ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1978

Seria: ENERGETYKA z. 66 Nr kol. 562

Ryszard ROHATYŃSKI
Politechnika Wrocławska

PODSTAWOWE RÓWNANIA MIĘDZYŁOPATKOWEGO PRZEPŁYWU CIECZY DOSKONAŁEJ W WIRNIKACH DIAGONALNYCH I ODŚRODKOWYCH

Streszczenie. Wykazano istotne różnice między potencjalnym przepływem w palisadzie płaskiej lub cylindrycznej i przepływem względnym w wirniku diagonalnym lub odśrodkowym. Uogólniono równania palisady płaskiej na wszystkie typy palisad osiowo-symetrycznych. Wyprowadzono podstawowe równania całkowe wiążące pole prędkości cieczy z geometrią palisady łopatek. Omówiono zastosowanie tych równań w projektowaniu wirników.

Zestawienie oznaczeń

a - stała odwzorowania konforemnego,
c - prędkość absolutna,
g - przyspieszenie ziemskie,
i - jedność urojona,
l - współrzędne długości linii prądu w przekroju merydionalnym,
r - promień,
s - współrzędna długości konturu łopatki w płaszczyźnie odwzorowania (zespolonej),
t - podziałka palisady w płaszczyźnie odwzorowania,
u - prędkość obwodowa,
w - prędkość względna,
x, y - współrzędne kartezjańskie,
$z = x+iy$ - współrzędna zespolona,
H - wysokość podnoszenia,
γ - wirowość,
ϑ - współrzędna kątowa,
ω - prędkość kątowa,
χ - kąt elementu łopatki z osią y.

Indeksy

1 - u wlotu do palisady,
2 - u wylotu z palisady,
b - wpływ zmiany grubości warstwy prądu,

o - punkt obliczeniowy (ustalony),
s - na konturze łopatki,
u - składowa obwodowa,
w - wewnątrz konturu łopatki,
x,y - składowa w kierunku x lub y,
γ - spowodowany wirowością,
ω - spowodowany prędkością kątową wirnika,
∞ - przepływ niezakłócony.

1. Wstęp

Analiza przepływu przez wirniki maszyn przepływowych opiera się na zastąpieniu przepływu rzeczywistego przez dwa przepływy dwuwymiarowe: międzyłopatkowy i merydionalny [10, 5]. Przepływy te są wzajemnie związane, toteż obliczenie pola prądu jest procesem iteracyjnym.

Niniejsza praca poświęcona jest hydrodynamicznym równaniom przepływu cieczy doskonałej na osiowo-symetrycznych powierzchniach prądu w wirniku.

Zagadnienie analizy przepływu międzyłopatkowego przez płaskie palisady łopatek zostało rozwiązane przez E. Martensena i D.H. Wilkinsona [3, 9]. Rozwiązanie to daje się bezpośrednio zastosować do maszyn o przepływie poosiowym, gdyż podstawowe równania przepływu potencjalnego opisujące przepływ względny przez maszynę osiową i przez palisadę płaską są takie same. W wirnikach diagonalnych i odśrodkowych problem jest bardziej złożony. Wynika to z innego sposobu przekazywania energii między cieczą i wirnikiem. Równanie Eulera dla pompy można napisać za pomocą prędkości względnych:

$$gH = c_{2u}\cdot u_2 - c_{1u}\cdot u_1 = \omega(r_2 w_{u2} - r_1 w_{u1}) + \omega^2(r_2^2 - r_1^2) =$$

$$= u_2\left(w_{u2} - \frac{r_1}{r_2} w_{u1}\right) + u_2^2\left[1 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\right] \qquad (1)$$

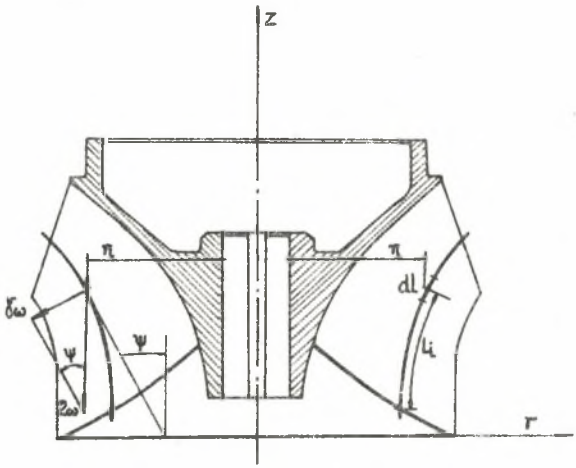
Pierwszy wyraz ostatniej prawej strony równania (1) wyraża przyrost energii jednostki masy cieczy spowodowany zmianą kierunku przepływu, a drugi wyraz przedstawia przyrost energii cieczy wywołany pracą sił Coriolisa. Dla pompy o przepływie poosiowym ($r_1 = r_2$) siły Coriolisa znikają, a równania przyrostu energii wyrażone za pomocą prędkości względnych i absolutnych mają identyczną postać matematyczną.

Druga prawa strona równania (1) wyjaśnia, dlaczego badania nieruchomych palisad diagonalnych i odśrodkowych nie dają wystarczających informacji o charakterystykach tych palisad w ruchu. Moment palisady nieruchomej na jednostkę masy cieczy wynosi $(r_2 w_{u2} - r_1 w_{u1})$ i nie ujmuje wpływu momentu sił Coriolisa $\omega(r_2^2 - r_1^2)$. Wobec ogromnej różnorodności kształtów

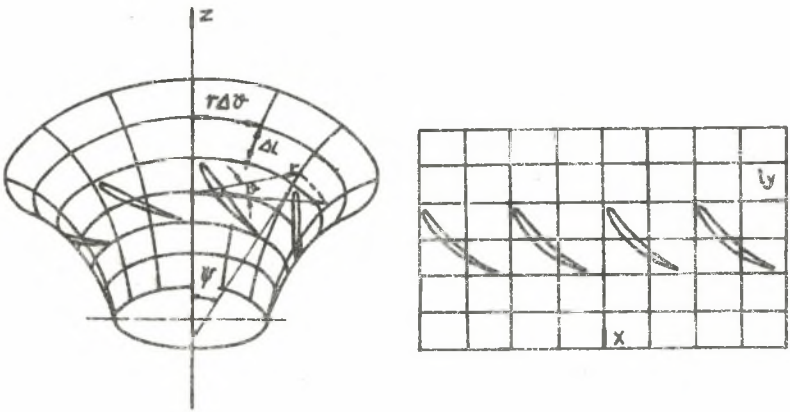
palisad diagonalnych i trudności doświadczalnego badania łopatek wirujących metodom obliczeniowym przypada szczególnie duże znaczenie.

2. Charakterystyka pola prędkości względnej w wirniku

Przepływ cieczy doskonałej w palisadzie płaskiej lub przepływ względny na cylindrycznej powierzchni prądu w wirniku pompy śmigłowej są potencjalne, natomiast przepływ względny w wirniku diagonalnym lub odśrodkowym jest



Rys. 1



Rys. 2

przepływem wirowym. Jeżeli przepływ bezwzględny przed wirnikiem obracającym się z prędkością ω jest potencjalny, to posiada on względem wirnika wirowość $-\omega$. Składowa wirowości normalna do powierzchni prądu w obszarze palisady wirnika wynosi (rys. 1)

$$\gamma_{\omega} = -2\omega\frac{dr}{dl} \tag{2}$$

Osiowo-symetryczną palisadę można odwzorować na palisadę płaską (rys.2) za pomocą znanych wzorów odwzorowania konforemnego [1, 5]:

$$x = \frac{1}{a}\int_0^L \frac{dl}{r}, \quad y = \frac{1}{a}\vartheta \tag{3}$$

gdzie:

$$a = \int_0^{L_{max}} \frac{dl}{r} \tag{4}$$

Między prędkościami w wirniku i w płaszczyźnie odwzorowania istnieje prosty związek (kreską oznaczono prędkość w płaszczyźnie zespolonej):

$$\bar{c} = arc \tag{5}$$

Pole przepływu potencjalnego przez palisadę płaską może być utworzone przez superpozycję przepływu jednorodnego i przepływu indukowanego ciągłym rozkładem wirów na konturze łopatki [1, 9, 7]. Martensen wykazał, że prędkość cieczy po wewnętrznej stronie konturu profilu jest równa zeru, co prowadzi do całkowego równania Fredholma drugiego rodzaju. Numeryczne rozwiązanie tego równania jest znane i umożliwia obliczanie pola prędkości i ciśnień dla profili o dowolnych kształtach, z dużą dokładnością [9, 6]. Metoda ta nie może być jednak bezpośrednio zastosowana do palisad wirników odśrodkowych i diagonalnych, ponieważ tam przepływ jest wirowy i po odwzorowaniu konforemnym ta wirowość pozostaje. Ponadto w tego typu wirnikach osiowo-symetryczne powierzchnie prądu nie przebiegają równolegle i występuje przyspieszenie merydionalne. W płaszczyźnie odwzorowania konforemnego to przyspieszenie może być odtworzone przez ciągły rozkład źródłowości.

Uwzględnienie wymienionych oddziaływań prowadzi do utworzenia pola prądu w płaszczyźnie odwzorowania przez superpozycję przepływu niezakłóconego w nieskończoności, przepływu indukowanego przez liniowy rozkład wirów na konturach łopatek oraz przepływów indukowanych przez odpowiednio dobra-

ny powierzchniowy rozkład wirowości i źródłowości, uwzględniający prędkość kątową wirnika i nierównoległość sąsiadujących ze sobą powierzchni prądu [2]. Można wykazać, że osobliwości znajdujące się wewnątrz konturów łopatek nie oddziałują na przepływ w palisadzie [5]. Wobec tego przy obliczaniu prędkości indukowanych przez powierzchniowy rozkład punktów osobliwych nie należy uwzględniać wypływu wirów i źródeł zawartych wewnątrz konturów łopatek.

Ogólne równanie prędkości względnych na płaszczyźnie odwzorowania można zatem przedstawić w postaci:

$$\vec{w}(z_o) = w_x(z_o) + iw_y(z_o) = \vec{w}_\infty + \vec{w}_\gamma(z_o) + \vec{w}_\omega(z_o) - \vec{w}_{\omega w}(z_o) + \\ + \vec{w}_b(z_o) - \vec{w}_{b\omega}(z_o) \tag{6}$$

W przypadku palisady nieruchomej prędkości w_ω i $w_{\omega w}$ są równe zeru, a układ odniesienia staje się układem inercyjnym. Przy bardzo cienkich łopatkach prędkości $\vec{w}_{\omega w}$ i $\vec{w}_{bw}$ można pominąć. Jeśli w wirniku nie występuje przyspieszenie merydionalne, to prędkości w_b i $w_{b\omega}$ są równe zeru.

3. Zależności między polem prędkości i kształtem łopatki

Warunek, żeby prędkość styczna do konturu łopatki po jego stronie wewnętrznej była równa zeru, ma postać

$$w_x(z_{os})\left(\frac{dx}{ds}\right)_o + w_y(z_{os})\left(\frac{dy}{ds}\right)_o = 0 \tag{7}$$

Prędkość $w_\gamma(z_{os})$ oblicza się znanym z teorii przepływu potencjalnego wzorem

$$\vec{w}_\gamma(z_{os}) = \vec{w}_{\gamma x}(z_{os}) + i\vec{w}_{\gamma y}(z_{os}) + \frac{1}{2}\gamma(s_o) - i\chi \tag{8}$$

gdzie:

$$\vec{w}_{\gamma x}(z_{os}) = -\frac{1}{2t}\int_{(s)}\gamma(s)\,\frac{\sin\frac{2\pi}{t}(y_o - y)}{\cosh\frac{2\pi}{t}(x_o - x) - \cos\frac{2\pi}{t}(y_o - y)} \tag{9}$$

$$\vec{w}_{\gamma y}(z_{os}) = \frac{1}{2t}\int_{(s)}\gamma(s)\,\frac{\sinh\frac{2\pi}{t}(x - y)}{\cosh\frac{2\pi}{t}(x_o - x) - \cos\frac{2\pi}{t}(y_o - y)} \tag{10}$$

Z równań (6) - (10) wynika zależność

$$-\frac{1}{2}\gamma(s_o) + \frac{1}{2\pi}\int_{(s)}\gamma(s)\frac{\pi}{t}\frac{\left(\frac{dy}{ds}\right)_o \sinh\frac{2\pi}{t}(x_o - x) - \left(\frac{dx}{ds}\right)_o \sin\frac{2\pi}{t}(y_o - y)}{\cosh\frac{2\pi}{t}(x_o - x) - \cos\frac{2\pi}{t}(y_o - y}\,ds =$$

$$= -\left[(w_{\infty x} + w_{bx} - w_{bwx} - w_{\omega wx})\left(\frac{dx}{ds}\right)_o + (w_{\infty y} + w_{\omega y} - w_{\omega wy} - w_{bwy})\left(\frac{dy}{ds}\right)_o\right. \quad (11)$$

Równanie (11) jest całkowym równaniem Fredholma drugiego rodzaju, które może rozwiązane być przez zwykłą kwadraturę całki, ponieważ jądro równania jest nieosobliwe. Składowe prędkości $\vec{w}_b$, $\vec{w}_{b\omega}$ i $\vec{w}_{\omega w}$ indukowane przez powierzchniowe rozkłady źródłowości i wirowości muszą być obliczane za pomocą specjalnych wyrażeń całkowych. Ze względu na rozmaity kształt profili łopatek obliczenie prędkości $\vec{w}_{bw}$ i $\vec{w}_{\omega w}$ może sprawiać trudności. Powoduje to konieczność zastosowania przybliżonych procedur obliczeniowych.

W przypadku łopatek cienkich warunek (7) i równanie (11) nie mogą być wykorzystane. Alternatywą warunku (7) jest warunek, że normalna do konturu składowa prędkości względnej musi być równa zeru, to jest

$$w_y(z_{os})\left(\frac{dx}{ds}\right)_o - w_x(z_{os})\left(\frac{dy}{ds}\right)_o = 0 \quad (12)$$

Stąd otrzymuje się równanie całkowe

$$\frac{1}{2\pi}\int\gamma(s)\frac{\pi}{t}\frac{\left(\frac{dx}{ds}\right)_o \sinh\frac{2\pi}{t}(x_o - x) + \left(\frac{dy}{ds}\right)_o \sin\frac{2\pi}{t}(y_o - y)}{\cosh\frac{2\pi}{t}(x_o - x) - \text{oos}\frac{2\pi}{t}(y_o - y)}\,ds =$$

$$= (w_{\infty x} + w_{bx})\left(\frac{dy}{ds}\right)_o - (w_{\infty y} + w_{\omega y})\left(\frac{dx}{ds}\right)_o$$

Równanie (13) jest równaniem całkowym Fredholma pierwszego rodzaju, o jądrze osobliwym. Rozwiązanie numeryczne tego równania wymaga zastosowania specjalnych metod aproksymacji [4, 8]. Dlatego wygodniej jest korzystać z równania (11), jeśli to tylko jest możliwe.

4. Zastosowanie równań całkowych w projektowaniu wirników

Równania (11) i (13) wiążą pole prędkości z geometrią palisady. Mogą one być wykorzystane do wyznaczenia pola prędkości w wirniku o danej palisadzie (zadanie analizy), por. np. [11] lub do określenia geometrii pa-

lisady, jeśli zadane jest pole prędkości cieczy (zadanie syntezy). Zadanie analizy rozwiązuje się przez dyskretyzację wyrażenia podcałkowego, co prowadzi do układu równań z niewiadomymi wartościami γ w punktach obliczeniowych. Zagadnienie syntezy może być rozwiązywane w podobny sposób, lecz ze względu na uwikłaną zależność pola prędkości od geometrii łopatek konieczne jest postępowanie iteracyjne. Przy syntezie łopatek cienkich na zadany rozkład wirowości γ wymyka się spod kontroli przebieg prędkości i ciśnień na łopatce, natomiast przy syntezie na zadany rozkład prędkości cyrkulacja łopatki, która określa teoretyczną wysokość podnoszenia wirnika, nie może być wielkością zadaną.

Obliczenie wirowości na konturze łopatki umożliwia, jak to wynika z równania (6), wyznaczenie prędkości cieczy nie tylko na łopatce ale w dowolnym punkcie analizowanej osiowo-symetrycznej powierzchni prądu. Znajomość teoretycznej cyrkulacji łopatek oraz pól prędkości i ciśnień w obszarze wirnika jest cenną informacją dla projektanta pompy. Dalszy postęp metod obliczeniowych wymaga opracowania analizy warstwy przyściennej. Umożliwi to oszacowanie rzeczywistych charakterystyk wirnika i jego optymalizację w procesie projektowania.

5. Wnioski

Postępy teorii maszyn przepływowych, rozwój metod numerycznych i elektronicznej techniki obliczeniowej umożliwiają praktyczną realizację podanej przez Wu koncepcji przedstawienia trójwymiarowego pola prędkości w wirniku przez dwa quasi-ortogonalne przepływy dwuwymiarowe. Zastosowanie dobrze opracowanej teorii przepływu przez palisady płaskie do analizy przepływu międzyłopatkowego w wirnikach pomp diagonalnych i odśrodkowych wymaga uwzględnienia wpływu powierzchniowego rozkładu wirowości i źródłowości w obszarze międzyłopatkowym. Prowadzi to to do uogólnienia równań całkowych wiążących pole prędkości z kształtem łopatki w palisadzie płaskiej. Do obliczeń numerycznych wygodnie jest wykorzystać warunek zerowej prędkości po wewnętrznej stronie konturu profilu, gdyż wtedy otrzymuje się równanie całkowe Fredholma o jądrze nieosobliwym, ale dla łopatek cienkich trzeba skorzystać z warunku zerowej prędkości normalnej do łopatki, co daje równanie całkowe Fredholma o jądrze singularnym. Równania całkowe (11) i (13) uzależniają pole prędkości od geometrii łopatek i mogą być wykorzystane do analizy i syntezy palisady wirnika. Znajomość pól prędkości i ciśnień oraz cyrkulacji łopatek w przepływie cieczy doskonałej daje projektantowi pompy cenne informacje o procesie roboczym wirnika. Może być także podstawą do uwzględnienia wpływu lepkości cieczy, gdyż umożliwia obliczenie warstwy przyściennej i oporów przepływu.

LITERATURA

[1] Gruber I., Czibere T.: Metoda hydrodynamicznych punktów osobliwych w zastosowaniu do pomp wirowych. W: S. Łazarkiewicz, A.T. Troskolański: Nowoczesne kierunki w konstrukcji pomp wirowych, rozdz. II, Wyd. Naukowo-Techniczne, Warszawa 1966.

[2] Lewis R.I., Fisher E.H., Saviolakis A.: Analysis of Mixed-flow rotor cascades. ARC Rep. and Mem. No. 3703, Nov. 1971.

[3] Martensen E.: Die Berechnung der Druckverteilung an dicken Gitterprofilen mit Hilfe von Fredholmschen Integralgleichungen Zweiter Art. Arch. Rat. Mech. Anal., No 3, s. 235-270, 1959.

[4] Mushelisvili N.L.: Singularnyje integralnyje urawnienia. Nauka, Moskwa 1968.

[5] Opracowanie podstaw teoretycznych optymalnego projektowania wirników i kierownic. Etap I. Określenie podstawowych zależności dla przepływów przez palisady wirników i kierownic. Praca zespołowa pod kierunkiem R. Rohatyńskiego. Raport Inst. Konstr. i Ekspl. Maszyn Polit. Wrocł. 1977.

[6] Popczyk Z.: Ocena dokładności metody punktów osobliwych w zastosowaniu do obliczania opływu płatów nośnych. Ref. na Jubileuszową Sesję Naukową Wydz. Mech.-Energet. Polit. Śląskiej, Gliwice 1978.

[7] Rohatyński R.: Application of the Martensen method for the analysis of thick airfoils in cascade Proc. of 5th Conf. on Fluid Machinery, Budapest 1975.

[8] Rohatyński R.: Theoretical investigations of flow in a diagonal pump impeller. Oest. Ing.-Zeitschrift, H. 10, 1974.

[9] Wilkinson D.H.: A numerical solution of the analysis and design problems for the flow past one or more aerofoils or cascades. ARC Rep. and Mem. No. 3545, 1968.

[10] Wu C.H.: A general theory of three-dimensional flow in subsonic and supersonic turbomachines of axial, radial and mixed-flow types Trans. ASME. Nov. 1952.

[11] Zieliński A.: Weryfikacja metody punktów osobliwych dla wirników odśrodkowych. Referat na Jubileuszową Sesję Naukową. Wydz. Mech-Energ. Politechniki Śl., Gliwice 1978.

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПОТОКА ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ ЧЕРЕЗ РЕШЁТКИ ДИАГОНАЛЬНОГО И ЦЕНТРОБЕЖНОГО ТИПА

Р е з ю м е

В статье указываются существенные раздичия между потенциальным потоком в прямой или цилиндрической решётке и относительным потоком в рабочем колесе диагонального или радиального типа. Сделано обобщение уравнений прямой решётки на все виды осесимметричных решёток. Выведены основные интегральные уравнения, связывающие поле скорости потока с геометрией решётки. Обсуждено применение этих уравнений для проектирования рабочих колёс.

FUNDAMENTAL EQUATIONS OF BLADE-TO-BLADE IDEAL FLOW
IN IMPELLERS OF RADIAL AND MIXED-FLOW TYPES

S u m m a r y

In this paper are shown some essential differences between potential flow in a flat or cylindrical cascade and relative flow in a mixed-flow or radial impeller. The equations for the flow past the flat cascade have been generalized for the axi-symmetric cascade of all types. Fundamental integral equations relating the fluid vecocity field with the cascade geometry have been derived. A way of application of these equations in impeller design is discussed.