

Jaromír NOSKIEVIČ

Technische Hochschule Ostrava

MATHEMATISCHES MODELL

DER DYNAMIK DER KAVITATIONSZERSTÖRUNG DES WERKSTOFFS

Der Kavitationsverschleiss des Werkstoffs wird beim Zusammenbruch von Kavitationshohlräumen durch die mechanische Wirkung verursacht. Der mechanische Effekt - Kavitationserosion - wird in manchen Fällen von der elektrochemischen und chemischen Korrosion begleitet.

Mechanisches Modell des Kavitationsabtrags

In kavitierendem Material werden verschiedene Deformationen hervorgerufen:

a) Elastische Verformungen, die in einachsigen Spannungszuständen durch das Hookesche Gesetz beschrieben werden. Das mechanische Modell für elastische Verformungen und auch für den Materialabtrag bildet eine Feder.

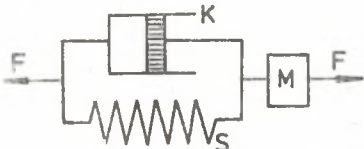


Bild 1. Mechanisches Modell der Kavitationszerstörung

F - Kraft; K - Dämpfer; S - Feder; M - Masse

b) Plastische Verformungen, die durch die Schubspannung verursacht werden, sind durch die Gleitlinien eigenartig ohne Verfestigung. Das mechanische Modell bildet die Reibung zwischen einem Körper und einer Unterlage. In der Kavitationserosion haben diese Verformungen sehr kleine Rollen.

c) Plastische Verformungen mit einem quasiviskosen Fließen, die der Verformungsgeschwindigkeit proportional sind.

Das mechanische Modell bildet ein hydraulischer Dämpfer. Diese plastische Verformungen verfestigen die Metalle [1].

Das mechanische Modell für den Kavitationsabtrag muss noch mit einer Masse ergänzt werden, damit der dynamische Charakter ausgedrückt wäre. Das gesamte mechanische Modell für den Kavitationsabtrag ist im Bild 1 dargestellt. Die dem mechanischen Modell entsprechende Differentialgleichung ist

$$\varrho V \frac{d^2 \xi}{dt^2} + \eta \frac{d\xi}{dt} + E\xi = G \quad (1)$$

Analogisch für den Kavitationsverschleiss schreibt man das Gleichgewicht der wirkenden Kräfte mit der Differentialgleichung

$$\frac{d^2v}{dt^2} + a_1 \frac{dv}{dt} + a_2 v = \frac{F}{l \Delta t} = \frac{P}{l} = I \quad (2)$$

Die Beiwerte $a_1 = \frac{\eta}{\phi l}$ und $a_2 = \frac{k}{\phi V}$ sind die Massstäbe für plastische Verformungen und für die Kavitationsbeständigkeit. Die Grösse v ist die Verschleissgeschwindigkeit. Die Grösse I stellt die Intensität des Materialabtrags vor, weil sie die Bedeutung der Verschleissleistung P pro Einheitsfläche hat. Die Differentialgleichung (2) beschreibt die Dynamik des Kavitationsverschleisses. In der mathematischen Lösung der Zerstörungsdynamik wird ein einfacher Ermüdungsmechanismus mit konstanten Materialeigenschaften (Verfestigung und Kavitationsfestigkeit), d.h. $a_1 = \text{konst}$; $a_2 = \text{konst}$ vorausgesetzt. Gleichfalls wird die Intensität des Kavitationsabtrags als konstant vorausgesetzt, $I : \text{konst}$. Die Lösung der Differentialgleichung (2) hängt von dem Verhältnis der zwei Beiwerte a_1, a_2 ab und wird durch die Beziehung

$$\frac{a_1^2}{4} - a_2 \approx 0 \quad \text{oder} \quad \frac{a_1}{2\sqrt{a_2}} \approx 1 \quad (3)$$

bestimmt.

Für die Lösung werden neue Grössen

$$\alpha = \frac{a_1}{2}; \quad \beta = \sqrt{a_2} \quad (4)$$

Bild 2. Charakteristische Verläufe des Kavitationsabtrags

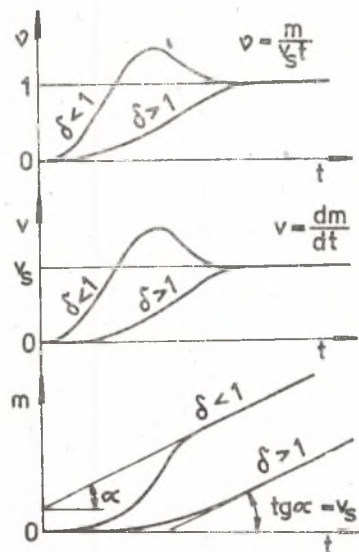
der Beiwert der Materialeigenschaften

und folgende dimensionslose Grössen eingeführt:

$$\delta = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{a_1}{2\sqrt{a_2}} \quad (5)$$

die relative Zeit des Kavitationsversuches

$$\tau = \beta t \quad (6)$$



der relative Kavitationsverschleiss

$$\gamma = \frac{\Delta m}{v_s t} = \frac{v}{v_s} \tag{7}$$

Die Grösse v_s bedeutet die Geschwindigkeit des Kavitationsverschleisses im entwickelten Zustand des Materialausbruches. Die Grösse v ist die durchschnittliche Geschwindigkeit des Materialabtrags in der Zeit T . Der Werkstoffabtrag Δm wird aus der Lösung der Differentialgleichung (2) mit Hilfe der Integration

$$\Delta m = \int_0^t dt \tag{8}$$

bestimmt.

Die charakteristischen Zeitverläufe des Kavitationsverschleisses Δm , der Abtragungsgeschwindigkeit v und des relativen Kavitationsabtrags γ bei verschiedenen Verfestigungsfaktoren ($\delta \geq 1$) sind im Bild 2 dargestellt.

Die mathematische Lösung der Differentialgleichung (2) ist in der Form folgender Gleichungen:

Für $\delta > 1$

$$\gamma = 1 - \frac{2\delta}{T} - \frac{e^{-\delta_0 T} - \delta_0^4 e^{-\frac{T}{\delta_0}}}{(\delta_0^2 - 1)\delta_0 T}; \quad \delta_0 = \delta + \sqrt{\delta^2 + 1} \tag{9}$$

Für $\delta = 1$

$$\gamma = 1 - \frac{2}{T} + \left(\frac{2}{T} + 1\right)e^{-T} \tag{10}$$

Für $0 < \delta < 1$

$$\gamma = 1 - \frac{2\delta}{T} + \frac{\delta}{T} e^{-\delta T} \left[2\cos(\sqrt{1 - \delta^2} T) + \frac{2\delta^2 - 1}{\delta\sqrt{1 - \delta^2}} \sin(\sqrt{1 - \delta^2} T) \right] \tag{11}$$

Für $\delta = 0$

$$\gamma = 1 - \frac{\sin T}{T} \tag{12}$$

Für $-1 < \delta < 0$

$$\nu = 1 + \frac{2|\delta|}{\zeta} - \frac{|\delta|}{\zeta} e^{|\delta|\zeta} \left[2\cos(\sqrt{1 - \delta^2}\zeta) - \frac{2\delta^2 - 1}{|\delta|\sqrt{1 - \delta^2}} \sin(\sqrt{1 - \delta^2}\zeta) \right] \quad (13)$$

In allen beschriebenen Lösungen gelten für die Intensität des Kavitationsverschleisses folgende Ausdrücke

$$I = a_2 v_s = \beta^2 v_s \quad (14)$$

Die Gleichungen (9) bis (13) für die Abhängigkeit $\nu = \nu(\delta, \zeta)$ bilden das mathematische Modell des Kavitationsverschleisses für verschiedene Werkstoffeigenschaften, die durch den Verfestigungsparameter δ ausgedrückt sind. Der Beiwert α äussert die Verfestigungsfähigkeit des Werkstoffes und der Beiwert β ist umgekehrt an der Kavitationsfestigkeit abhängig. Ein weiterer sehr wichtiger Faktor in der Verschleissdynamik ist die Intensität des Materialabtrages I .

Auswertung der Kavitationsuntersuchungen

Bei Auswertung der Werkstoffzerstörung durch Kavitation werden die Beiwerte α , β ermittelt. Mit Hilfe dieser Beiwerte sind die Kenngrössen δ und ζ gegeben, die aus dem Verlauf $\nu = \nu(\delta, \zeta)$ bestimmt werden. Der relative Materialabtrag (7) wird aus den Kavitationsuntersuchungen $m = m(t)$ gerechnet. Auch die Abtragsgeschwindigkeit v_s wird aus diesem Verlauf festgestellt. So wird die Kurve $m = m(t)$ auf die Abhängigkeit $\nu = f(\log t)$ umgeformt. Die aus den gemessenen Werten ermittelte Kurve $\nu = f(\log t)$ wird mit einer von den berechneten Kurven $\nu = f(\log \zeta)$ verglichen. Im Bereich der Kongruenz beider Kurven werden für bestimmte Punkte die Kenngrössen δ und $\log \zeta$ abgelesen. Die Intensität des Werkstoffabtrags wird mit Hilfe der Beziehung (14) berechnet. Sie bildet einen Massstab für die Empfindlichkeit des Werkstoffs zu dem Energieverbrauch in der entwickelten Werkstoffzerstörung durch Kavitation [2], [3]. Das Vergleichen der Kurventeile ermöglicht es, die Änderung der Beiwerte α , β auszuwerten.

Beispielweise wird das beschriebene Verfahren bei der Auswertung der Kavitationsuntersuchungen [4] am Umlaufrad mit Bleiprobe angewandt. Die Umlaufgeschwindigkeit war $35,8 \text{ ms}^{-1}$ ($n = 31,67 \text{ s}^{-1}$). Als Massstab für die Kavitationsintensität ist die relative Länge der Kavitationswolke λ . Für 7 Werte der Kavitationsintensität wurde der Abtragsverlauf $\nu = f(\log t)$ ermittelt - Bild 3. Diese experimentale Kurven wurden mit den mathematisch festgestellten Kurven $\nu = f(\log \zeta)$ verglichen und die Beiwerte α , β bestimmt. Ihre Verläufe sind im Bild 4 und es ist ersichtlich, dass es zur

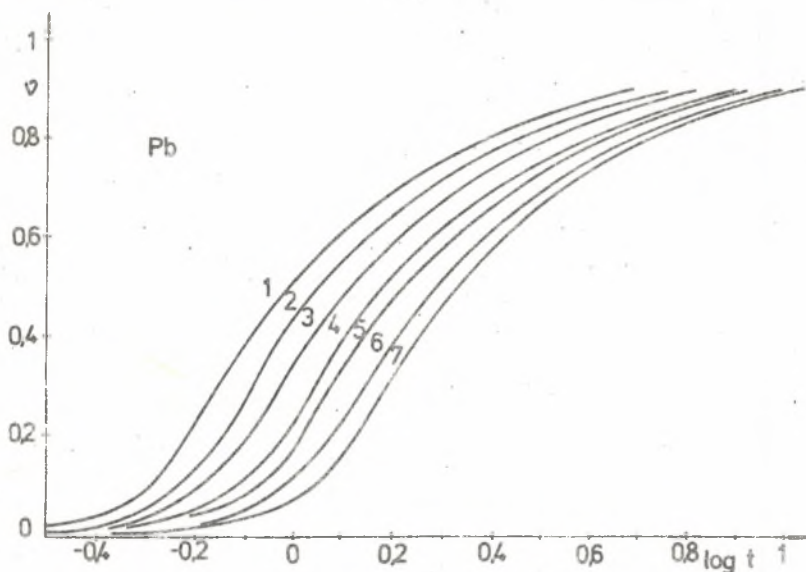


Bild 3. Abtragsverläufe der Bleiprobe bei verschiedenen Kavitationsintensitäten

1 - $\lambda = 2,71$; 2 - $\lambda = 2,47$; 3 - $\lambda = 2,28$; 4 - $\lambda = 2,12$; 5 - $\lambda = 1,95$; 6 - $\lambda = 1,82$; 7 - $\lambda = 1,70$

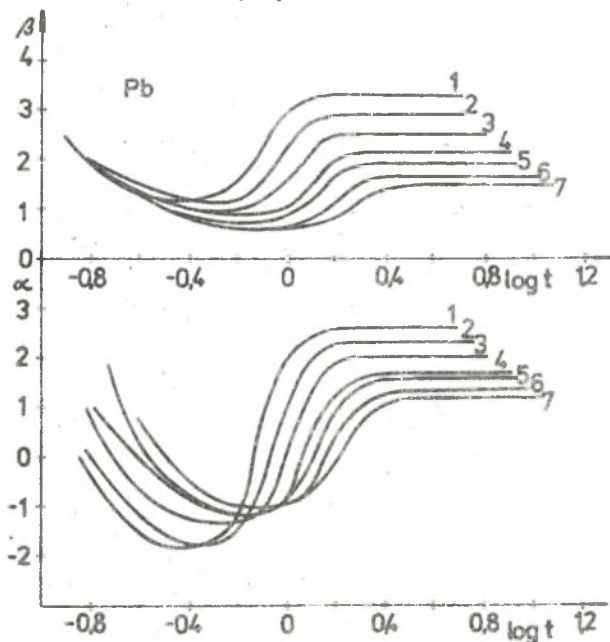


Bild 4. Verläufe der Materialverfestigung und der Kavitationsfestigkeit für die Bleiprobe bei verschiedenen Kavitationsintensitäten

1 - $\lambda = 2,71$; 2 - $\lambda = 2,47$; 3 - $\lambda = 2,28$; 4 - $\lambda = 2,12$; 5 - $\lambda = 1,95$; 6 - $\lambda = 1,82$; 7 - $\lambda = 1,70$

Verfestigung kommt. Im entwickelten Zustand des Werkstoffausbruches sind die Beiwerte α_s , β_s konstant. Die Abhängigkeit des Beiwertes β_s an der Intensität des Kavitationsverschleisses kann man durch eine Potenzfunktion ausdrücken

$$\beta_s = 0,10054 I_s^{0,4005}; \quad [\beta_s] = \text{St}^{-1}; \quad [I_s] = \text{mm}^3 \text{St}^{-1} \quad (15)$$

Der Bereich der Zerstörungsintensität I_s ist 485 bis 11000 mm^3 pro Stunde. Der Korrelationsbeiwert ist $r_{\text{korrr}} = 0,9937$. Ähnlich wurden die Kavitationsuntersuchungen mit verschiedenen Materialproben ausgewertet. Daraus folgt, dass die Kavitationsfestigkeit an der Kavitationsintensität abhängig ist. Für eine komplexe Untersuchung der Kavitationsbeständigkeit des Werkstoffes ist es notwendig, die Kavitationsprüfungen bei verschiedenen Kavitationsintensitäten durchzuführen.

Einfluss der Korrosion auf die Kavitationszerstörung

Mit korrosiven Flüssigkeiten verkleinert sich der mechanischen Wirkung in der Kavitationszerstörung. Die Zerstörungsintensität steigt wesentlich in den chemisch aktiven Flüssigkeiten. Auch die Beiwerte α , β , die der Werkstoffeigenschaften entsprechen, ändern sich beträchtlich. Die Erhöhung der Abtragsgeschwindigkeiten v_s ist wesentlicher als der statischen Korrosion entspricht. Die Korrosion ändert merklich die Kavitationsbeständigkeit des Werkstoffs. In korrosiven Flüssigkeiten ist der Beiwert β_s grösser und die Kavitationsfestigkeit des Werkstoffs ist kleiner.

Das mathematische Modell ist auch für Kavitationsversuche mit korrosiven Flüssigkeiten anwendbar und ermöglicht es, die Änderung des Anteils der mechanischen Wirkung in der Kavitationszerstörung festzustellen.

Zusammenfassung

Das mathematische Modell wird für die Dynamik des Kavitationsabtrags abgeleitet. Die Verfestigungsfähigkeit des Material ist im Beiwert α eingebegriffen. Die Kavitationsfestigkeit des Werkstoffs ist an dem Beiwert β umgekehrt abhängig. Für den Zerstörungswiderstand ist die Intensität des Kavitationsabtrags massgebend, die der zur Zerstörung verbrauchte Energie proportional ist. Die Kavitationseigenschaften ändern sich mit der Kavitationsintensität, weil sie die Verfestigung des Werkstoffs beeinflusst. Für die komplexe Untersuchung der Kavitationsbeständigkeit ist es notwendig, mehrere Versuche mit verschiedenen Kavitationsintensitäten durchzuführen. Bei grossen Kavitationsintensitäten ist grosse Verfestigung und

die Dynamik der Kavitationszerstörung ist eine komplizierte Übergangserscheinung. Solche Kavitationsversuche weichen sehr von den natürlichen Kavitationszuständen in der hydraulischen Maschinen ab. Darum sind nicht zweckmässig die Kavitationsversuche mit sehr grossen Intensitäten. Es ist günstig die Kavitationsversuche an zwei verschiedenen Versuchsständen, z.B. Schwinggerät und Umlaufrad, durchzuführen. Damit wird ein breiter Bereich der Kavitationsintensität erreicht. Mit Hilfe des mathematischen Modells und mit bekannten Kavitationseigenschaften des Werkstoffs kann man den Zerstörungsverlauf für verschiedene Intensitäten umrechnen.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] Reiner M.: Rheologie in elementarer Darstellung. VEB Fachbuchverlag Leipzig, DDR.
- [2] Nosklevič J.: Auswertung der Werkstoffzerstörung durch Kavitation (tschechisch). Konferenz Hydro Turbo 76, Brno, CSSR, Oktober 1976, Beitrag C7.
- [3] Nosklevič J.: Beitrag zu mathematischen Modellen im Fachgebiet der Pumpen (tschechisch). Dissertationsarbeit, Technische Hochschule Ostrava, ČSSR, 1976.
- [4] Varga J., Sebestyén Gy.: Private Mitteilung der Kavitationsuntersuchungen an der TH Budapest, September 1976.

 MATEMATYCZNY MODEL DYNAMIKI ZNISZCZENIA KAWITACYJNEGO
 TWORZYW KONSTRUKCYJNYCH

S t r e s z o z e n i e

Dynamika zniszczenia kawitacyjnego została opisana modelem matematycznym w którym różniczkowe równanie (2) jest znane z zagadnień drgań wymuszonych z tłumieniem. Otrzymano równania (9)-(13) określające straty kawitacyjne. Własności materiału scharakteryzowano współczynnikiem β , wyrażającym kawitacyjną odporność materiału. Intensywność kawitacji określono związkami (14), w których występuje prędkość strat kawitacyjnych v_g w procesie rozwiniętej kawitacji. Opracowany model wykorzystano do badań kawitacji.

 МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ КАВИТАЦИОННОГО РАЗРУШЕНИЯ
 КОНСТРУКЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

Р е з ю м е

Динамика кавитационного каноса материала описана при помощи математической модели, дифференциальное уравнение (2) которой известно из проблематики вынужденных колебаний с гашением. Получены уравнения (9)-(13) для кавитацион-

ных потерь. Свойства материала выражены коэффициентом β , выражающим кавитационную прочность материала. Интенсивность кавитации определяется отношениями (14), в которых выступает величина V_s , представляющая собой скорость кавитационных потерь в процессе развитой кавитации. Математическая модель динамики кавитационного износа использована для обработки кавитационных испытаний.

A MATHEMATICAL MODEL FOR DESTRUCTIVE CAVITATION DYNAMICS OF CONSTRUCTION MATERIALS

S u m m a r y

The dynamics of the cavitation damage of the material is described by a mathematical model whose differential equation (2) is known from the problems regarding forced oscillations with damping. The properties of the material are expressed by the coefficient α (effect of material strain hardening) and the coefficient β giving the cavitation strenght of the material. Cavitation intensity of damage is defined by Eq. (14) in which v_s represents the velocity of cavitation losses in the developed cavitation. The mathematical model of the cavitation damage dynamics is used to evaluate the cavitation tests.