Seria: ENERGETYKA z. 67 Nr kol. 563

Bohdan MOCHNACKI
Instytut Mechaniki Teoretycznej

Krzysztof MAZUR
Instytut Matematyki

ZASTOSOWANIE METODY ELEMENTU SKOŃCZONEGO DO SYMULACJI PROCESU KRZEPNIĘCIA ODLEWU

Streszczenie. W pracy przedstawiono opis matematyczny procesu krzepnięcia oraz metodę numerycznego rozwiązania zadania przy wykorzystaniu metody elementu skończonego.

1. Wstęp

Metoda elementu skończonego zaliczana do grupy metod wariacyjnych przybliżonego rozwiązywania zagadnień brzegowych stanowi jeden z najbardziej efektywnych algorytmów wyznaczania reakcji układów ciągłych w zadaniach z dziedziny mechaniki. W ostatnim okresie pojawiły się próby zastosowania ww. metody dla wyznaczania stacjonarnych i niestacjonarnych pól temperatury w ciałach stałych.

Niniejsze opracowanie proponuje pewien sposób wykorzystania metody do obliczeń krzepnięcia i stygnięcia odlewu. Pracę wykonano w ramach realizacji zadania 20.04.04 Międzyresortowego Problemu Badań Podstawowych Nr 20.

2. Sformułowanie zadania

Niech $\Omega = \Omega^1(t) \vee \Omega^2(t) \vee \Omega^3(t)$ będzie niejednorodnym obszarem, w którym zachodzi proces krzepnięcia i stygnięcia stopu Fe-C (rys. 1).

W dowolnej chwili t w rozpatrywanym układzie można wyróżnić podobszar fazy ciekłej $\Omega^1(t)$, fazę przejściową $\Omega^2(t)$ oraz podobszar zakrzepłego metalu $\Omega^3(t)$. Niestacjonarne pole temperatury w ww. elementach układu Ω opisuje układ równań różniczkowych typu[x)]

$$c_i(U)\,\varrho_i(U)\,U'_t(X,t) = \nabla \cdot \lambda_i \nabla U(X,t) + \dot{q}_{vi}, \quad i=1,2,3, \tag{1}$$

---

x) W proponowanym opisie matematycznym pominięto konwekcyjny przepływ ciepła w ciekłej części układu, co odpowiada niewielkim przegrzaniom w procesie zalewania.

gdzie:

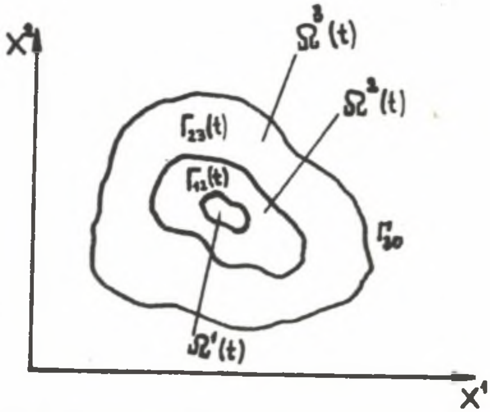
$c_i(U)$ - pojemność cieplna podobszaru $\Omega^i(t)$,

$\varrho_i(U)$ - gęstość masy,

$\lambda_i(U)$ - współczynnik przewodzenia ciepła,

$\dot{q}_{vi}$ - objętościowa wydajność wewnętrznych źródeł ciepła w $\Omega^i(t)$,

U,X,t - temperatura, współrzędna, czas.



Rys. 1. Geometria niejednorodnego obszaru odlewu

Niech

$$\dot{q}_{vi} = \varrho_i \, q_i \, S'_t(X,t), \tag{2}$$

gdzie:

$S(X,t)$ - jest funkcją związaną z materiałem podobszaru,

q_i - ciepło przemiany fazowej w $\Omega^i(t)$.

Funkcję $S(X,t)$ definiujemy jako [3, 4]:

$$S(X,t) = \begin{cases} 0 \; ; & U > U' \\ f(U); & U \in [U'', U'] \\ 1 \; ; & U < U'' \end{cases} \tag{3}$$

gdzie:

U', U'' - temperatura początku i końca krzepnięcia stopu Fe-C.

Zakładamy dodatkowo, że funkcja $S(X,t)$ jest ciągła w Ω, czyli $f(U) \in [0,1]$ $f(T') = 0$, $f(T'') = 1$. Tak określoną funkcję S można interpretować jako udział objętościowy ciała stałego w otoczeniu punktu $P(X) \in \Omega$

Ponieważ

$$S'_t = S'_U \, U'_t \tag{4}$$

więc równania (1) można zapisać w postaci

$$\varrho_i(U)\left[c_i(U) - q_i\ S'_U\right]U'_t = \nabla.\ \lambda_i\ \nabla U(X,t) \tag{5}$$

czyli

$$\varrho_i(U)\ C_i(U)\ U'_t = \nabla.\ \lambda_i\ \nabla U(X,t), \tag{6}$$

gdzie $C_i(U)$ jest zastępczą pojemnością cieplną podobszaru $\Omega^i(t)$. Oczywiście

$$C_1(U) = c_1(U); \quad C_3(U) = c_3(U); \quad C_2(U) = c_2(U) - q_2 f'(U) \tag{7}$$

Przyjmując

$$f(U) = \left[\frac{U' - U(X,t)}{U' - U''}\right]^{\beta}; \qquad \beta > 0 \tag{8}$$

można dla założonej wartości wykładnika β wyznaczyć zastępczą pojemność cieplną fazy przejściowej. Proponowane w pracach [5], [6] teorie dotyczące fazy przejściowej sprowadzają się do przyjęcia w (8) wykładnika $\beta = 1$ (liniowy rozkład wewnętrznych źródeł) lub $\beta \gg 1$ (krzepnięcie warstwowe).

Jak łatwo sprawdzić, całkowanie iloczynu $C_2\ \varrho_2$ w interwale $[U'', U']$ - bez względu na przyjętą hipotezę odnośnie β, prowadzi do poprawnych fizykalnie wyników - otrzymuje się bowiem zmianę entalpii roztworu w czasie krzepnięcia wynoszącą $\hat{C}_2\ \hat{\varrho}_2\ (U' - U'') + \hat{\varrho}_2\ q_2$, gdzie $\hat{C}_2$, $\hat{\varrho}_2$ są wartościami uśrednionymi w $[U'', U']$.

Wprowadzając funkcje

$$H(U) = \int_{U^*}^{U} C_i(\xi)\ \varrho_i(\xi)\ d\xi, \tag{9}$$

gdzie

$$C_i\ \varrho_i = \begin{cases} C_1\ \varrho_1 & U > U' \\ C_2\ \varrho_2 & U \in [U'', U'] \\ C_3\ \varrho_3 & U < U'' \end{cases} \tag{10}$$

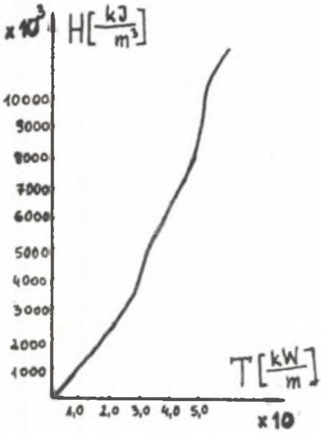
oraz

$$T(U) = \int_{U^*}^{U} \lambda_i(\xi)\ d\xi, \tag{11}$$

przy czym U^* jest umownie przyjętym poziomem odniesienia, dochodzi się do równania przewodnictwa obejmującego cały obszar odlewu w postaci

$$H'_t = \nabla^2\ T \tag{12}$$

Wobec silnej monotoniczności i ciągłości $H(U)$ oraz $T(U)$ można utworzyć funkcję $H = \emptyset(T)$ - rys. 2.



Rys. 2. Przebieg funkcji $H = H(T)$ dla stali 0,35%C

Ponieważ

$$H'_t = H'_T\, T'_t, \tag{13}$$

więc ostatecznie

$$\emptyset'_T\, T'_t = \nabla^2 T \tag{14}$$

Równanie (14) uzupełnione warunkami jednoznaczności było podstawą do stworzenia modelu numerycznego obliczeń krzepnięcia odlewów na bazie metody elementu skończonego. Sformułowanie warunków brzegowych i początkowych przy wykorzystaniu funkcji $T(U)$ przedstawiono m.in. w [3].

3. Minimalizacja funkcjonału

Dla przedstawionego wyżej zadania brzegowego, równoważne mu zadanie wariacyjne (bez wariacji czasu) polega na poszukiwaniu minimum funkcjonału

$$I(T) = \iiint\limits_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial T}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial x_3}\right)^2\right] + \emptyset(T)\, T'_t \right\} d\Omega + \frac{1}{2}\iint\limits_{\Gamma_{30}} T(T - 2T_{ot})\,\frac{\alpha}{\lambda_m}\, dS, \tag{15}$$

gdzie:

Γ_{30} - powierzchnia graniczna między odlewem a formą,

α - zastępczy współczynnik wnikania ciepła od powierzchni odlewu do formy i otoczenia,

λ_m - uśredniona wartość współczynnika przewodzenia w zakresie temperatur $(U_\Gamma)_{30}$ i U_{ot} [3],

$$T_{ot} = \int_{U^*}^{U_{ot}} \lambda(\xi)\, d\xi.$$

W szczególności dla $U^* = U_{ot}$ mamy $T_{ot} = 0$. Obszar Ω odlewu dzielimy na przestrzenne elementy objętości, przy czym do powierzchni brzegowych każdego z nich należy s punktów węzłowych. Funkcjonał $I(T)$ będziemy

przybliżać wykorzystując zbiór wartości funkcji T w węzłach podziału na elementy skończone.
Możemy zapisać

$$\frac{1}{2}\iiint\limits_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial T}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial T}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial T}{\partial x_3}\right)^2\right]d\Omega \sim \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}T_iT_k \tag{16}$$

oraz

$$\iiint\limits_{\Omega} \phi(T)T'_t\, d\Omega \sim \sum_{i,k=1}^{n} b_{ik}\frac{\partial T_i}{\partial t}H(T_k) \tag{17}$$

podobnie

$$\frac{1}{2}\frac{\alpha}{\lambda_m}\iint\limits_{\Gamma_{30}} T^2\, dS \sim \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} c_{ik}\, T_i\, T_k \tag{18}$$

W równaniu (18) założono dla prostoty stałą wartość $\frac{\alpha}{\lambda_m}$ w obszarze Ω, równocześnie przyjęto $U^* = U_{ot}$.
Należy więc wyznaczyć minimum dla:

$$I(T) = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n}(a_{ik}+c_{ik})T_iT_k + \sum_{i,k=1}^{n} b_{ik}\frac{\partial T_i}{\partial t}H(T_k) \tag{19}$$

Warunki konieczne istnienia ekstremum implikują minimalizujący układ równań w postaci

$$\sum_{i=1}^{l}(a_{ik}+c_{ik})T_i + \sum_{i=1}^{l} b_{ik}\,\phi'(T_i)\frac{\partial T_i}{\partial t} + \sum_{i=l+1}^{n}(a_{ik}+c_{ik})T_i = 0, \qquad k = 1,2,\ldots,l \tag{20}$$

gdzie:
- l - liczba węzłów, w których wartości T_i nie są znane,
- n - łączna liczba punktów węzłowych $(n \geqslant l)$. Oczywiście $n - l$ jest ilością węzłów z warunkiem I rodzaju.

W ostatnim równaniu $\phi'(T_i)$ oznacza wartości ϕ'_T odpowiadające wartości T_i, natomiast formalnie zapisana pochodna $\frac{\partial T_i}{\partial t}$ jest wielkością T'_t w i-tym węźle. Macierze sztywności zagadnienia $[a_{ik}]$, $[b_{ik}]$, $[c_{ik}]$ powstają przez sumowanie macierzy sztywności poszczególnych elementów.

4. Macierze sztywności

Rozpatrujemy dowolny s węzłowy element przestrzenny. Funkcję T w elemencie skończonym $\Delta\Omega^e$ wyrażamy przez kombinację wartości T_i w węzłach elementu

$$T(X) = \sum_{j=1}^{s} N_j(X) T_j, \tag{21}$$

gdzie $X = \{x^1, x^2, x^3\}$.

Z równania (21) wynika, że

$$\frac{\partial T}{\partial x^i} = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial N_j}{\partial x^i} T_j \tag{22}$$

Uwzględniając ostatnie równanie otrzymujemy dla elementów skończonych wewnątrz obszaru

$$\frac{1}{2}\iiint_{\Delta\Omega^e} \left[\left(\frac{\partial T}{\partial x^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial x^3}\right)^2\right] dx^1 dx^2 dx^3 \sim \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{s} a_{ik} T_i T_k, \tag{23}$$

gdzie

$$a_{ik} = \iiint_{\Delta\Omega^e} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x^1}\frac{\partial N_k}{\partial x^1} + \frac{\partial N_i}{\partial x^2}\frac{\partial N_k}{\partial x^2} + \frac{\partial N_i}{\partial x^3}\frac{\partial N_k}{\partial x^3}\right) dx^1 dx^2 dx^3 \tag{24}$$

Przyjmując hipotezę o aproksymacji funkcji $\varnothing(T)$ w każdym punkcie elementu poprzez jej wartości w węzłach mamy:

$$\varnothing(T) = \sum_{j=1}^{s} N_j(x^1, x^2, x^3)\, \varnothing(T_j). \tag{25}$$

Wobec (21) otrzymuje się (zapisując formalnie):

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \sum_{j=1}^{s} N_j \frac{\partial T_j}{\partial t} \tag{26}$$

Całkując (17) w obszarze elementu

$$\iiint\limits_{\Delta\Omega^e} \phi(T)\, \frac{\partial T}{\partial t}\, dx^1 dx^2 dx^3 \sim \sum_{i,k=1}^{n} b_{ik}\, H(T_k)\, \frac{\partial T_i}{\partial t}, \tag{26}$$

gdzie

$$b_{ik} = \iiint\limits_{\Delta\Omega^e} N_i\, N_k\, dx^1 dx^2 dx^3 \tag{27}$$

Macierz sztywności elementu brzegowego wyznacza się zapisując nieznaną funkcję T w dowolnym punkcie płata poprzez kombinację wartości tej funkcji w punktach węzłowych.

Niech do powierzchni płata należy r punktów węzłowych:

$$T(x^1, x^2, x^3) = \sum_{j=1}^{r} K_j(x^1, x^2, x^3)\, T_j \tag{28}$$

Dla całki (18) w obszarze danego elementu otrzymamy

$$\frac{1}{2}\,\frac{\alpha}{\lambda_m} \iint\limits_{\Delta\Gamma_{30}^e} T^2\, dS \sim \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{r} c_{ik} T_i T_k, \tag{29}$$

gdzie

$$c_{ik} = \frac{\alpha}{\lambda_m} \iint\limits_{\Delta\Gamma_{30}^e} K_i K_k\, dS. \tag{30}$$

Warunek brzegowy I rodzaju realizuje się poprzez wstawienie do układu (19) żądanych wartości T.

5. Rozwiązanie problemu krzepnięcia

Minimalizujący układ równań (19) można zapisać w postaci

$$[A]T + [B]\, \phi'(T)\, \frac{\partial T}{\partial t} + [C] = 0, \tag{31}$$

gdzie

$$T = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_l \end{bmatrix} \tag{32}$$

jest obszarem poszukiwanych wartości w węzłach. Równanie (31) określa szukaną funkcję w zadanym interwale czasu.

Rozwiązanie zadania otrzymuje się przy pomocy związków rekurencyjnych uzyskiwanych różnymi metodami, m.in. metodą różnic skończonych lub metodą GALERKINA. Dla pierwszej z nich, jeśli aproksymować pochodną T'_t iloczynem różnicowym rzędu I, otrzymuje się równanie

$$T^1 = \left\{ [A]\,\Delta t + [B]\ \phi'(T^0) \right\}^{-1} \left\{ [B] + \phi'(T^0)T^0 - [C]\Delta t \right\} \tag{33}$$

pozwalające wyznaczyć wartości T^1 w chwili $t + \Delta t$, jeśli tylko znane są wartości T^0 w chwili t. Równanie (33) oznacza, że w punktach węzłowych przyjmuje się w każdym kroku czasowym wartości współczynników termofizycznych odpowiadających wartości T^0, dzięki czemu układ pozostaje układem liniowym. Podobne postępowanie dla metody GALERKINA zakłada aproksymację

$$T = N_0 T^0 + N_1 T^1 \tag{34}$$

poprzez zależne tylko od czasu i ciągłe funkcje kształtu.

Pochodna względem czasu jest wtedy także aproksymowana przez iloraz różnicowy rzędu I. Wykorzystując metodę GALERKINA i całkując w przedziale $[0,\ \Delta t]$ otrzymujemy:

$$T^1 = \left\{ [A]\,\Delta t - 2[B]\ \phi'(T^0) \right\}^{-1} \left\{ [A]\,\Delta t - 2[B]\ \phi'(T^0) \right\} T^0 - \int_0^{\Delta t} \frac{t}{\Delta t}\,[C]\,dt. \tag{35}$$

6. Podsumowanie

Przedstawiony sposób modelowania niestacjonarnego pola temperatur w krzepnącym wlewku był podstawą do opracowania programu obliczeń dla symetrycznego wycinka wlewka kwadratowego z wycięciem kołowym wykonanego ze stali 0,35% C.

Uzyskane wyniki przedstawiono w [7]. Problem rozwiązano przy podziale obszaru na 24 elementy. Porównanie wyników z rozwiązaniem różnicowym w postaci jawnej (115 węzłów) wskazuje na dużą efektywność metody elementu skończonego do modelowania procesu krzepnięcia, w szczególności nawet dla kroku czasowego 60 s (przy interwale krytycznym dla schematu jawnego $\Delta t = 5$ s) uzyskano praktycznie takie same wyniki jak w metodzie różnic.

LITERATURA

[1] Mazur K.: Metoda elementu skończonego wyznaczania pola temperatur w ciałach stałych. Wybr. Zagadn. z Odlewn. z. 25, 1976.

[2] Mazur K.: Metoda elementu skończonego dla nieustalonego przepływu ciepła. Wybr. Zagadn. z Odlewn. z. 10, 1976.

[3] Mochnacki B., Ortyl B.: O pewnej metodzie rozwiązania wielowymiarowego problemu Stefana. Symp. "Modelowanie w mechanice", PTMTS Beskid Śl. marzec 1977.

[4] Mochnacki B., Grzymkowski R.: Modele numeryczne procesów odlewania ciągłego. III Konf. "Metody komputerowe w mechanice konstrukcji",Opole 1977.

[5] Jefimow V.A.: Razlivka i kristalizacja stali. Metałurgia, Moskva 1976.

[6] Viejnik A.I.: Pribliżennyj razĉet procesov tiepłoprovodnosti. Gosenergoizdat 1959.

[7] Podstawy procesów krystalizacji i odlewania ciągłego. Międzyresortowy Problem Badań Podstawowych Nr 20 zad. Nr 20.04.04 (2) 1977.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА КОНЕЧНОГО ЭЛЕМЕНТА
К ЧИСЛЕННОМУ МОДЕЛИРОВАНИЮ ПРОЦЕССА ЗАТВЕРДЕВАНИЯ ОТЛИВОК

Р е з ю м е

Представлено математическое описание процесса затвердевания стальной отливки и показан метод решения задач при помощи конечного элемента.

THE APPLIFICATION OF FINITE ELEMENT METHOD IN MODELLING
OF HEAT TRANSFER IN A STEEL CAST

S u m m a r y

The mathematical description and the numerical model (in the finite element base) of heat transfer in a steel cast are presented.