ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1978
Seria: ENERGETYKA z. 66 Nr kol. 562

Andrzej WITKOWSKI
Instytut Maszyn i Urządzeń Energetycznych

QUASI-RZECZYWISTY MODEL PRZEPŁYWU W OSIOWYM STOPNIU SPRĘŻAJĄCYM

Streszczenie. Wykorzystując wyniki badań własnych i obcych wyprowadzono zależności umożliwiające przybliżoną analizę przepływu w osiowym stopniu sprężającym z uwzględnieniem rzeczywistych własności gazu. Przyjęto model, w którym rozpatrzono kolejno quasi-trójwymiarowy przepływ główny oraz przepływ w obszarze pierścieniowej warstwy granicznej. Podano uproszczony przykład obliczeń narastania pierścieniowych warstw przyściennych w modelowym sprężającym stopniu osiowym z merydionalnym przyspieszeniem strumienia i porównano z wynikami badań osiągając zadowalającą zgodność.

1. Wstęp

Przybliżona metoda wyznaczania charakterystyk aerodynamicznych osiowego stopnia sprężającego polega na wyodrębnieniu trzech charakterystycznych zagadnień: zagadnienia przepływu głównego z pominięciem wpływu tarcia przyściennego, zagadnienia przepływu palisadowego oraz zagadnienia przepływu w obszarze pierścieniowej warstwy granicznej [1], [2] narastającej na osiowo-symetrycznych ściankach ograniczających wieńce łopatkowe.

Rozwiązanie tych zagadnień umożliwia uzyskanie przybliżonego quasi-rzeczywistego obrazu struktury przepływu i w dalszej kolejności strat występujących w tym przepływie.

Szczególnie istotny wpływ na przebieg charakterystyki aerodynamicznej zarówno stopnia jak i sprężarki wielostopniowej mają zjawiska występujące w obszarze pierścieniowej warstwy granicznej. Zjawiska te decydują o wielkości strat zarówno w obliczeniowym jak i pozaobliczeniowych punktach pracy stopnia. Ponieważ charakterystyki aerodynamiczne osiowych palisad łopatkowych są obecnie dokładnie poznane dzięki wszechstronnym badaniom aerodynamicznym, główną uwagę w niniejszym artykule zwrócono na zagadnienie przepływu w pierścieniowej warstwie granicznej. Zagadnieniu temu poświęcony będzie również przykład obliczeniowy przy wykorzystaniu badań modelowego wieńca sprężającego z merydionalnym przyspieszeniem strumienia [3].

2. Model przepływu głównego

Zagadnienie przepływu głównego rozwiązane zostało przez autora między innymi w pracach [3],[4] w oparciu o quasi-trójwymiarowy model przepływu z wykorzystaniem pojęcia linii prądu. Równaniem wyjściowym jest równanie przepływu nielepkiego ustalonego i izentropowego w układzie współrzędnych wirujących wraz z wieńcem łopatkowym.

$$2\,\bar{\omega}\times\bar{W} - \bar{W}\times(\nabla\times\bar{W}) = -\nabla J + T\nabla S \tag{1}$$

Równanie (1) rozpisujemy przy założeniu przepływu osiowo-symetrycznego w układzie współrzędnych cylindrycznych r, ϑ, z w postaci układu trzech równań skalarowych:

$$W_r\,\frac{\partial W_z}{\partial r} + W_z\,\frac{\partial W_z}{\partial z} = F_z - \frac{1}{\varrho}\,\frac{\partial p}{\partial z} \tag{2}$$

$$W_r\,\frac{\partial W_r}{\partial r} + W_z\,\frac{\partial W_r}{\partial z} - \frac{W^2_{\vartheta}}{r} - \omega^2\,.\,r - 2\omega W_{\vartheta} = F_r - \frac{1}{\varrho}\,\frac{\partial p}{\partial r} \tag{3}$$

$$W_r\,\frac{\partial W_{\vartheta}}{\partial r} + W_z\,\frac{\partial W_{\vartheta}}{\partial z} + \frac{W_r\,.\,W_{\vartheta}}{r} + 2\,.\,\omega\,.\,W_r = F_{\vartheta} \tag{4}$$

oraz równanie ciągłości

$$\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\,(r\,.\,\varrho W_r) + \frac{\partial}{\partial z}\,(\varrho W_z) = 0 \tag{5}$$

Uśrednienie równań przepływu w kierunku obwodowym prowadzi do pojawienia się siły oddziaływania łopatek F na przepływający strumień.

Równania (2), (3), (4), (5) rozpisane w układzie współrzędnej m stycznej do linii prądu i quasi-ortogonalnej [3] umożliwiają uzyskanie na drodze obliczeń numerycznych, rozkładu prędkości względnych w przekroju merydionalnym wieńca łopatkowego. Rezygnując z kolei z osiowej symetrii przepływu, otrzymujemy równanie równowagi dla kierunku obwodowego

$$W_r\,\frac{\partial W_{\vartheta}}{\partial r} + \frac{W_{\vartheta}}{r}\,\frac{\partial W_{\vartheta}}{\partial \vartheta} + W_z\,\frac{\partial W_{\vartheta}}{\partial z} + \frac{W_r\,W_{\vartheta}}{r} + 2\omega W_r = F_{\vartheta} - \frac{1}{\varrho}\,\frac{\partial p}{r\,\partial \vartheta} \tag{6}$$

Równanie to rozpisane w układzie współrzędnej merydionalnej m i obwodowej ϑ i rozwiązane na drodze numerycznej umożliwia uzyskanie rozkładów prędkości i ciśnień na wybranych osiowo-symetrycznych powierzchniach prądu oraz na powierzchniach łopatek [4].

3. Równania przepływu w obszarze pierścieniowej warstwy granicznej

Do wyprowadzenia równań przepływu w obszarze pierścieniowej warstwy granicznej wykorzystano równania Naviera-Stokesa uśrednione w kierunku obwodowym [5] [6].

W efekcie uśrednienia w równaniach pojawiają się siły oddziaływania łopatek na przepływający strumień gazu oraz uśrednione w kierunku obwodowym wartości prędkości.

Ponieważ uwzględnienie w obszarze warstwy granicznej sił odśrodkowych i Coriolisa stanowi skrajnie trudny problem matematyczny, uzyskany osiowo-symetryczny przepływ rozpatrujemy w układzie współrzędnych niewirujących $\omega = 0$.

W dalszym ciągu zastosowano klasyczne uproszczenie stosowane w teorii warstwy granicznej [7] polegające na pominięciu zależności na moment ilości ruchu oraz na tarcie przyścienne w kierunku osi r, a wykorzystaniu jedynie równań określonych dla kierunku osi z i ϑ. Przyjęto również, że grubość warstwy granicznej jest mała w porównaniu z promieniami zewnętrznej i wewnętrznej ścianki ograniczającej przepływ oraz że grubość łopatek jest mała.

Jeśli siłę łopatkową określimy przy pomocy zależności wyprowadzonych w pracy [5]:

$$\frac{\partial f_z}{\partial z} = \frac{\Delta p}{t}\, tg\beta - 2\,\frac{\tau_z}{t} \tag{7}$$

$$\frac{\partial f_\vartheta}{\partial z} = -\frac{\Delta p}{t} - 2\,\frac{\tau_z}{t}\, tg\beta \tag{8}$$

gdzie: $\Delta p/t$ stanowi średni gradient ciśnienia w kierunku podziałki łopatek wywołany różnicą ciśnień pomiędzy stroną czynną i bierną łopatek (rys. 1) wówczas równania (2) i (4) w obszarze warstwy granicznej przyjmą postać:

$$w_r \frac{\partial w_z}{\partial r} + w_z \frac{\partial w_z}{\partial z} = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial \tilde{f}_z}{\partial z} - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{\varrho}\frac{\tau_z}{\partial r} \tag{9}$$

$$w_z \frac{\partial w_\vartheta}{\partial z} + w_r \frac{\partial w_\vartheta}{\partial r} = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial \tilde{f}_\vartheta}{\partial z} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial \tau_\vartheta}{\partial r} \tag{10}$$

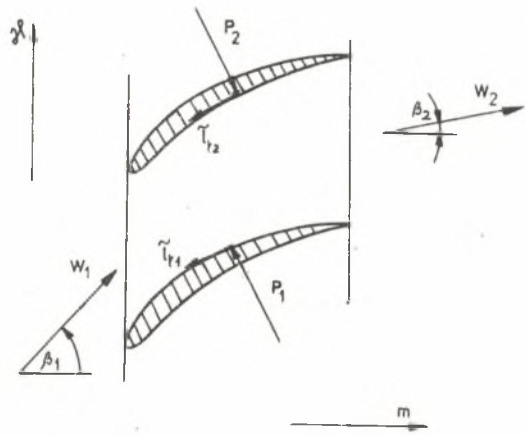
Ponadto dla obszaru warstwy granicznej ważna jest zależność

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 0.$$

Dla zewnętrznej granicy warstwy przyściennej równania (7) i (8) sprowadzają się do zależności:

$$W_z \frac{\partial W_z}{\partial z} = \frac{1}{\varrho} \frac{\partial f_z}{\partial z} - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial z} \tag{11}$$

$$W_z \frac{\partial W_\vartheta}{\partial z} = \frac{1}{\varrho} \frac{\partial f_\vartheta}{\partial z} \tag{12}$$



Rys. 1

Dodatkowe równanie stanowi równanie ciągłości dla obszaru warstwy granicznej

$$\frac{\partial w_z}{\partial z} + \frac{\partial w_r}{\partial r} = 0 \tag{13}$$

Równania (11) i (12) odejmujemy stronami od równań (9) i (10) i otrzymujemy

$$w_r \frac{\partial w_z}{\partial r} + w_z \frac{\partial w_z}{\partial z} - W_z \frac{\partial W_z}{\partial z} = \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial z} (\tilde{f}_z - f_z) + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \tau_z}{\partial r} \tag{14}$$

$$w_z \frac{\partial w_\vartheta}{\partial z} + w_r \frac{\partial w_\vartheta}{\partial r} - W_z \frac{W}{\partial z} = \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial z} (\tilde{f}_\vartheta - f_\vartheta) + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \tau_\vartheta}{\partial r} \tag{15}$$

Wprowadzamy równania definicyjne charakterystycznych wielkości warstwy przyściennej [7], [5]:

- miara liniowa zmniejszenia natężenia przepływu

$$W_z \cdot \delta^* = \int_0^\delta (W_z - w_z) dr \tag{16a}$$

- miara liniowa straty pędu dla kierunku osiowego i obwodowego

$$W_z^2 \cdot \delta_z^{**} = \int_0^{\delta} w_z \left(W_z - w_z\right) \cdot dr \qquad (16b)$$

$$W_z \cdot W_{\vartheta} \delta_{\vartheta}^{**} = \int_0^{\delta} \left(W_{\vartheta} - w_{\vartheta}\right) \cdot dr \qquad (16c)$$

- za autorami pracy [5] wprowadzamy ponadto pojęcie miary liniowej zmniejszenia siły łopatkowej w obszarze warstwy granicznej

$$\delta_{fz}, \quad \delta_{f\vartheta}:$$

$$\frac{W^2}{2} \delta_{fz} = \int_0^{\delta} \left(\frac{f - \tilde{f}}{\varrho}\right)_z dr \qquad (16d)$$

$$\frac{W^2}{2} \delta_{f\vartheta} = \int_0^{\delta} \left(\frac{f - \tilde{f}}{\varrho}\right)_{\vartheta} dr \qquad (16e)$$

- parametr kształtu warstwy przyściennej

$$H = \delta^{*} / \delta_z^{**} \qquad (16f)$$

Równania (13), (14) i (15) całkujemy w przedziale od $r=0$ do $r=\delta$ i uwzględniamy równania definicyjne (16). W rezultacie otrzymujemy dwa równania całkowe umożliwiające wyznaczenie narastania grubości warstwy przyściennej w kierunku osiowym i obwodowym:

$$\frac{d}{dz}\left(W_z^2 \delta_z^{**}\right) + H.\, \delta_z^{**} \frac{dW_z}{dz} = \frac{d}{dz}\left(\frac{W^2}{2} \delta_{fz}\right) + \frac{\tau_z}{\varrho} \qquad (17)$$

$$\frac{d}{dz}\left(W_z . W_{\vartheta} . \delta_{\vartheta}^{**}\right) + H\, \delta_z^{**} \frac{dW\vartheta}{dz} = \frac{d}{dz}\left(\frac{W^2}{2} - \delta_{f\vartheta}\right) + \frac{\tau_{\vartheta}}{\varrho} \qquad (18)$$

Podobne zależności jak (17) i (18) wyprowadzone zostały po raz pierwszy przez Raillego i Howarda w pracy [6] z pominięciem występowania defektu siły łopatkowej. Wpływ zmniejszenia siły łopatkowej na krańcach łopatek uwzględniony został po raz pierwszy w pracy Mellora i Wooda [5].

W pracy [8] równania (17) i (18) wyprowadzono w postaci różnicowej w układzie współrzędnych m, r, ϑ przy uwzględnieniu zmienności promienia $r = f(z)$ w kierunku przepływu.

Rozkłady prędkości na granicy warstwy przyściennej w kolejnych przekrojach układu przepływowego znajdujemy z analizy przepływu quasi-trójwymiarowego. Po określeniu początkowych wartości δ_1^{**}, H_1 na wlocie do wieńca łopatkowego, pozostaje siedem niewiadomych: τ_z, τ_{ϑ}, δ_{fm}, $\delta_{f\vartheta}$, δ_{m2}, $\delta_{\vartheta 2}^{**}$ oraz H_2. Jedno z dodatkowych równań uzyskuje się przez przyjęcie założenia, że wektor siły ma w każdym punkcie przepływu kierunek normalny do kierunku średniej strugi w przepływie głównym

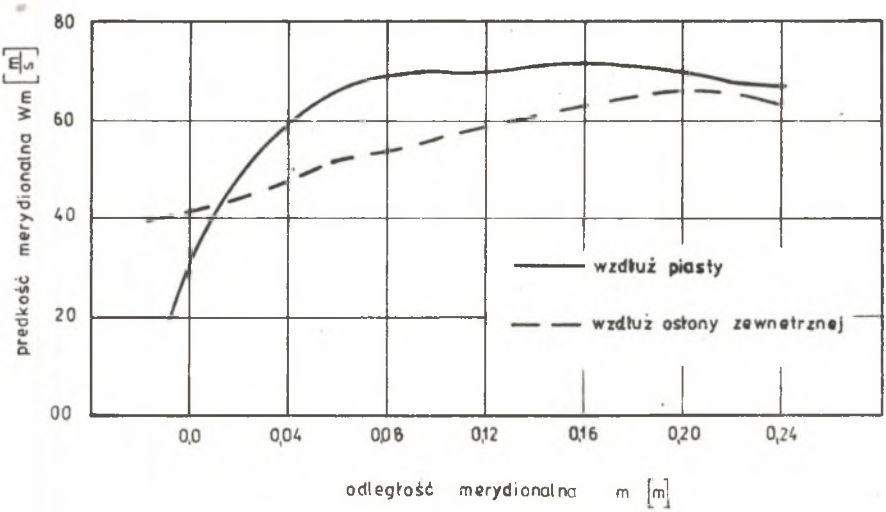
$$f_z = \frac{\bar{W}_\vartheta}{W_z} f_\vartheta \tag{19}$$

Dalsze równania wymagają doświadczalnego wyznaczenia współczynnika siły tarcia powierzchniowego C_f oraz parametru kształtu H. Dyskusję nad sposobem określenia tych wielkości przedstawiono w pracy [8].

4. Przykład obliczeniowy

Przeprowadzono analizę narastania pierścieniowej warstwy granicznej w modelowym wieńcu sprężającym z merydionalnym przyspieszeniem strumienia [3] w nominalnym punkcie pracy. Wykorzystano tu wyniki obliczeń rozkładów prędkości względnych wzdłuż piasty i osłony zewnętrznej (rys. 2) uzyskane z rozwiązania przepływu quasi-trójwymiarowego oraz wyniki sondowania przepływu w przekroju wlotowym i wylotowym wieńca [3]. Miarę liniową zmniejszenia natężenia przepływu przy piaście i osłonie zewnętrznej wieńca określono aproksymując rzeczywisty, uzyskany z sondowania profil prędkości w obszarze warstwy granicznej zależnością wykładniczą

$$\frac{w_m}{W_m} = \left[(r_p - r)/\delta\right]^{1/n} \tag{20}$$



Rys. 2

Odpowiednie zależności mają postać:

przy piaście

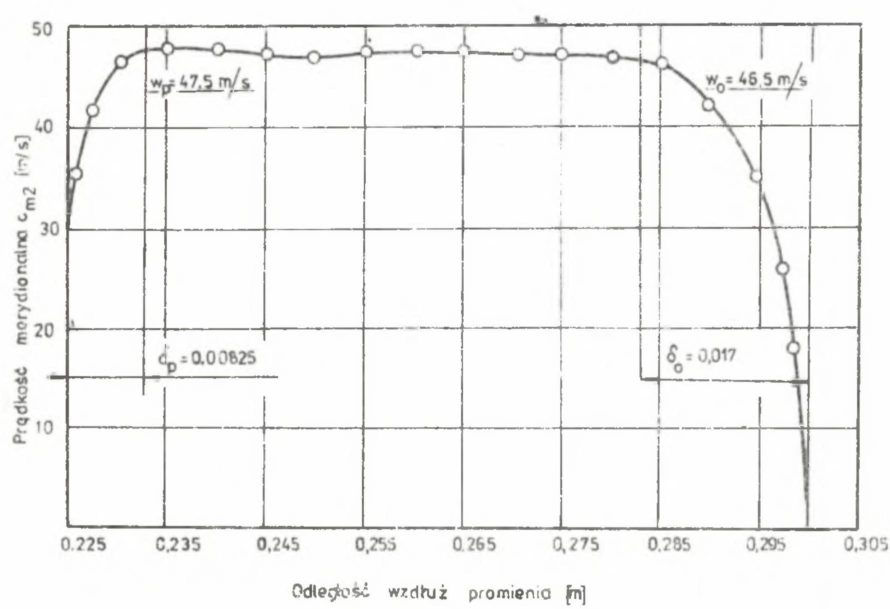
$$\delta \cdot r_p \cdot W_m = \int_{r_p}^{r_p+\delta} W_m \cdot r \cdot dr - \int_{r_p}^{r_p+\delta} w_m(r) \cdot r \cdot dr = W_m \left[\frac{(r_p+2)^2}{2} - \frac{r_p^2}{2} \right] -$$

$$- \frac{W_m \cdot r_p^2}{(\delta_p \cdot r_p)^{1/n}} \left[\frac{(\delta_p/r_p)^{2+1/n}}{2 + 1/n} + \frac{(\delta_p/r_p)^{1+1/n}}{1 + 1/n} \right] \tag{21}$$

przy osłonie zewnętrznej

$$\delta_o^* \cdot r_o \cdot W_m = \int_{r_o-\delta_o}^{r_o} W_m \cdot r \cdot dr - \int_{r_o-\delta_o}^{r_o} w_m \cdot r \cdot dr = W_m \left[\frac{r_o^2}{2} - \frac{(r_o-\delta_o)^2}{2} \right] -$$

$$- \frac{W_m \, r_o^2}{(\delta_o/r_o)^{1/n}} \left[\frac{(\delta_o/r_o)^{1+1/n}}{1 + 1/n} - \frac{(\delta_o/r_o)^{2+1/n}}{2 + 1/n} \right] \tag{22}$$



Rys. 3

Wykorzystując dane naniesione na rysunku 3, obliczono z równań (21) i (22) wartości miary liniowej zmniejszenia natężenia przepływu w przekroju wylotowym wieńca:

przy piaście: δ^{*}_{2p} = 0,000941 m przy n = 7,75,

przy osłonie zewnętrznej: $\delta^{*}_{2\sigma}$ = 0,00301 m,

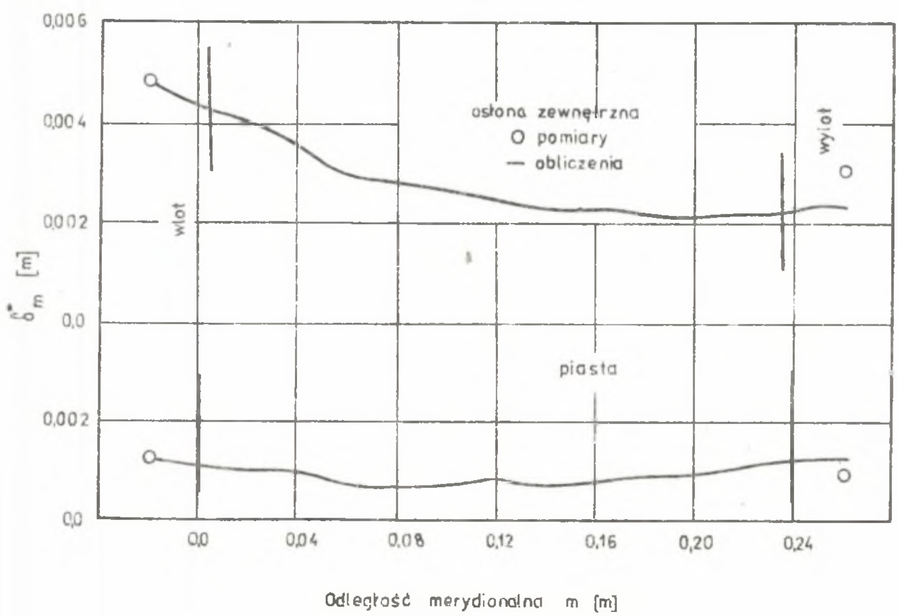
przy n = 4,5.

Wielkości te obliczono następnie wykorzystując jedynie równanie (27) przedstawione w postaci różnicowej i określone jedynie dla kierunku osiowego z uwagi na brak w chwili obecnej kompletu równań zamykających. Z tych samych względów przyjęto za Stratfordem [9], że siła łopatkowa ma wartość stałą w obszarze warstwy przyściennej. Dodatkowe równania stanowiły zależności określone przez Stratforda [9]: na wartość naprężeń stycznych przy opływie osiowo-symetrycznych ścianek ograniczających:

$$\tau_m = \tau_{\acute{s}r} \cos\beta = 0,086 \cdot \rho W_m^{9/5} \cdot (\sec\beta)^{4/5} \nu^{1/5} \cdot \delta_m^{**-1/5} \tag{23}$$

oraz na wartość parametru kształtu

$$H = 1,67 - 0,09 \log Re_{\delta^{**}} - 0.11 \frac{\delta^{*}}{W_m} \cdot \frac{dW_m}{dm} \cdot 10^3 + + 0,015 \cdot 10^3 \frac{\delta^{**}}{W_m} \cdot \frac{dW_m}{dm}. \tag{24}$$



Rys. 4

Początkowe parametry warstwy przyściennej $\delta_{1p}^{**} = 0.012$ oraz $\delta_{1c}^{*} = 0.0485$ wyznaczono z profilu prędkości określonego na wlocie do wieńca łopatkowego.

Obliczony rozkład grubości warstwy zmniejszenia natężenia przepływu wzdłuż piasty i osłony zewnętrznej przedstawiono na rysunku 4. Porównanie rysunków 2 i 4 potwierdza decydujący wpływ wartości i znaku gradientu prędkości na kształtowanie się warstwy przyściennej.

W obszarze występowania przepływu przyśpieszanego następuje zmniejszenie grubości warstwy granicznej. Przepływ opóźniony wywołuje natomiast intensywne narastanie warstwy granicznej. Przyspieszanemu charakterowi przepływu w rozpatrywanym wieńcu i wynikającej stąd małej grubości warstwy granicznej, szczególnie przy piaście, należy przypisać możliwość znacznie większego obciążenia aerodynamicznego wieńców z merydionalnym przyśpieszeniem strumienia niż wieńców osiowych typu reakcyjnego.

Na podkreślenie zasługuje dobra zgodność wyników obliczeń warstwy granicznej przy piaście z wynikami sondowania przepływu. Przy osłonie zewnętrznej różnice są znacznie większe, co należy tłumaczyć wpływem pomijanych w obecnych obliczeniach przepływów nadłopatkowych.

Zestawienie ważniejszych oznaczeń

c_f	- uśredniony współczynnik tarcia powierzchniowego
F	- siła łopatkowa
f	- elementarna siła łopatkowa na jednostkę powierzchni średniego przekroju strugi elementarnej
H	- parametr kształtu warstwy granicznej
I	- entalpia
m	- odległość merydionalna
p	- ciśnienie statyczne
r	- współrzędna promieniowa
$Re = \frac{W_o \delta^{**}}{\nu}$	- liczba Reynoldsa
S	- entropia
t/l	- gęstość łopatkowania
W	- prędkość strumienia głównego względem wieńca łopatkowego
w	- prędkość strumienia w obszarze warstwy granicznej względem wieńca łopatkowego
β	- kąt między kierunkiem prędkości a osią
δ^*	- miara liniowa zmniejszenia natężenia przepływu
δ^{**}, δ_f	- miara liniowa zmniejszenia siły łopatkowej
ϱ	- gęstość gazu
ϑ	- współrzędna kątowa
ν	- lepkość kinematyczna
τ	- naprężenia styczne od sił tarcia
ω	- prędkość kątowa

Wskaźniki

1 - początek przedziału

2 - koniec przedziału

(‾) - wielkości średnie

(~) - wielkości w obszarze warstwy granicznej

LITERATURA

[1] Gregory Smith D.G.: An Investigation of Annulus Wall Boundary Layers in Axial Flow Turbomachines, Trans. ASME, Journal of Engineering for Power, October 1970.

[2] Horlock J.H.: Annulus Wall Boundary Layers in Axial Compressor Stages, Trans. ASME, Journal of Basic Engineering, March, 1963.

[3] Witkowski A.: Flow Analysis in Axial Flow Compressor Impeller with Meridional Stream Acceleration. Proceedings of the Fourth Conference on Fluid Machinory. Budapest 1972.

[4] Witkowski A.: Zastosowanie quasi-ortogonalnych współrzędnych do obliczeń przepływu w wieńcach sprężających o przestrzennie ukształtowanych kanałach międzyłopatkowych ZN Pol. Śl. s. Energetyka z.47, Gliwice 1973.

[5] Mellor G.L., Wood G.M.: An Axial Compressor End Wall Boundary Layer Theory. Trans. ASME, Journal of Basic Engineering, June 1971.

[6] Bailly J.B., and Howard J.H.G.: Velocity Profile Development in Axial Flow Compressors, Journal of Mechanical Engineering Science. Vol. 4, June 1962.

[7] Schlichting H.: Grenzschichtteorie. Karlsruhe 1970.

[8] Witkowski A.: Przybliżone równania przepływu w obszarze warstwy przyściennej na osiowo-symetrycznych ściankach ograniczających łopatkowy wieniec sprężający. ZN Pol. Śl. s. Energetyka (w druku).

[9] Stratford B.S.: The Use of Boundary Layer Techniques to Calculate the Blockage From the Annulus Boundary Layers in a Compressor. ASME Paper No 67-WA/GT-1, New York, 1967.

КВАЗИРЕАЛЬНА МОДЕЛЬ ТЕЧЕНИЯ В ОСЕВОЙ КОМПРЕССОРНОЙ СТУПЕНИ

Р е з ю м е

Используя результаты собственных и других работ, получены уравнения для определения приближённого анализа течения в осевой компрессорной ступени с учётом реальных свойств газа. Принята модель, в которой последовательно рассмотрено квазитрёхразмерное течение без учёта влияния сил вязкости, а также течение в области пограничного слоя нарастающего на осесимметричных поверхностях, ограничивающих канал. Представлен упрощённый пример расчётов нарастания толщины пограничного слоя в модельном компрессорном колесе с меридиальным ускорением потока, что сопоставлено с результатами испытаний. Получено удовлетворительное совпадение результатов.

QUASI REAL FLOW IN AXIAL COMPRESSOR STAGE

S u m m a r y

Using the results of own and other authors' investigations the relationship for simplifying analysis of real flow in axial compressor stage have been developed. The flow hase been divided into two regimes;the main stream flow where the effects of viscosity are negligible so that the equations of quasithreedimensional motions for an inviscid fluid can be applied and the boundary layer flow along the annulus walls where viscous effeects ave important.
A simplifying example of calculating annulus boundary layers growth in an axial flow compressor rotor with meridional stream acceleration is presented and compared with experimental investigations. A good agreement has been obtained.