ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1978

Seria: ENERGETYKA z. 66 Nr kol. 562

Gerard KOSMAN
Instytut Maszyn i Urządzeń Energetycznych

OPTYMALNE KSZTAŁTOWANIE TARCZ WIRNIKOWYCH TURBIN AKCYJNYCH Z UWAGI NA GRANICZNĄ LICZBĘ OBROTÓW

Streszczenie. Rozpatrzono zagadnienie doboru najkorzystniejszych z punktu widzenia wytrzymałości cech konstrukcyjnych tarcz wirnikowych. Opracowano ogólne zależności oraz nomogramy dla określenia optymalnej grubości tarcz o różnych profilach. Podano przykłady obliczeniowe doboru cech konstrukcyjnych tarcz wirnikowych w oparciu o uzyskane formuły.

1. Zakres optymalizacji

W pracy przeprowadzono analizę optymalnych stosunków wielkości związanych tarczy wirnikowej stopnia osiowego turbiny i na tej podstawie dobrano optymalne cechy konstrukcyjne tarczy. Wyznaczono optymalne wymiany geometryczne tarczy przy założeniu jej postaci konstrukcyjnej. Wymiarowanie tarczy oparto o warunek nośności granicznej (granicznej liczby obrotów). Optymalizację przeprowadzono dla trzech postaci konstrukcyjnych tarczy (rys. 1). Rozpatrzono tarczę o profilu trapezowym

$$h(r) = h_1 \left[1 - (1 - \Theta)\frac{r - r_1}{r_2 - r_1}\right] \tag{1}$$

i hiperbolicznym

$$h(r) = h_1 \left(\frac{r}{r_1}\right)^{-k} \tag{2}$$

gdzie:

$h(r)$ - grubość tarczy na promieniu r,

$\Theta = h_2/h_1$,

k - wykładnik hiperboli,

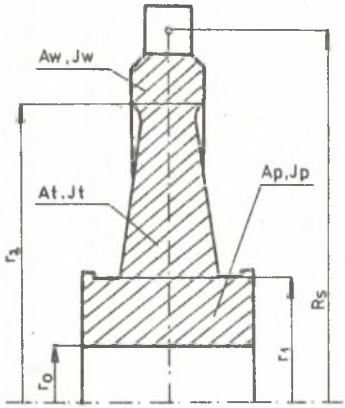
h_1 i h_2 - grubość tarczy na promieniach r_1 i r_2.

Jako przypadek graniczny wymienionych tarcz otrzymujemy tarczę o stałej grubości (h = const.).

Zagadnienie optymalizacji rozwiązano dla tarczy z piastą i wieńcem (rysunek 1). W rozważaniach szczegółowych przyjęto, że cechy geometryczne piasty i wieńca są znane.

2. Sformułowanie funkcji celu i warunków pobocznych

Rozpatrzmy tarczę wirnikową o zmiennej grubości (rys. 1), symetryczną względem płaszczyzny środkowej, wirującą z prędkością kątową ω. Temperatura tarczy zmienia się wzdłuż promienia. Na powierzchni zewnętrznej tarczy znajduje się "z" łopatek o masie $m_ł$ każda.



Rys. 1. Tarcza wirnikowa

Zgodnie z podanymi wcześniej założeniami cechy geometryczne piasty i wieńca są dane. W szczególności znamy promienie r_o, r_1, r_2, r_z, powierzchnię przekroju piasty A_p i wieńca A_w oraz momenty bezwładności przekroju piasty I_p i wieńca I_w liczone względem osi obrotu.

Przedmiotem optymalizacji pozostaje zasadnicza część tarczy. Zadanie sprowadza się do wyznaczenia wymiarów geometrycznych tarczy przy założonej postaci.

Jako kryterium optymalizacji wymiarów geometrycznych przyjmujemy minimum ciężaru przy uwzględnieniu warunku wytrzymałości tarczy. Jeżeli gęstość materiału tarczy jest stała, w miejsce ciężaru tarczy można minimalizować jej objętość.

Najprostszym sposobem oceny wytrzymałości jest porównanie naprężeń w określonych, najbardziej obciążonych przekrojach elementu z naprężeniami dopuszczalnymi.

Bardziej racjonalną metodą jest metoda stanów granicznych. W metodzie tej porównuje się obciążenie robocze P_{rob} elementu z obciążeniem granicznym P_{gr} przy uwzględnieniu współczynnika bezpieczeństwa x

$$P_{rob} \leq \frac{P_{gr}}{x} \tag{3}$$

Idealizując warunki pracy tarczy wirnikowej, zagadnienie wyznaczenia obciążenia granicznej (nośności granicznej) można sprowadzić do określenia granicznej liczby obrotów, przy której następuje rozerwanie tarczy [1].

Na podstawie podanych informacji model matematyczny optymalizacji można przedstawić następująco:

$$V \longrightarrow \text{minimum} \tag{4}$$

przy ograniczeniu

$$\omega \leq \frac{\omega_{gr}}{x} \tag{5}$$

Uwzględniając, że

$$V = V_w + V_t + V_p = V_t + V_{pw} \tag{6}$$

gdzie:

V_{pw} - sumaryczna objętość tarczy i wieńca, mamy

$$\boxed{\begin{aligned} &V_t \longrightarrow \text{minimum} && (7)\\ &\omega^2 x^2 \leqslant \omega^2_{gr} && (8)\end{aligned}}$$

Graniczną prędkość obrotową, powodującą rozerwanie tarczy, można wyznaczyć z zależności [2]

$$\omega^2_{gr} = \frac{R_m}{\varrho} \frac{A_t + A_{pw}}{I_t + I_{pw} + B} \tag{9}$$

gdzie:

A_{pw}, I_{pw} - sumaryczne pole przekroju i moment bezwładności piasty i wieńca,

$$B = \frac{z\, m_1\, R_s}{2\pi\varrho} \tag{10a}$$

$$A_t = \int_{r_1}^{r_2} h(r)dr \qquad I_t = \int_{r_1}^{r_2} r^2\, h(r)dr \tag{10b}$$

3. Tarcza o profilu trapezowym

3.1. Graniczna liczba obrotów tarczy

Dla tarczy o profilu trapezowym opisanym zależnością (1) otrzymujemy

$$A_t = h_1 \frac{1+\Theta}{2} (r_2 - r_1) \tag{11}$$

$$I_t = \frac{h_1}{r_2 - r_1} \left[(r_2 - r_1 \Theta) \frac{r_2^3 - r_1^3}{3} - (1-\Theta) \frac{r_2^4 - r_1^4}{4} \right] \tag{12}$$

Stąd zależność (9) przyjmuje postać

$$\omega_{gr}^2 = \frac{R_m}{\varrho} \frac{h_1 \frac{1+\Theta}{2} (r_2 - r_1) + A_{pw}}{\frac{h_1}{r_2 - r_1} \left[(r_2 - r_1 \Theta) \frac{r_2^3 - r_1^3}{3} - (1-\Theta) \frac{r_2^4 - r_1^4}{4} \right] + I_{pw} + B} \tag{13}$$

W przypadkach granicznych mamy:

- dla $h_1 = 0$

$$\omega^2_{gr,o} = \frac{R_m}{\varrho} \frac{A_{pw}}{I_{pw} + B} \tag{14}$$

- dla $h_1 \to \infty$

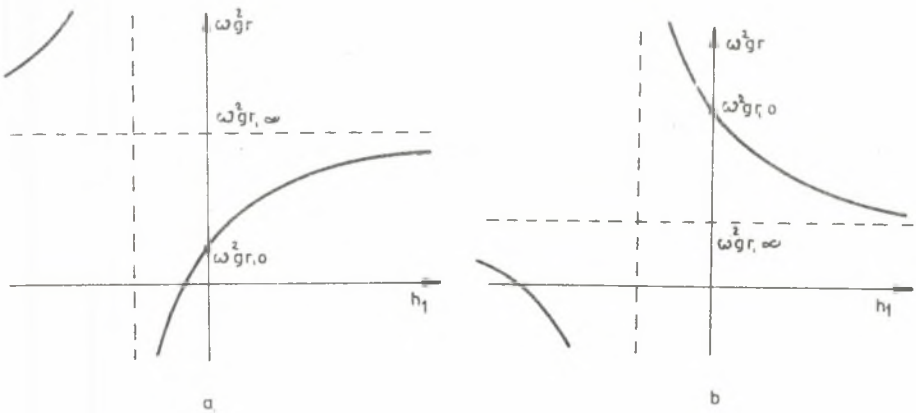
$$\omega^2_{gr,\infty} = \frac{R_m}{\varrho} \frac{(1 + \Theta)(r_2 - r_1)^2}{\frac{2}{3}(r_2 - r_1\Theta)(r_3^3 - r_1^3) - \frac{1 - \Theta}{2}(r_2^4 - r_1^4)} \tag{15}$$

Ze względu na h funkcja (13) jest funkcją homograficzną typu

$$y = \frac{a_1 x + b_1}{a_2 x + b_2}$$

której przebieg zależy od wyróżnika

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$



Rys. 2. Zależność granicznej liczby obrotów od grubości tarczy

W naszym przypadku mamy

$$D = \frac{R_m}{\varrho} \frac{I_{pw} + B}{R_2 - r_1} \left[(r_2 - r_1\Theta) \frac{r_2^3 - r_1^3}{3} - (1 - \Theta) \frac{r_2^4 - r_1^4}{4} \right] (\omega_{gr\infty}^2 - \omega_{gr\,o}^2) \tag{16}$$

Jeżeli $\omega_{gr\infty} > \omega_{gro}$, to $D > 0$ i graniczna prędkość obrotowa opisana formułą (13) rośnie ze wzrostem grubości tarczy h_1.
Jeżeli $\omega_{gr\infty} < \omega_{gro}$, to $D < 0$ i graniczna prędkość obrotowa maleje przy zwiększeniu h_1 (rys. 2).

3.2. Optymalna grubość tarczy

Objętość tarczy o profilu trapezowym jest równa

$$V_t = \pi h_1 \left[\Theta r_2^2 - r_1^2 + \frac{1}{3}(1-\Theta)(r_2^2 + r_1 r_2 + r_1^2) \right] \tag{17}$$

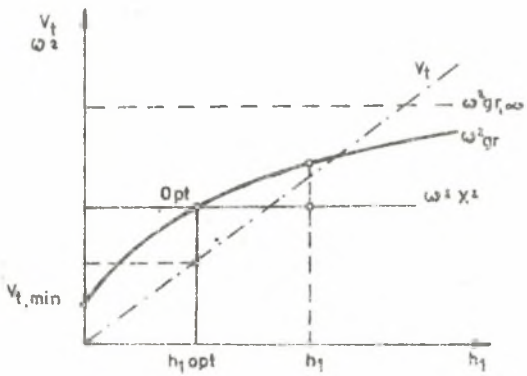
Nanosząc zależności (7), (8), (13) i (17) na wspólny wykres, można w prosty sposób wyznaczyć optymalną grubość tarczy. Rozpatrzmy wyróżnione wcześniej dwa podstawowe przypadki:

a) $\omega_{gr\infty} > \omega_{gro}$

Przypadek ten przedstawiono na rys. 3. Analiza podanych zależności prowadzi do następujących wniosków:

- minimalny ciężar (objętość V_t) tarczy przy jednoczesnym spełnieniu warunku wytrzymałościowego (8) otrzymujemy dla optymalnej grubości tarczy h_{opt}, której wartości można wyznaczyć z (8) i (13)

$$h_{1opt} = \frac{\dfrac{\omega^2 x \varrho}{R_m}(I_{pw} + B) - A_{pw}}{\dfrac{(1+\Theta)(r_2-r_1)}{2} - \dfrac{1}{r_2-r_1}\left[(r_2-r_1\Theta)\dfrac{r_2^3-r_1^3}{3} - (1-\Theta)\dfrac{r_2^4-r_1^4}{4}\right]\dfrac{\omega^2 x^2 \varrho}{R_m}} \tag{18}$$



Rys. 3. Wyznaczenie optymalnej grubości tarczy ($\omega_{gr\infty} > \omega_{gro}$)

- warunek wytrzymałościowy (8) będzie również spełniony, gdy

$$h_1 > h_{opt} \tag{19}$$

(rozwiązanie dla h_1 na rys. 3). W tym przypadku objętość tarczy V_t jest większa od wartości minimalnej. Przyjęcie większej grubości tarczy, przy danych ω, R_m i ϱ, prowadzi do zwiększenia współczynnika bezpieczeństwa x,

- przy zwiększaniu prędkości obrotowej ω i współczynnika bezpieczeństwa x optymalna grubość tarczy rośnie (punkt O_{pt} przesuwa się w prawo),
- podobny efekt uzyskuje się przy stosowaniu coraz gorszych pod względem wytrzymałościowym materiałów. Zmniejszając R_m, obniżamy krzywą $\omega_{gr}{}^2$ i punkt O_{pt} przesuwa się w prawo,
- istnieje pewna granica zmian iloczynu $\omega^2 x^2$

$$\omega^2_{gr0} \leqslant \omega^2 x^2 \leqslant \omega_{gr}{}^2 \tag{20}$$

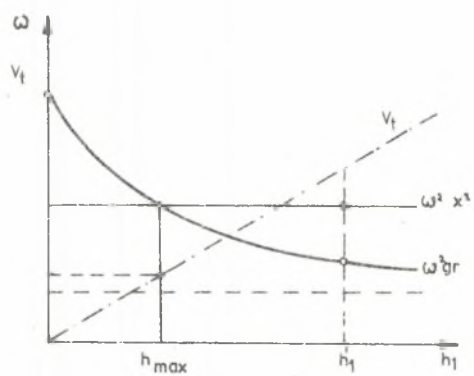
lub po uwzględnieniu (14) i (15)

$$\frac{A_{pw}}{I_{pw}+B} \leqslant \frac{\omega^2 x^2 \varrho}{R_m} \leqslant \frac{(1+\Theta)(r_2-r_1)^2}{\frac{2}{3}(r_2-r_1\Theta)(r_2^3-r_1^3)-\frac{1-\Theta}{2}(r_2^4-r_1^4)} \tag{21}$$

tzn. istnieje pewna granica wzrostu prędkości obrotowej i współczynnika bezpieczeństwa oraz zmniejszenia wytrzymałości materiału. Warunek (21) określa zatem warunek istnienia rozwiązania optymalnego (istnienia optymalnej grubości tarczy).

b. $\omega_{gr\infty} < gro$

Przypadek ten przedstawiono na rys. 4. Graniczna prędkość obrotowa maleje wraz ze wzrostem grubości tarczy. Analiza przedstawionych krzywych prowadzi do następujących wniosków:



Rys. 4. Wyznaczenie optymalnej grubości tarczy ($\omega_{gr\infty} > \omega_{gro}$)

- minimalny ciężar (objętość V_t) tarczy przy jednoznacznym spełnieniu przyjętego warunku wytrzymałościowego otrzymujemy dla $h_1 = 0$. Rozwiązania praktyczne będą zatem zawsze odbiegać od rozwiązania optymalnego,
- warunek wytrzymałościowy (8) będzie spełniony tylko wtedy, gdy

$$h_1 \leqslant h_{1max} \tag{22}$$

gdzie:

wartość h_{max} określa formuła (18),

- przy zwiększeniu prędkości obrotowej ω i współczynnika bezpieczeństwa x maksymalnie dopuszczalna grubość tarczy maleje (punkt O_{pt} przesuwa się w lewo),

- zwiększenie grubości tarczy (przy stałej wartości ω, R_m i ϱ) prowadzi do zmniejszenia współczynnika bezpieczeństwa x.

Z matematycznego punktu widzenia rozpatrywany przypadek jest zupełnie poprawny. W praktyce jednak może okazać się bardzo nieprzyjemny. Po pierwsze, że rozwiązanie optymalne ($h_{1opt} = 0$) nie znajduje praktycznego zastosowania. Po drugie, że każde inne rozwiązanie ($h_1 > 0$) zmniejsza wytrzymałość tarczy na rozerwanie. Po trzecie zaś, że przez nieświadome zwiększenie grubości tarczy w celu zwiększenia współczynnika bezpieczeństwa w rzeczywistości zmniejszymy jego wartość.

4. Tarcza o profilu hiperbolicznym

4.1. Graniczna liczba obrotów tarczy

Dla tarczy o profilu hiperbolicznym opisanym zależnością (2) otrzymujemy

$$A_t = \frac{h_1 r_1^k}{1-k}\left(r_2^{1-k} - r_1^{1-k}\right)$$
$$I_t = \frac{h_1 r_1^k}{3-k}\left(r_2^{3-k} - r_1^{3-k}\right) \tag{23}$$

Graniczna prędkość obrotowa (zależność (9)) jest równa

$$\omega_{gr}^2 = \frac{R_m}{\varrho}\,\frac{\frac{h_1 r_1^k}{1-k}\left(r_2^{1-k} - r_1^{1-k}\right) + A_{pw}}{\frac{h_1 r_1^k}{3-k}\left(r_2^{3-k} - r_1^{3-k}\right) + I_p + B} \tag{24}$$

Stąd mamy:

- dla $h_1 = 0$

$$\omega_{gr,o}^2 = \frac{R_m}{\varrho}\,\frac{A_{pw}}{I_{pw} + B} \tag{25}$$

- dla $h_1 \to \infty$

$$\omega_{gr,\infty}^2 = \frac{R_m}{\varrho}\,\frac{3-k}{1-k}\,\frac{r_2^{1-k} - r_1^{1-k}}{r_2^{3-k} - r_1^{3-k}} \tag{26}$$

Wyznacznik funkcji homograficznej (24) jest równy

$$D = \frac{R_m}{\varrho} (I_{po} + B) \frac{r_1^k}{3-k} (r_2^{3-k} - r_1^{3-k}) \left[\omega^2_{gr\infty} - \omega^2_{gr,0}\right] \tag{27}$$

Jeżeli $\omega_{gr\infty} > \omega_{gr0}$, to $D > 0$ i graniczna prędkość obrotowa opisana formułą (24) rośnie wraz ze wzrostem grubości tarczy h_1 (rys. 2a). Jeżeli $\omega_{gr\infty} < \omega_{gr0}$, to $D < 0$ i graniczna prędkość obrotowa maleje przy zwiększaniu h_1 (rys. 2b).

4.2. Optymalna grubość tarczy

Dla tarczy o profilu hiperbolicznym (2) mamy

$$V_t = \frac{2\pi h_1 r_1^k}{2-k} (r_2^{2-k} - r_1^{2-k}) \tag{28}$$

Postępując dalej analogicznie jak w przypadku tarczy o profilu trapezowym, należy rozpatrzeć dwa podstawowe warianty:

a. $\omega_{gr\infty} > \omega_{gr0}$

Nanosząc w tym przypadku zależności (7), (8), (24) i (28) na wspólny wykres, otrzymujemy sytuację podobną do przedstawionej na rys. 3. Słuszne pozostają również wszystkie podane w punkcie 3.2 wnioski. Optymalna grubość tarczy jest równa

$$h_{1opt} = \frac{\frac{\omega^2 x^2 \varrho}{R_m} (I_{pw} + B) - A_{pw}}{\frac{r_1^k}{1-k} (r_2^{1-k} - r_1^{1-k}) - \frac{r_1^k}{3-k} (r_2^{3-k} - r_1^{3-k}) \frac{2x^2}{R_m}} \tag{29}$$

Warunek istnienia rozwiązania optymalnego (20) po uwzględnieniu (25) i (26) przyjmuje postać

$$\frac{A_{pw}}{I_{pw} + B} \leqslant \frac{\omega^2 x^2 \varrho}{R_m} \leqslant \frac{3-k}{1-k} \frac{r_2^{1-k} - r_1^{1-k}}{r_2^{3-k} - r_1^{3-k}} \tag{30}$$

b. $\omega_{gr\infty} < \omega_{gr0}$

Przypadek ten przedstawiono na rys. 4. Słuszne pozostają wszystkie podane w punkcie 3.2 wnioski.

5. Przykłady doboru cech konstrukcyjnych tarcz wirnikowych

Rozpatrzmy bliżej zagadnienie doboru cech konstrukcyjnych tarczy wirnikowej bez piasty i wieńca ($A_{pw} = 0$, $I_{pw} = 0$) o promieniach $r_1 = 0,258$ m i $r_2 = 0,535$ m. Na obwodzie zewnętrznym zamocowanych jest $z = 250$ łopatek o masie 0,26 kg. Środek ciężkości łopatki znajduje się na promieniu $R_s = 0,574$ m.

Przedmiotem optymalizacji pozostaje grubość h_1 tarczy na promieniu r_1.

5.1. Optymalna grubość tarczy

Optymalną grubość tarczy h_{1opt} można wyznaczyć z (18) dla tarczy o profilu trapezowym oraz z (29) dla tarczy o profilu hiperbolicznym.

Dla znanych wartości r_2, r_1, B, A_{pw} i I_{pw} na podstawie (18) i (29) mamy

$$h_{1opt} = f\left(\frac{\omega^2 x^2 \varrho}{R_m}, \Theta\right) \tag{31}$$

przy czym dla tarczy o profilu hiperbolicznym uwzględniono związek

$$k = -\frac{\ln \Theta}{\ln r_1/r_1} \tag{32}$$

Zależność (31) dla tarczy o profilu trapezowym przedstawiono graficznie na rys. 5. Wykorzystując optymalną grubość tarczy h_{1opt}, wyznaczono odpowiadającą jej minimalną masę tarczy (rys. 6).

W oparciu o uzyskany nomogram można łatwo wyznaczyć optymalną grubość tarczy dla konkretnej prędkości obrotowej i materiału tarczy. Można również przeanalizować wpływ tych wielkości na h_{1opt}.

Dla $\omega = 314\ s^{-1}$, $\Theta = 0,4$, $R_m = 530\ MN/m^2$ $x = 2$.

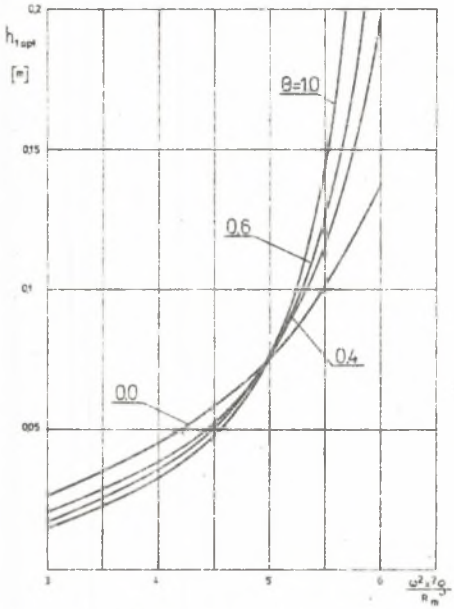
otrzymujemy

- dla tarczy o profilu trapezowym

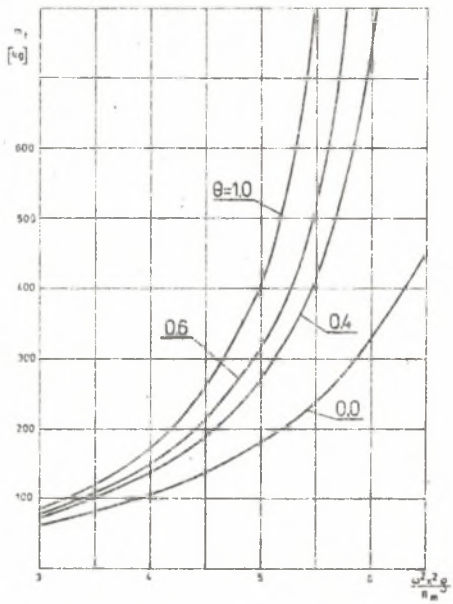
$$h_{1opt} = 0,160\ m \qquad m_{tmin} = 582\ kg$$

- dla tarczy o profilu hiperbolicznym

$$h_{1opt} = 0,176\ m \qquad m_{tmin} = 539\ kg.$$



Rys. 5. Zależność optymalnej grubości tarczy od parametrów Θ i $\omega^2 x^2 \rho / R_m$



Rys. 6. Minimalna masa tarczy

5.2. Wpływ cech materiałowych na optymalną grubość tarczy

Jako drugi przykład obliczeniowy rozpatrzmy możliwość wykonania tarczy o profilu trapezowym (Θ = 0,6) z różnych materiałów, charakteryzujących się różnymi własnościami wytrzymałościowymi.

Wyniki obliczeń dla ωx = 314 s^{-1} oraz 628 s^{-1} przedstawiono w tabl.1.

Tablica 1

Optymalna (minimalna) grubość tarczy h_1 [m]

	ωx [s^{-1}]	628	500	314
I	R_m = 400 MN/m^2	-	0,072	0,0094
II	R_m = 500 MN/m^2	0,42	0,035	0,0069
III	R_m = 600 MN/m^2	0,084	0,023	0,0054
IV	R_m = 700 MN/m^2	0,046	0,018	0,0045
V	R_m = 800 MN/m^2	0,032	0,013	0,0039

Podane przykłady obliczeniowe oraz przeprowadzone wcześniej rozważania teoretyczne dotyczą optymalizacji wybranych cech konstrukcyjnych (geometrycznych i materiałowych) tarcz wirnikowych z uwzględnieniem granicznej liczby obrotów. Przyjęcie innych kryteriów wytrzymałościowych oraz uwzględnienie względów technologicznych może prowadzić do zmiany rozwiązania optymalnego.

Optymalizację wymiarów przeprowadzono dla założonej postaci konstrukcyjnej tarczy. Bardziej ogólne ujęcie zagadnienia obejmowałoby również optymalizację postaci.

LITERATURA

[1] Kosman G.; Wajsprych A.: Dobór wybranych cech konstrukcyjnych wirników wentylatorów promieniowych. ZNPS "Energetyka" z. 56, 1976.

[2] Lipka J.: Wytrzymałość maszyn wirnikowych. WNT, Warszawa 1967.

ОПТИМАЛЬНОЕ ФОРМИРОВАНИЕ ВРАЩАЮЩИХСЯ ДИСКОВ ПАРОВЫХ ТУРБИН ПО ПРЕДЕЛЬНОМУ ЧИСЛУ ОБОРОТОВ

Р е з ю м е

В работе представлен метод выбора некоторых конструктивных параметров вращающихся дисков, которые обеспечили бы их прочность. Использовав результаты предыдущих работ, разработаны номограммы для определения оптимальной толщины дисков. Числовые примеры иллюстрируют приведённые в работе методы.

AN OPTIMUM DESIGN FOR ROTATING DISCS OF STEAM TURBINES IN RESPECT TO BURSTING SPEEDS

S u m m a r y

The paper presents a selection method for most profitable steam turbine rotating discs construction features in the aspect of strength. General nomograms have been worked out on the background of earlier research results to descrite the disc optimum features.
A numerical example illustrates the procedure.