzyskania grafu przepływu sygnałów układu.

W przypadku, gdy modelowany nieliniowy układ mechaniczny można przedstawić w postaci grafu biegunowego pierwszej kategorii [6] najwygodniej jest posłużyć się metodą transformacji grafu biegunowego.

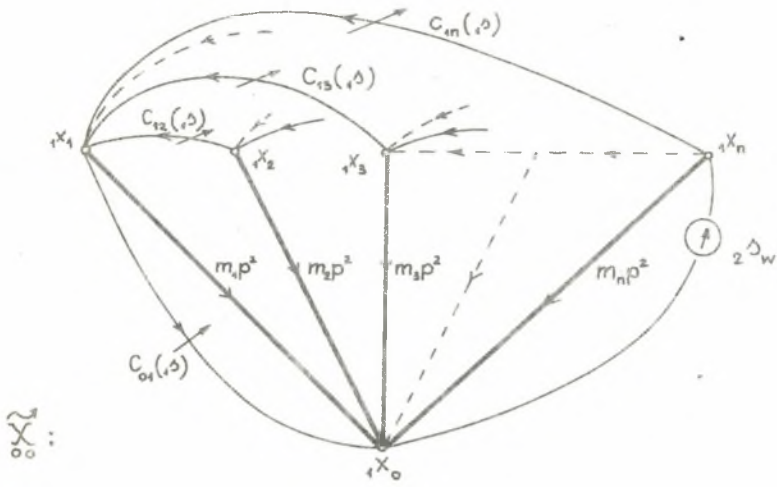
2.1. Metoda transformacji grafu biegunowego z nieliniowymi wagami krawędzi w nieliniowy graf przepływu sygnałów

Metoda transformacji grafu biegunowego z nieliniowymi wagami krawędzi w nieliniowy graf przepływu sygnałów nie różni się zasadniczo od transformacji dla grafów liniowych, prezentowanej w pracach [1, 7, 9]. Należy jedynie zwrócić uwagę, że gałęziom drzewa grafu biegunowego przyporządkowane muszą być łuki o transmitancjach typu podatności dynamicznych, a cięciwom - łuki o transmitancjach typu sztywności dynamicznych[x)]. Z tego powodu, jeśli konstruowany graf ma być podstawą sporządzenia modelu analogowego układu mechanicznego, należy tak wybrać drzewo tworzące, aby składało się z gałęzi reprezentujących masy uogólnione i nie zawierało krawędzi o nieliniowych wagach.

Dla przedstawienia tej metody rozważmy nieliniowy układ mechaniczny o mieszanej strukturze, posiadający n stopni swobody. Graf biegunowy pierwszej kategorii $\vec{X}$ przedstawiono na rys. 1. W celu uzyskania grafu przepływu sygnałów X modelowanego układu w grafie $\vec{X}$ wybieramy drzewo tworzące Lagrange'a $\overset{L}{X}$ o gałęziach reprezentujących masy uogólnione układu (pogrubione krawędzie na rys. 1).

---

x) Wynika to z praw rozpływu zmiennych w wierzchołkach i konturach grafu biegunowego (por. np. [6]).



Rys. 1

Oznaczając przez:

11^s - zmienną biegunową układu mechanicznego (typu uogólnionej prędkości),

1^s - zmienną biegunową układu mechanicznego (typu uogólnionego przemieszczenia),

2^s - zmienną przepływową układu mechanicznego (typu uogólnionej siły),

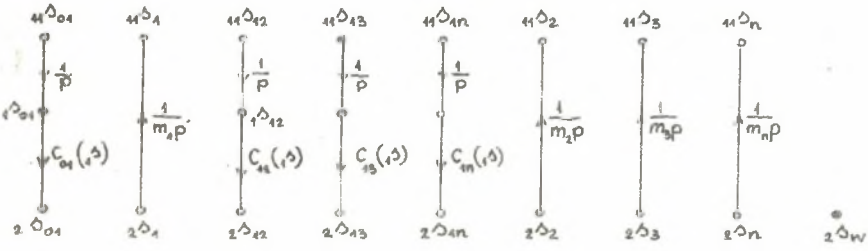
w - indeks zmiennej wzbudzenia układu,

m, c - odpowiednio uogólnioną masę i sztywność elementów układu,

p - argument przekształcenia Laplace'a

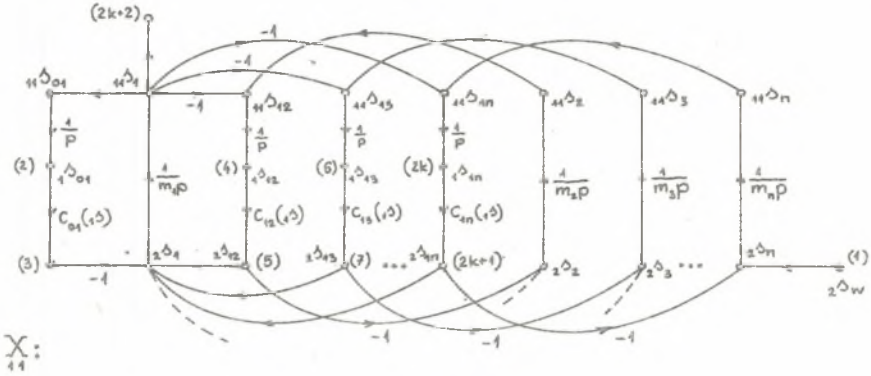
ustawiamy w kolejności występowania krawędzi w grafie biegunowym $\tilde{X}_{00}$ łuki konstruowanego grafu przepływu sygnałów, tworząc jego szkielet [12] (rys. 2).

Dokonując domknięcia szkieletu grafu przepływu sygnałów łukami o wagach 1 lub -1, zgodnie z zasadami rozpływu zmiennych w wierzchołkach i kon-



Rys. 2

turach grafu biegunowego $\vec{X}_{00}$ (rys. 1), uzyskano ostateczną postać grafu przepływu sygnałów X_{11} modelowanego, nieliniowego układu mechanicznego o mieszanej strukturze (rys. 3).



Rys. 3

3. Nieliniowy graf przepływu sygnałów układu mechanicznego jako podstawa sporządzenia programu do uniwersalnej EMA

Nieliniowy graf przepływu sygnałów modelowanego układu mechanicznego można bez trudu przetransformować w program do EMA.

Oznaczając przez:

$a_{{}_{11}s_i}$ - współczynnik skali zmiennej ${}_{11}s_i$,

$a_{{}_{2}s_j}$ - współczynnik skali zmiennej ${}_{2}s_j$,

$a_{c_{13}}$ - współczynnik skali funkcji nieliniowej,

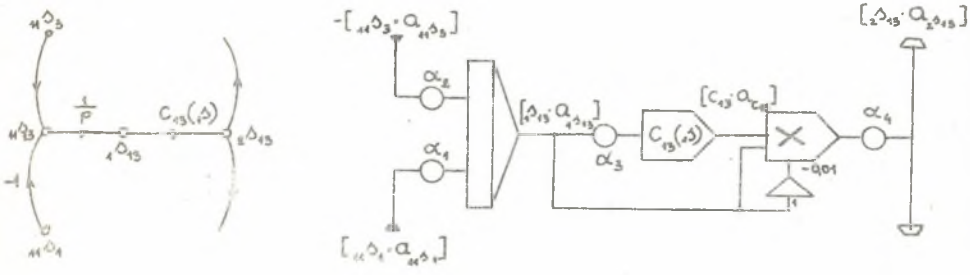
$\boxed{c_{13}({}_{1}s)}$ nieliniowy człon operacyjny maszyny analogowej,

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ - nastawy potencjometrów,

$$\alpha_1 = \frac{a_{{}_{1}s_{13}}}{a_{{}_{11}s_1}}, \quad \alpha_2 = \frac{a_{{}_{11}s_{13}}}{a_{{}_{11}s_3}}, \quad \alpha_3 = \frac{a_{c_{13}}}{a_{{}_{1}s_{13}}},$$

$$\alpha_4 = \frac{a_{{}_{2}s_{13}}}{a_{{}_{1}s_{13}} \cdot a_{c_{13}}}, \ 100$$

przedstawiono na rys. 4 jedną nieliniową gałąź uzyskanego grafu i odpowiadający jej ciąg elementów operacyjnych maszyny analogowej.



Rys. 4

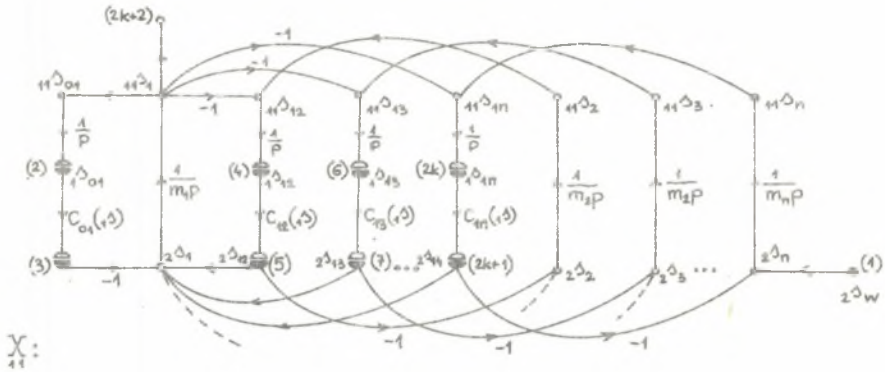
Zastępując wszystkie łuki grafu przepływu sygnałów ciągami właściwych członków operacyjnych maszyny analogowej, uzyskać można program bez konieczności konstruowania i skalowania modelu matematycznego.

4. Redukcja nieliniowego grafu przepływu sygnałów

W przypadku występowania nieliniowych transmitancji w łukach grafu przepływu sygnałów nie można stosować ogólnej reguły redukcji Masona. Posługując się jednak metodą węzłów głównych [14] nieliniowy graf przepływu sygnałów zredukować można do grafu zawierającego źródło, upust oraz dwa razy tyle węzłów pośrednich (tzw. węzłów głównych), ile graf posiada łuków o nieliniowych wagach[x)].

Dla ilustracji metody przedstawimy sposób redukcji nieliniowego grafu przepływu sygnałów na przykładzie grafu pokazanego na rys. 3. W tym celu, w redukowanym grafie ponumerowano: węzeł źródło (1), węzeł upust (2k + 2) oraz węzły główne od (2) do (2k + 1), gdzie k jest liczbą elementów nieliniowych układu mechanicznego. Następnie odłączono w węzłach głównych nieliniowe łuki i dokonano redukcji uzyskanego w ten sposób podgrafu liniowego (rys. 5).

x) Liczba ta zmniejsza się, gdy któraś z gałęzi nieliniowych połączona jest ze źródłem lub upustem.



Rys. 5

Konieczne do wyznaczenia, liniowe transmitacje zredukowanego grafu przepływu sygnałów ujmuje macierz transmitancji T_p

$$
\mathbf{T}_p = \begin{bmatrix}
0 & T_{1,2} & 0 & T_{1,4} & 0 & T_{1,6} & 0 & \cdot & T_{1,2k} & 0 & T_{1,2k+2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 & 0 \\
0 & T_{3,2} & 0 & T_{3,4} & 0 & T_{3,6} & 0 & \cdot & T_{3,2k} & 0 & T_{3,2k+2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 & 0 \\
0 & T_{5,2} & 0 & T_{5,4} & 0 & T_{5,6} & 0 & \cdot & T_{5,2k} & 0 & T_{5,2k+2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 & 0 \\
0 & T_{7,2} & 0 & T_{7,4} & 0 & T_{7,6} & 0 & \cdot & T_{7,2k} & 0 & T_{7,2k+2} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 & 0 \\
0 & T_{2k+1,2} & 0 & T_{2k+1,4} & 0 & T_{2k+1,6} & 0 & \cdot & T_{2k+1,2k} & 0 & T_{2k+1,2k+2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

Zredukowany graf przepływu sygnałów $\underset{11}{X}$ pokazano na rys. 6, a w postaci macierzowej $\underset{11}{\mathbf{X}}$ na rys. 7,

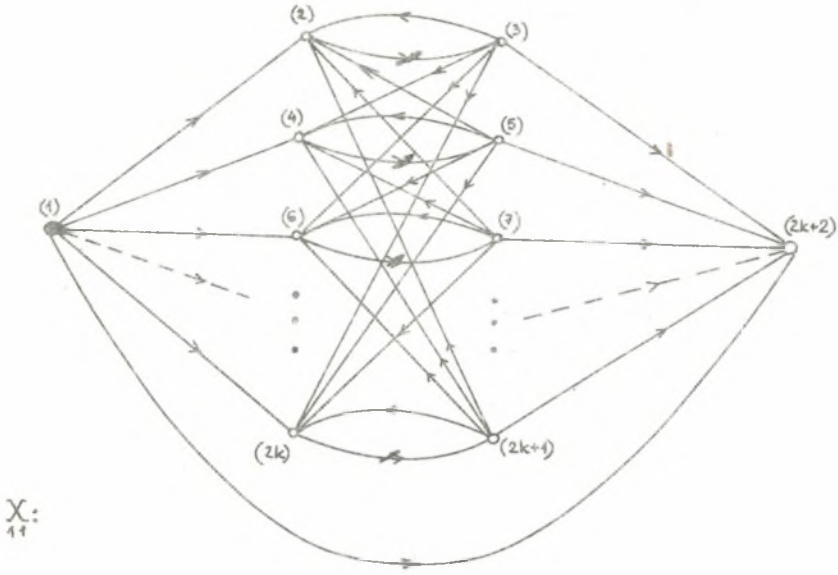
gdzie:

${}_2s_w$ - zmienna przepływowa wzbudzenia układu,

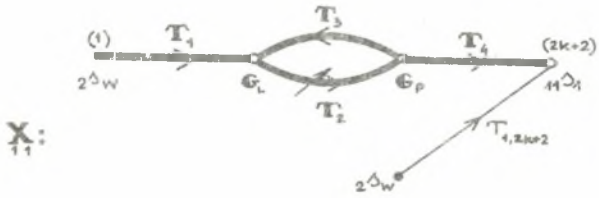
${}_{11}s_1$ - zmienna biegunowa odpowiedzi układu,

$\mathbf{G}_1$ - macierz wierszowa zmiennych, odpowiadających półwęzłom, upustom węzłów głównych podgrafu liniowego

$$\mathbf{G}_1 = \left[{}_1s_{01},\ {}_1s_{12},\ {}_1s_{13},\ \cdots,\ {}_1s_{1n}\right],$$



Rys. 6



Rys. 7

G_p - macierz wierszowa zmiennych, odpowiadających półwęzłom źródłom węzłów głównych podgrafu liniowego,

$$G_p = \left[2^s01,\ 2^s12,\ 2^s13,\ \dots,\ 2^s1n\right],$$

T_1 - macierz wierszowa transmitancji między węzłem wzbudzenia a półwęzłami upustami węzłów głównych podgrafu liniowego,

$$T_1 = \left[T_{1,2},\ T_{1,4},\ T_{1,6},\ \dots,\ T_{1,2k}\right],$$

T_2 - diagonalna macierz nieliniowych transmitancji gałęzi grafu przepływu sygnałów X_{11},

$$\mathbf{T}_2 = \mathrm{DIAG}\left[T_{2,3},\ T_{4,5},\ T_{6,7},\ \ldots,\ T_{2k,\ 2k+1}\right],$$

T_3 - macierz kwadratowa o wymiarze k x k, transmitancji pomiędzy węzłami głównymi grafu przepływu sygnałów

$$\mathbf{T}_3 = \begin{bmatrix} T_{3,2}, & T_{3,4}, & T_{36}, & \cdot & T_{3,2k} \\ T_{5,2}, & T_{5,4}, & T_{56}, & \cdot & T_{5,2k} \\ T_{7,2}, & T_{7,4}, & T_{76}, & \cdot & T_{7,2k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ T_{2k+1,2} & T_{2k+1,4} & T_{2k+1,6} & \cdot & T_{2k+1,2k} \end{bmatrix}_{(k \times k)}$$

$T_{1,2k+2}$ - liniowa transmitancja między źródłem, a upustem analizowanego grafu przepływu sygnałów $\underset{11}{X}$.

Złożoność ostatecznie zredukowanego, nieliniowego grafu przepływu sygnałów $\underset{11}{X}$ uzależniona jest, jak wcześniej wspomniano, od liczby nieliniowych elementów układu mechanicznego.

Przy niewielkiej liczbie nieliniowości uzyskany graf przepływu sygnałów może być podstawą przeprowadzenia analizy wrażliwości układu mechanicznego (np. na zmiany parametrów elementów nieliniowych [14, 15]).

5. Uwagi końcowe

Znajomość przedstawionych w pracy metod modelowania rozszerza zakres możliwości wykorzystania grafów przepływu sygnałów na klasę układów nieliniowych. Nabiera to szczególnego znaczenia w systemowej analizie złożonych układów mechanicznych.

LITERATURA

[1] O. Wing: Ladder Netvork Analysis by Signal-Fow Graph - Application to Analog Computer Programming, Trans. IRE, 1956, vol. CT-3, 289-294.

[2] J.S. Mason, H.J. Zimmermann: Elektronic Circuits, Signal and Systems, John Wiley & Sons, INC 1960, New York - London.

[3] L. Robichaud, M. Boisvert, J. Robert: Grafy przepływu sygnałów, PWN, Warszawa 1968, s. 229 (tłum. książki: L. Robichaud, M. Boisvert, J. Robert: Graphes de fluence. Applications à l'électrotechnique et à l'electronique. Calculateurs analogiques et digitaux), 1961 Eyrolles Paris. - Presses de l'Universite'Laval Québec).

[4] T.M. Rajcyn: Synteza układów sterowania automatycznego metodą grafów, WNT, Warszawa, 1973, s. 103 (tłum. książki T.M. Райцын: Синтез систем автоматического управления методом направленных графов, "Энергия", Ленинградское Отделение, 1970 .

[5] Y. Takahashi, M.J. Rabins, D.M. Auslander: Sterowanie i systemy dynamiczne. WNT, Warszawa 1976, s. 691 (tłum. książki: Y. Takahashi, M.J. Rabins, D.M. Auslander: Control and Dynamic Systems, Copyright 1970 by Addison-Wesley Publishing Company, Inc.).

[6] В.Н. Федорович, М.И. Орлова, А.А. Иванов: Расчёт динамических моделей с "рычагами связи" механических и электромеханических колебательных систем методом графов, Вопросы радиоэлектроники, сер. ТПС, 1871, вып.

[7] А.Н. Герлих, Л.И. Клюхин: Применение теории графов для анализа эфективности многокаскадных и блочных систем виброизолирующей амортизации механизмов, Тр. Ленингр. коробл. института 1974, вып. 91.

[8] J. Wojnarowski: Grafy i liczby strukturalne jako modele układów mechanicznych, Pol. Śl. PTMTS, Oddział Gliwice, z. 38, Gliwice 1977.

[9] J. Świder, J. Wojnarowski: Grafy przepływu sygnałów w modelowaniu kaskadowej struktury układu wyciągowego. Mech. Teoret. i Stos. z (1978), (w druku).

[10] J. Wojnarowski, J. Świder: Wyznaczanie funkcji podatności dynamicznej górniczej maszyny wyciągowej metodą grafów, Konferencja nt. Modelowanie Górniczych Maszyn Wyciągowych, 9-10.XII.1977, Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Górnictwo, z. 81, Gliwice, 1977, ss.155-164.

[11] J. Świder, J. Wojnarowski: Metoda fikcyjnych źródeł zmiennej biegunowej jako sposób wyznaczania podatności dynamicznej złożonych układów mechanicznych Mech. Teoret. i Stos. z (1978), (w druku).

[12] J. Wojnarowski, J. Świder: Metoda niezależnych konturów bezpośredniej transformacji układu mechanicznego w graf przepływu sygnałów Mech. Teoret. i Stos. (przyjęto do druku).

[13] B. Abrahams: Signal flow graph metods, Control, 1966, N° 1, 2, 3.

[14] D.A. Linkens: Signal-flow graphs for linear, non-linear and sampled - data systems, Control, March 1969, 183-186.

[15] R. Tomovic, M. Vakobratovic: General Sensivity Theory, Copyright 1972 by American Elsevier Publishing Company, Inc. (tłum. książki R. Tomović, M. Vukobratović: Opsta Teorija Osetljivosti, by Institu "Kirilo Savic", Belgrad 1970).

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПРИ ПОМОЩИ ГРАФОВ СИГНАЛОВ

Р е з ю м е

В работе формируется вопрос моделирования колебаний нелинейных механических систем при помощи графов сигналов. Указывается, что производя трансформацию полюсного графа нелинейной механической системы в граф сигналов, можно всегда его привести к матрице, в которой только одна из ветвей петли нагружена нелинейной трансмитанцией T.

Разработанный метод лучше всего применять при программировании электронных аналоговых машин и при исследовании параметрической чувствительности нелинейных механических систем.

MODELLING OF NON-LINEAR MECHANICAL SYSTEMS
BY MEANS OF SIGNAL-FLOW GRAPHS

S u m m a r y

The paper deals with the problem of modelling of vibrations in non-linear mechanical systems by means of signal-flow graphs.

It has been shown that due to the transformation of a polar graph of a non-linear mechanical system into a signal-flow graph it always becomes possible to reduce it to its matrix shape in which only one branch of the loop is charged (loaded) with a non-linear transmitance T.

The developed method may be applied most conveniently while programming electronic analog computers and for investigating the parametric sensitivity of non-linear mechanical systems.