ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 2000
Seria: AUTOMATYKA z. 131 Nr kol. 1476

Krzysztof GIARO
Politechnika Gdańska

ZWARTE KOLOROWANIE MAŁYCH GRAFÓW DWUDZIELNYCH. EKSPERYMENTY KOMPUTEROWE

Streszczenie. Rozważamy pewien stosunkowo nowy model kolorowania krawędziowego grafów zwany zwartym kolorowaniem. Polega on na przypisaniu krawędziom grafu liczb naturalnych w taki sposób, by kolorowanie to było legalne oraz kolory krawędzi incydentnych do dowolnego wierzchołka tworzyły zwarte przedziały. Okazuje się, że nie wszystkie grafy można kolorować w sposób zwarty. Praca prezentuje w skrócie podstawowe własności zwartego kolorowania. Dalsza część opisuje przebieg kilku doświadczeń komputerowych mających na celu weryfikację pewnych hipotez dotyczących zwartego kolorowania na małych grafach dwudzielnych.

COMPACT COLORING OF SMALL BIPARTITE GRAPHS. COMPUTER EXPERIMENTS

Summary. In this paper we consider some relatively new model of edge coloring called compact. It consists in ascribing natural numbers to the edges of a graph in such a way that obtained coloring is legal and colors of edges incident to any vertex constitute compact intervals. It occurs that not all graphs can by colored in this way. This article shortly describes basic properties of compact coloring and presents a few computer experiments performed to verify on small bipartite graphs some hypotheses concerning compact coloring.

1. Wprowadzenie

Kolorowanie zwarte grafów stanowi stosunkowo nowy, choć nie pozbawiony znaczenia praktycznego, model kolorowania krawędziowego. Problem postawiony jest następująco: dla danego grafu należy znaleźć takie przyporządkowanie jego krawędziom liczb naturalnych (zwanych ich kolorami), by krawędzie incydentne uzyskiwały różne barwy (legalność kolorowania) oraz kolory krawędzi spotykających się w jednym wierzchołku tworzyły „zwarty przedział" złożony z kolejnych liczb naturalnych. Podstawową cechą tego modelu jest fakt, iż nie wszystkie grafy dają się pokolorować w sposób zwarty. Co więcej, zagadnienie istnienia zwartego kolorowania okazuje się NP-zupełne nawet wśród grafów dwudzielnych. Jest to o tyle istotnie, że właśnie zwarte kolorowanie grafów dwudzielnych ma istotne zastosowania praktyczne w szeregowaniu zadań. Bowiem dla systemu otwartego o

zero-jedynkowych czasach wykonywania operacji istnienie harmonogramu bez przestojów zarówno po stronie maszyn, jak i zadań odpowiada konstrukcji zwartego pokolorowania dla pewnego grafu dwudzielnego. Takiego mianowicie, którego wierzchołki jednej partycji stanowią maszyny, a drugiej - zadania, zaś krawędzie między nimi symbolizują istnienie pewnej operacji w danym zadaniu wykonującej się na konkretnej maszynie. Opisana analogia stanowi motywację do wnikliwszego rozważenia przypadku grafów dwudzielnych w kontekście kolorowania zwartego. Interesujące jest określenie, jakie struktury grafów dopuszczają istnienie zwartego kolorowania – co implikuje istnienie harmonogramów bez przestojów dla pewnych szczególnych sytuacji.

Pomimo wzmiankowanego wyniku negatywnego wiele klasycznych rodzin grafów dwudzielnych daje się kolorować w sposób zwarty i to w wielomianowym czasie. Nie jest znany najmniejszy graf dwudzielny nie posiadający zwartego pokolorowania, a najmniejsza opisana konstrukcja takiego grafu, zwana rozetą Małafiejskiego, M_5, zawiera aż 19 wierzchołków i 45 krawędzi. Te i inne wyniki sugerują, iż istnienie zwartego kolorowania stanowi cechę powszechną wśród grafów małych i rzadkich – brakuje jednak istotnych wyników teoretycznych potwierdzających tą hipotezę. W tej sytuacji autor zdecydował się na przeprowadzenie serii doświadczeń komputerowych mających na celu weryfikację na małych grafach kilku hipotez dotyczących tej tematyki. Artykuł niniejszy stanowi podsumowanie ich wyników.

2. Podstawowe własności kolorowania zwartego

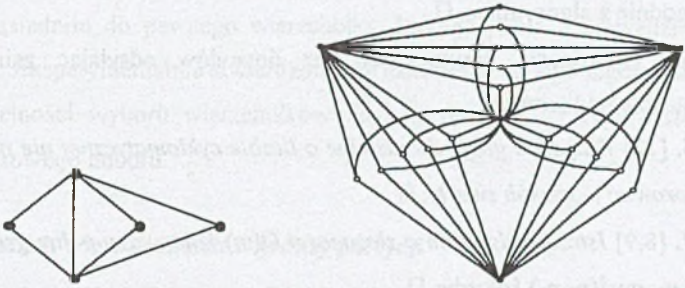
W pracy będziemy stosować standardową w teorii grafów notację. Symbol $G(V,E)$ opisuje graf o zbiorze wierzchołków V i zbiorze krawędzi E, N - jest zbiorem liczb naturalnych, $\deg(v)$ to stopień wierzchołka v, a Δ to maksymalny stopień w całym grafie, wreszcie n,m stanowią odpowiednio liczby wszystkich wierzchołków i krawędzi w G. Dla grafów dwudzielnych będziemy niekiedy stosować zapis $G(V_1,V_2,E)$, gdzie $V_1 \cup V_2 = V(G)$ są obydwiema partycjami wierzchołków o rozmiarach n_1 i n_2. Rozważane będą grafy proste.

Definicja 1. Niech $G(V,E)$ będzie dowolnym grafem. Funkcję $c: E \to N$ nazywamy *pokolorowaniem krawędziowym* wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego wierzchołka v grafu krawędzie incydentne do v uzyskują parami różne kolory. Pokolorowanie to jest *zwarte*, gdy dla każdego wierzchołka v zbiór $\{c(e) : e \in E \wedge v \in e\}$ stanowi zwarty przedział złożony z kolejnych liczb naturalnych.

Jak się okazuje, nie wszystkie grafy można pokolorować w sposób zwarty. Rozważmy więc graf G, dla którego jest to możliwe, i jego zwarte pokolorowanie c. Definiujemy funkcję $g: E \to \{0,...,\Delta-1\}$ daną wzorem $g(e) \equiv c(e) \bmod \Delta$. Zbiór kolorów uzyskanych w pokolorowaniu c przy dowolnym wierzchołku v jest zwartym przedziałem złożonym z $\deg(v)$ liczb, czyli wartości funkcji g na tych krawędziach są różne. Mamy zatem:

Twierdzenie 1. [1] *Każdy graf dający się pokolorować w sposób zwarty jest klasy* 1. □

Fakt ten daje podstawę do określania grafów posiadających zwarte pokolorowanie mianem *grafów klasy* 0. W ten sposób klasa 0 staje się podzbiorem klasy 1, czyli klasy wszystkich grafów Δ-kolorowalnych. Jest to podzbiór właściwy, grafy spoza klasy 0 znajdują się nawet wśród dwudzielnych. Najmniejszy obecnie znany graf tej postaci, zwany rozetą M_5, ma 19 wierzchołków i jest pokazany poniżej:



Rys.1. $K_{1,1,3}$ - najmniejszy graf klasy 1 nie dający się kolorować w sposób zwarty i najmniejszy znany graf dwudzielny o tej własności

Fig.1. $K_{1,1,3}$ – the smallest Class 1 graph which is not compactly colorable and the smallest known bipartite graph with this property

Ważne z punktu widzenia szeregowania zadań jest następujące twierdzenie:

Twierdzenie 2. [16] *Problem polegający na sprawdzeniu, czy dany graf dwudzielny można zwarcie pokolorować jest NP-zupełny.* □

Przejdźmy teraz do przypadków grafów dwudzielnych, dla których zwarte kolorowanie zawsze istnieje. Odnotujmy najpierw oczywisty fakt:

Twierdzenie 3. [1,8,9] *Każdy graf regularny z klasy* 1 *można pokolorować w sposób zwarty.* □

W szczególności stosując najszybszy znany algorytm (patrz [2]) Δ-kolorowania krawędziowego grafu dwudzielnego o złożoności $O(m \log n)$ uzyskujemy:

Twierdzenie 4. [1,8,9] *Istnieje algorytm kolorujący zwarcie dwudzielne grafy regularne o złożoności* $O(m \log n)$. □

Twierdzenie 5. [1,8,9] *Istnieje liniowy algorytm kolorujący w sposób zwarty dowolne drzewo lub graf dwudzielny jednocykliczny G kolorami* $1,\ldots,\Delta$.

Dowód. Odpowiednie kolorowanie dla drzewa zapewnia prosty algorytm:

1. Kolorujemy wybraną krawędź kolorem k.
2. Czy zostały jeszcze jakieś niepokolorowane krawędzie? Jeśli nie - koniec.
3. Znajdujemy niepokolorowaną jeszcze krawędź e, której wierzchołek końcowy v łączy się już z pewną pokolorowaną krawędzią.
4. Niech $\{a,\ldots,b\}$ oznacza przedział kolorów użytych dotąd przy v. Wtedy e nadajemy kolor $a-1$ lub $b+1$, tak by należał on do $\{1,\ldots,\Delta\}$.
5. Skok do 2.

Poprawność algorytmu wynika z faktu, że przy każdym wejściu do kroku 2 krawędzie już pomalowane stanowią zwarcie pokolorowane i spójne poddrzewo w G. W przypadku grafu jednocyklicznego najpierw kolorujemy cykl na przemian barwami 1 i 2, następnie postępujemy zgodnie z algorytmem. □

Pozostałe twierdzenia przytoczymy bez dowodów odsyłając zainteresowanego czytelnika do stosownej literatury.

Twierdzenie 6. [12] *Wszystkie grafy dwudzielne o liczbie cyklomatycznej nie przekraczającej 8 można pokolorować w sposób zwarty.* □

Twierdzenie 7. [8,9] *Istnieje algorytm o złożoności $O(m)$ kolorujący pełne grafy dwudzielne przy użyciu $n_1+n_2-\mathrm{nwd}(n_1,n_2)$ kolorów.* □

Graf dwudzielny $G(V_1,V_2)$ nazywamy *biregularnym typu* (Δ_1,Δ_2), gdy każdy wierzchołek z V_1 ma stopień Δ_1, a każdy wierzchołek z V_2 stopień Δ_2. Oczywiście, pełne grafy dwudzielne są biregularne. Jak dotąd nie wiadomo, czy wszystkie grafy biregularne są klasy 0, istnieją jednak pewne wyniki częściowe. Dla wszystkich grafów typu (3,4) do 21 wierzchołków włącznie przynależność do klasy zero pozytywnie zweryfikowano komputerowo w [6].

Wyniki zawarte w [13,14] dowodzą, że:

Twierdzenie 8. *Grafy biregularne typu* $(2,\Delta)$ *można kolorować w sposób zwarty w czasie $O(n\,\Delta \log m)$ przy użyciu $\Delta+1$ lub Δ kolorów odpowiednio dla nieparzystej lub parzystej wartości Δ.* □

Ponadto dla grafów o co najwyżej trzech wierzchołkach w jednej z partycji mamy:

Twierdzenie 9. [6,8,9] *Istnieje liniowy algorytm kolorujący zwarcie grafy dwudzielne o* $\min\{n_1,n_2\} \le 3$ *używający co najwyżej $\Delta+2$ kolory.*

Grafem *podkubicznym* nazywamy graf o maksymalnym stopniu $\Delta\le 3$.

Twierdzenie 10. [6,8,9] *Każdy graf dwudzielny podkubiczny można kolorować zwarcie używając nie więcej niż czterech kolorów. Istnieje algorytm o złożoności $O(n^{3/2})$ kolorujący takie grafy przy użyciu minimalnej liczby kolorów.*

Przystąpimy teraz do opisu doświadczeń komputerowych związanych z kolorowaniem zwartym. Eksperymenty dzielą się na dwie fazy – w pierwszej przygotowywany jest katalog wszystkich nieizomorficznych grafów z pewnego interesującego nas zbioru, w drugiej kolejno próbujemy zwarcie pokolorować kolejne grafy z katalogu. Do generacji wykorzystywano zarówno własne programy, jak również korzystano z pakietu NAUTY (autorstwa Brendana McKay) dostępnego na stronie http://cs.anu.edu.au/people/bdm (patrz [15]). Procedura kolorująca graf w sposób zwarty opiera się na technice rekurencyjnego przeszukiwania wszystkich możliwości, przy tym w kolejnym kroku rekursji przydzielamy barwy wszystkim krawędziom sąsiednim do pewnego wierzchołka, którego jedna z krawędzi już wcześniej uzyskała kolor. Eksperymentalnie stwierdzono, że czas pracy takiego algorytmu bardzo silnie zależy od kolejności wyboru wierzchołków do kolorowania – z reguły stosowano więc strategię ich losowego doboru.

3. Grafy o czterech wierzchołkach w jednej partycji

Zgodnie z twierdzeniem 9, każdy graf dwudzielny o co najwyżej trzech wierzchołkach w jednej z partycji można pokolorować w sposób zwarty. Wiedzieliśmy też, że trójka jest najmniejszą liczbą o tej własności. Opiszemy eksperyment mający na celu znalezienie najmniejszego takiego grafu dwudzielnego. Zadanie to sprowadza się do wygenerowania i próby zwartego pokolorowania kolejno coraz to większych grafów dwudzielnych, mających w jednej z partycji dokładnie cztery wierzchołki. Grafy takie na użytek tego paragrafu nazwiemy 4-procesorowymi przez analogię do systemu otwartego przez nie opisywanego, owe cztery wierzchołki tworzące jedną partycję – nazwiemy procesorami, a wierzchołki drugiej partycji - zadaniami.

Zagadnienie podzielono na dwie części: najpierw napisany został generator wszystkich nieizomorficznych grafów 4-procesorowych o podanej liczbie zadań - uzyskane grafy gromadzone były w plikach dyskowych. Drugi program służył do sekwencyjnego przeglądania otrzymanych plików i sprawdzania istnienia zwartego kolorowania dla zgromadzonych grafów.

Najmniejszy graf dwudzielny 4-procesorowy, nie należący do klasy 0, oczywiście, musi być spójny, zawiera co najmniej 5 zadań (przypadki grafów o 4 wierzchołkach w obu

partycjach sprawdzono oddzielnie), nie może też mieć wierzchołków stopnia 1. Dlatego dopuszczalne stopnie dla zadań wynoszą 2,3,4. Tak więc mamy co najwyżej 11 grup zadań o tych samych sąsiadach i do opisu grafów używamy formatu 11-elementowej tablicy liczb określających liczebności poszczególnych grup. Teraz wygenerowanie tablic opisujących wszystkie grafy o podanej liczbie zadań (czyli sumie elementów) jest proste, jednak przed zapisaniem uzyskanej tabeli sprawdzamy, czy graf nasz spełnia opisane wyżej warunki. Ponadto celem usunięcia izomorficznych kopii dokonujemy zapisu, kiedy nasza tabela jest leksykograficznie najmniejsza spośród wszystkich 4!=24 tabel powstałych z tego samego grafu przez zmianę numeracji procesorów. Ostatecznie uzyskano następujące liczby nieizomorficznych grafów 4-procesorowych:

Liczba zadań	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Liczba grafów	139	389	948	2115	4401	8670	16308	29515	51616	87609	13587

W ostatnim wierszu ograniczono się do grafów mniej niż 45-krawędziowych, tyle bowiem krawędzi posiada rozeta M_5. Ostatecznie wszystkie uzyskane wyżej grafy okazały się zwarcie kolorowalne.

Wniosek 1. [6] *Rozeta M_5 jest najmniejszym grafem 4-procesorowym nie należącym do klasy* 0. □

Wynik ten pozwala na sformułowanie następującej hipotezy.

Hipoteza 1. *Rozeta M_5 jest najmniejszym grafem dwudzielnym nie należącym do klasy* 0.

4. Małe grafy dwudzielne

Przeprowadzone w paragrafie 3 badania można potraktować jako próbę wyrywkowego zweryfikowania hipotezy 1. Omówimy teraz eksperyment mający na celu bardziej systematyczne podejście do tego zagadnienia. Będziemy sprawdzać przynależność do klasy 0 wszystkich grafów dwudzielnych o coraz większej liczbie wierzchołków, do 14 włącznie. Doświadczenie składało się z dwóch faz: przygotowanie katalogów nieizomorficznych spójnych grafów dwudzielnych określonego rzędu za pomocą programu *geng* pochodzącego z pakietu NAUTY, i próby ich zwartego pokolorowania. Przed przystąpieniem do kolorowania należało usunąć grafy, o których wiemy, iż żaden nie może być najmniejszym dwudzielnym nie dającym się pokolorować zwarcie. Skorzystano tu z twierdzeń 2.5, 2.8, 2.9, 211, oraz z oczywistych powodów odrzucono grafy wierzchołkowo 1-

spójne lub zawierające parę sąsiednich wierzchołków stopnia 2. Bodaj najefektywniejszy filtr powstał z połączenia twierdzeń 2.10 i 3.1, co pozwoliło na usunięcie wszystkich grafów posiadających mniej niż pięć wierzchołków w którejkolwiek partycji. W szczególności możemy rozpocząć dopiero od grafów rzędu 10. Uzyskane ilości wszystkich spójnych grafów dwudzielnych i pozostałych z nich po zastosowaniu powyższych filtrów przedstawia tabela 1.

Tabela 1

Grafy dwudzielne spójne i po odfiltrowaniu

Liczba wierzchołków	Grafy dwudzielne spójne	Grafy po odfiltrowaniu
10	4032	368
11	25598	4236
12	212780	50295
13	2241730	677398
14	31193324	11684681

Jak wspomniano, bardzo istotne znaczenie dla szybkości procedury kolorującej ma porządek, w jakim wybierane są kolejne wierzchołki. Zastosowano technikę stopniowego odfiltrowywania grafów klasy 0 – wejściowy plik jest przepisywany do wyjściowego, przy czym odrzucamy wiersze z grafami, które udało się zwarcie pokolorować w czasie nie przekraczającym pewnego limitu (początkowo było to 0.5 sekundy). Przy tym kolejność wyboru wierzchołków wewnątrz procedury kolorującej była losowa. Dlatego grafy, które nie zostały pokolorowane przy pewnym porządku wierzchołków, często były odfiltrowywane w którymś z kolejnych podejść. Przez kilka pierwszych obiegów liczba grafów w pliku zazwyczaj zmniejszała się ponad dziesięciokrotnie, później efektywność filtracji malała i wtedy zwiększano limit czasu dostępnego na jeden graf. Wynikiem doświadczenia jest:

Wniosek 2. *Wszystkie grafy dwudzielne o liczbie wierzchołków nie przekraczającej* 14 *są klasy* 0. □

Ze względu na bardzo szybki wzrost liczby grafów dwudzielnych w funkcji ich rzędu autor sceptycznie odnosi się do pomysłu komputerowego zweryfikowania hipotezy 1 poprzez systematyczne kolorowanie grafów dwudzielnych do 18 wierzchołków włącznie. Takie podejście wydaje się być niewykonalne, chyba że hipoteza nie jest prawdziwa, a kontrprzykład ma rozmiar niewiele przekraczający wielkości grafów już przebadanych.

5. Klasa zerowa i pierwsza – statystyka dla małych grafów

Wiadomo, że klasa 0 stanowi podzbiór klasy 1, interesująca może więc być informacja o tym, jak powszechnym zjawiskiem wśród grafów typu pierwszego jest posiadanie zwartego

pokolorowania. Badania takie przeprowadzono dla małych grafów spójnych - do 9 wierzchołków. Za pomocą generatora *geng* utworzono katalogi takich grafów o odpowiednich rzędach. Następnie odsiano klasę 2, a pozostałe grafy próbowano kolorować zwarcie Otrzymano w ten sposób zbiory wszystkich nieizomorficznych grafów klasy 0 do 9 wierzchołków włącznie. Wyniki liczbowe przedstawia tabela 2.

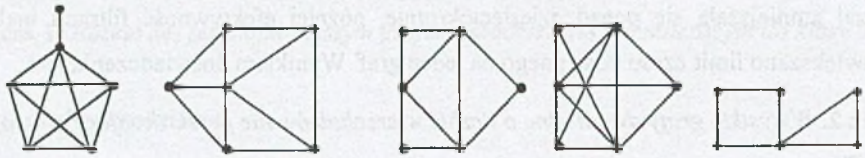
Tabela 2

Wyniki liczbowe

Liczba wierzchołków	Grafy spójne	W tym grafy klasy 1	W tym grafy klasy 2	Grafy klasy 1 spoza klasy 0	
					%
3	2	1	1	0	0
4	6	6	0	0	0
5	21	17	4	2	11.8
6	112	109	3	5	4.6
7	853	821	32	49	6.0
8	11117	11050	67	190	1.0
9	261080	260150	930	3185	1.2

Podobnie, jak klasa 2 stanowi znikomą część grafów o danym rzędzie (patrz [3]), tak i większość małych grafów klasy 1 posiada zwarte pokolorowanie. Jest to o tyle zaskakujące, że oba problemy decyzyjne są NP-zupełne.

Przedstawimy teraz małe grafy klasy 1 nie dające się kolorować w sposób zwarty. Najmniejszy został już zaprezentowany na rysunku 1, drugi 5-wierzchołkowy to koło W_5, a oto wszystkie takie grafy oparte na sześciu wierzchołkach:



Rys.2. Wszystkie grafy klasy 1 nie należące do klasy 0 oparte na sześciu wierzchołkach
Fig.2. All the Class 1 graphs not belonging to Class 0 with six vertices

LITERATURA

1. Asratian A., Kamalian R.: Investigation on interval edge-colorings of graphs, J. Combin. Theory, Ser. B 62, 1994, 34-43.
2. Cole R., Hopcroft J.: On edge coloring bipartite graphs, SIAM J.Comput. 11, 1982 540 - 546.
3. Erdös P., Wilson R.: On the chromatic index of almost all graphs, J. Combin. Theory (B) 23, 1977, 255 – 257.

4. Giaro K.: The complexity of consecutive Δ-coloring of bipartite graphs: 4 is easy, 5 is hard, Ars Combinatoria 47, 1997, 287-300.
5. Giaro K.: Szeregowanie zadań na procesorach dedykowanych bez przestojów, Zesz. Nauk. Pol. Śl., s. Automatyka, z.123, Gliwice 1998, 133-144.
6. Giaro K.: Szeregowanie zadań na procesorach dedykowanych bez obustronnych postojów (rozprawa doktorska), Politechnika Gdańska, Wydział ETI, Gdańsk 1999.
7. Giaro K., Kubale M.: Consecutive edge-colorings of complete and incomplete Cartesian products of graphs, Congr. Numer. 128, 1997, 143-149.
8. Giaro K., Kubale M., Małafiejski M.: Szeregowanie zadań jednostkowych w systemie otwartym bez przestojów, Zesz. Nauk. Pol. Śl., s. Automatyka, z.117, Gliwice 1996, 29-36.
9. Giaro K., Kubale M., Małafiejski M.: Compact scheduling in open shop with zero-one time operations, INFOR 37, 1999, 37 - 47.
10. Giaro K., Kubale M., Małafiejski M.: On the deficiency of bipartite graphs, Disc. Appl. Math., 94, 1999, 193 - 203 .
11. Giaro K., Kubale M., Małafiejski M.: Consecutive colorings of the edges of general graphs, Disc. Math. (w druku).
12. Giaro K., Szyfelbein D.: Zwarte szeregowanie zadań w rozrzedzonym systemie otwartym, Zesz. Nauk. Pol. Śl., s. Automatyka, z.129, Gliwice 2000.
13. Hansen H.: Scheduling with minimum waiting periods (po duńsku), Master Thesis, Odense University, Odense, Denmark 1992.
14. Hanson P., Loten C, Toft B.: On interval colorings of bi-regular bipartite graphs, Ars Combinatoria, 1998.
15. McKay B.: Nauty users guide, The Australian National University, 1996.
16. Sevastjanov S.: On interval colorability of a bipartite graph (po rosyjsku). Met. Diskret Analiz. 50, 1990, 61-72.

Recenzent: Prof.dr hab.inż. J.Klamka

Abstract

In this paper we consider some properties of compact coloring of bipartite graphs. This model has practical applications in the theory of scheduling in open shop.

Firstly, we remind some basic properties of compact coloring. Graphs which can be colored in this way form a subset of Class 1 graphs and so we call them Class 0 graphs. But the recognition of these graphs is NP-complete even for bipartite graphs. On the other hand, a lot of classic families of bipartite graphs can be compactly colored in polynomial time. Some results suggest that small and sparse bipartite graphs are very often compactly colorable.

This article describes three computer experiments made to verify some theoretical conjectures concerning compact coloring. The first and the second experiment deal with finding the smallest bipartite graph not belonging to Class 0. We show that all bipartite graphs with at most 14 vertices are of Class 0, the same as all bipartite graphs up to 18 vertices with one partition of size at most 4. The third experiment concerns not only bipartite graphs. It suggests that Class 0 graphs are very widespread among small graphs of Class 1.