

Zdzisław WOŹNIAK

Instytut Techniki Ciepłej

ZASTOSOWANIE METODY MAŁEGO PARAMETRU  
DO ROZWIĄZANIA ZAGADNIENIA PRZEPŁYWU CIEPŁA  
W REGENERACYJNYM PODGRZEWACZU POWIETRZA

**Streszczenie.** W pracy wyznaczono rozkłady temperatur gazu i wypełnienia w regeneratorze przeciwprądowym. Do rozwiązania nieliniowych równań bilansu energii zastosowano metodę małego parametru. W rozważaniach przyjęto, że znana jest zależność współczynnika wnikania ciepła od temperatury gazu i temperatury wypełnienia  $\alpha = \alpha(t_g, t_o)$ . Analiza obejmuje pracę urządzenia w stanie pseudoustalonym oraz stany przejściowe w wyniku zmian parametrów wejściowych czynników.

Oznaczenia

- $\tau$  - czas s,
- $z$  - współrzędna liczona wzdłuż kierunku przepływu gazów m,
- $\rho$  - gęstość  $\text{kg/m}^3$ ,
- $c$  - właściwa pojemność cieplna  $\text{J}/(\text{kg K})$ ,
- $w$  - prędkość przepływu gazów m/s,
- $\alpha$  - współczynnik wnikania ciepła  $\text{W}/(\text{m}^2 \text{K})$ ,
- $F$  - powierzchnia wnikania ciepła  $\text{m}^2$ ,
- $A$  - przekrój poprzeczny kanału  $\text{m}^2$ ,
- $L$  - długość kanału m,
- $l_o = V/F$  - zastępcza grubość wypełnienia m,
- $t(z, \tau)$  - temperatura wypełnienia  $^{\circ}\text{C}$ ,
- $t_g(z, \tau)$  - temperatura gazu  $^{\circ}\text{C}$ ,
- $f = \tau/\tau_R$  - zredukowany czas,
- $Z = z/L$  - zredukowana współrzędna,
- $T = \frac{t - t_o}{t_{g_o} - t_o}$  - zredukowana temperatura wypełnienia,
- $\psi = \frac{t_g - t_o}{t_{g_o} - t_o}$  - zredukowana temperatura gazu,

$$B = \frac{\alpha_0 \tau_R}{l_0 \rho c}$$

$$S = \frac{F}{A} \frac{\alpha_0}{w \rho_g c_{pg}} - \text{ wielkości bezwymiarowe,}$$

Ponadto przyjęto jak w pracy [1] wielkości dotyczące fazy chłodzenia oznaczać symbolem \*).

## 1. Wstęp

Proces przepływu ciepła w regeneratorze jest zjawiskiem złożonym zarówno ze względu na nieliniowość równania przewodnictwa i asymetrię warunków przepływu ciepła w fazie grzania i chłodzenia regeneratora. W ramach niniejszej pracy przyjęto bezgradientowy rozkład temperatury wypełnienia w kierunku prostopadłym do przepływu gazów. Ponadto założono, że znana jest zależność współczynnika wnikania ciepła od temperatury gazów i temperatury wypełnienia  $\alpha = \alpha(\vartheta, T)$ . Zależność tę można opisać za pomocą wzoru:

$$\alpha = \alpha_0 [1 + \varepsilon \varphi(\vartheta, T)], \quad (1)$$

gdzie parametr  $\varepsilon$  jest mały w porównaniu z jednością. Postać wzoru (1) jest identyczna dla etapu grzania i chłodzenia. Zmianie ulegają jedynie stałe wchodzące w skład wzoru (1). Z wystarczającą dokładnością zależność współczynnika wnikania ciepła  $\alpha(\vartheta, T)$  można określić jako liniową funkcję temperatury gazu  $\vartheta$  i temperatury wypełnienia  $T$ :

$$\alpha = \alpha_0 (1 + \varepsilon_1 \vartheta + \varepsilon_2 T). \quad (2)$$

Wybierając parametr  $\varepsilon = \max(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$  wzór (2) można napisać w postaci:

$$\alpha = \alpha_0 \left[ 1 + \varepsilon \left( \vartheta + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} T \right) \right] \quad (3)$$

lub

$$\alpha = \alpha_0 \left[ 1 + \varepsilon \left( \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \vartheta + T \right) \right]$$

Pozostałe założenia:

- niewielka akumulacja masy i energii gazu,
- znikomo mały czas trwania przełączenia w porównaniu z długością fazy,
- temperatura gazu jest jednakowa w przekroju prostopadłym do kierunku jego przepływu,

- pominięcie przepływu ciepła w wypełnieniu wzdłuż kierunku przepływu gazów,
- stały strumień dmuchu,
- stałe temperatury dolotowe czynników.

## 2. Równania bilansów energii dla gazu i wypełnienia regeneratora

W celu ułożenia równań bilansowych energii wydzieleno element wypełnienia za pomocą dwu przekrojów prostopadłych do przepływu gazów. Przekroje te są od siebie odległe o elementarny odcinek  $dz$ . Pomiędzy gazem i wypełnieniem następuje przepływ ciepła. Rozpatrując zjawisko przepływu ciepła w czasie  $dt$ , równania bilansu energii dla gazu i wypełnienia można przedstawić w postaci:

$$dmc dt = \alpha dA(t_g - t) d\tau \quad (4a)$$

$$\dot{m}_g c_p t_g d\tau = \dot{m}_g c_p (t_g + dt_g) d\tau + \alpha dA(t_g - t) d\tau, \quad (4b)$$

gdzie

$$m = G F l_0.$$

Z powyższych zależności wynikają równania różniczkowe, które wraz z warunkami początkowymi i brzegowymi opisują rozkłady temperatur gazów i wypełnienia.

Początek układu współrzędnych przyjmuje się w punkcie wlotu spalin. W fazie grzania przepływ ciepła od gazu do wypełnienia opisany jest równaniami:

$$\frac{\partial T}{\partial f} = B(1 + \epsilon_1 v^* + \epsilon_2 T)(v^* - T) \quad (5a)$$

$$- \frac{\partial v^*}{\partial Z} = S(1 + \epsilon_1 v^* + \epsilon_2 T)(v^* - T) \quad (5b)$$

z warunkiem początkowym  $T(Z, 0) = \varphi(Z)$

i warunkiem brzegowym  $v^*(0, f) = 1$ .

Analogiczny układ równań obowiązuje dla fazy chłodzenia:

$$\frac{\partial T^*}{\partial f} = B^*(1 + \epsilon_1^* v^{* *} + \epsilon_2^* T^*)(v^{* *} - T^*) \quad (6a)$$

$$\frac{\partial v^{* *}}{\partial Z} = S^*(1 + \epsilon_1^* v^{* *} + \epsilon_2^* T^*)(v^{* *} - T^*) \quad (6b)$$

z warunkiem początkowym  $T^*(T, 0) = \varphi^*(Z)$

i warunkiem brzegowym  $\psi^{*k}(1, f) = 0$ .

W celu zredukowania liczby parametrów, wielkości występujące w równaniach wyrażono w postaci bezwymiarowej.

### 3. Wyznaczenie rozkładów temperatur gazów i wypełnienia w regeneratorze przeciwprądowym

Współczynniki  $\epsilon_1$  i  $\epsilon_1^*$  ( $i = 1, 2$ ) wchodzące w skład wzorów (3), są małe w porównaniu z jednością ( $\epsilon_1, \epsilon_1^* \ll 1$ ). Można więc dla rozwiązania równań (5) i (6) zastosować metodę małego parametru. W tym celu dokonuje się wyboru parametru  $\epsilon = \max(\epsilon_1, \epsilon_2)$  dla fazy grzania i  $\epsilon^* = \max(\epsilon_1^*, \epsilon_2^*)$  dla fazy chłodzenia.

Następnie przyjmuje się rozwiązania równań (5) i (6) w postaci rozwinięcia względem potęg parametru  $\epsilon$  i  $\epsilon^*$ :

- dla fazy grzania:

$$T(Z, f) = \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon^m T^m(Z, f), \quad (7)$$

$$\psi^*(Z, f) = \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon^m \psi^m(Z, f)$$

- oraz dla fazy chłodzenia:

$$T^*(Z, f) = \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon^{*m} T^{*m}(Z, f) \quad (8)$$

$$\psi^{*k}(Z, f) = \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon^{*m} \psi^{*k,m}(Z, f).$$

Równania opisujące kolejne wyrazy rozwinięcia  $T^m$ ,  $\psi^m$  oraz  $T^{*m}$  i  $\psi^{*k,m}$  otrzymuje się poprzez wstawienie wyrażeń (7) i (8) do równań (5) i (6) i porównanie wyrazów stojących przy jednakowych potęgach parametru  $\epsilon$  i  $\epsilon^*$

$$\frac{\partial T^m}{\partial f} = B(\psi^m - T^m) + B F^{m-1} \quad (9)$$

$$-\frac{\partial \psi^m}{\partial Z} = S(\psi^m - T^m) + S F^{m-1} \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

z warunkami początkowymi:

$$\tau^0(Z,0) = \varphi(Z), \quad \tau^m(Z,0) = 0 \quad m = 1,2,\dots$$

z warunkami brzegowymi:

$$\psi^0(0,f) = 1, \quad \psi^m(0,f) = 0 \quad m = 1,2,\dots$$

Dla fazy chłodzenia równania dla funkcji  $\tau^{*m}$  i  $\psi^{*m}$  przyjmują podobną postać:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau^{*m}}{\partial f} &= B^* (\psi^{*m} - \tau^{*m}) + B^* F^{*m-1} \\ \frac{\partial \psi^{*m}}{\partial Z} &= S^* (\psi^{*m} - \tau^{*m}) + S^* F^{*m-1} \quad m = 0,1,2,\dots \end{aligned} \quad (10)$$

z warunkami początkowymi:

$$\tau^{*0}(Z,0) = \varphi^*(Z), \quad \tau^{*m}(Z,0) = 0 \quad m = 1,2,\dots$$

oraz warunkami brzegowymi

$$\psi^{*m}(1,f) = 0 \quad m = 0,1,2,\dots$$

W równaniach (9) i (10) funkcje  $F^{-1}(Z,f)$  i  $F^{*-1}(Z,f)$  są tożsamościowo równe zeru.

Postać funkcji  $F^m(Z,f)$  i  $F^{*m}(Z,f)$  jest jednakowa dla obydwu faz:

$$F^m = \sum_{k=0}^m (\psi^{m-k} + \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \tau^{m-k}) (\psi^k - \tau^k) \quad m = 0,1,2,\dots \quad (11)$$

W fazie chłodzenia do wzoru (11) wstawia się funkcje  $\tau^{*m}(Z,f)$  i  $\psi^{*m}(Z,f)$ .

Pierwszy wyraz szeregu (7) i (8) - zwany przybliżeniem zerowym otrzymuje się w wyniku rozwiązania układu równań odpowiednio (5) lub (6) dla  $\epsilon = \epsilon^* = 0$ .

Najczęściej, ze względu na niewielką wartość parametrów  $\epsilon$  i  $\epsilon^*$ , obliczenia kończy się na pierwszym lub drugim przybliżeniu. W następnym etapie obliczeń wyznaczone zostaną funkcje opisujące kolejne wzory rozwinięcia (7) i (8). Rozwiązanie dla przybliżenia zerowego w fazie grzania re-generatora zakłada się w postaci szeregu:

$$T^0(z, f) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n^0(f) \frac{z^n}{n!} \quad (12)$$

$$\psi^0(z, f) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n^0(f) \frac{z^n}{n!}$$

Wstawiając wyrażenia (12) do równań (7) i porównując wyrazy stojące przy jednakowych potęgach zmiennej  $Z$ , otrzymuje się nieskończoną liczbę równań różniczkowych zwyczajnych:

$$\frac{dT_n^0}{df} = B(\psi_n^0 - T_n^0), \quad (13)$$

$$\psi_{n+1}^0 = S(T_n^0 - \psi_n^0), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

w których wartości początkowe dla funkcji  $T_n^0(f)$  wyznaczone są z rozwinięcia

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n^0(0) \frac{z^n}{n!}.$$

Funkcje  $T_n^0(f)$  i  $\psi_n^0(f)$  mają postać:

$$T_0(f) = 1 + e^{-Bf} T_0'(0), \quad \psi_0(f) = 1, \quad n = 0$$

$$T_n(f) = e^{-Bf} \left[ T_n(0) + \sum_{k=0}^{n-1} A_{n-k}(f) T_k(0) \right], \quad n > 0, \quad (14)$$

$$\psi_n(f) = e^{-Bf} \sum_{k=0}^{n-1} B_{n-k}(f) T_k(0), \quad n > 0,$$

gdzie dla skrócenia wprowadzono wielkości  $T_0'(0) = T_0(0) - 1$ .

Wartości współczynników funkcyjnych  $A_n(f)$  i  $B_n(f)$  określone są wzorami:

$$A_n(f) = S^n \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-k+1} \binom{n-1}{k} \frac{(Bf)^{k+1}}{(k+1)!}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (15)$$

$$B_n(f) = S^n \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-k+1} \binom{n-1}{k} \frac{(Bf)^k}{k!}, \quad n = 1, 2, \dots$$

W fazie chłodzenia warunek brzegowy dla temperatury powietrza  $\psi^*(Z, f)$  określony jest w punkcie  $Z = 1$ .

Utrudnia to poszukiwanie rozwiązania w postaci szeregu potęgowego. Wprowadzono więc w miejsce współrzędnych  $Z$  współrzędną  $1-Z$ . Rozwiązania równań opisujących rozkład temperatur gazów i wypełnienia (10) w pierwszym przybliżeniu otrzymuje się analogicznie jak w fazie grzania:

$$T_n^{*0}(f) = e^{-B^* f} \left[ T_n(0) + \sum_{k=0}^{n-1} A_{n-k}^*(f) T_k^*(0) \right], \quad n = 0, 1, 2, \dots, N,$$

$$\psi_0^{*0}(f) = 0, \quad (16)$$

$$\psi_n^{*0}(f) = e^{-B^* f} \sum_{k=0}^{n-1} B_{n-k}^*(f) T_k^*(0),$$

gdzie współczynniki  $A_n^*$  i  $B_n^*$  otrzymano wstawiając we wzorach (15) wartości  $S = S^*$  i  $B = B^*$ .

Wartości początkowe  $T_n(0)$  i  $T_n^*(0)$  wyznacza się z warunków przełączenia

$$T(Z, 1) = T^*(1 - Z, 0), \quad T(Z, 0) = T^*(1 - Z, 1), \quad (17)$$

skąd wyprowadza się wzajemne relacje pomiędzy stałymi w fazach grzania i chłodzenia regeneratora:

$$T_{N-k}^{0*}(0) = (-1)^{N-k} T_{N-k}^0(1) - \sum_{j=1}^k T_{N-k+k}^{0*}(0)/j! \quad (18)$$

$$T_n^0(0) = (-1)^n \sum_{k=n}^N T_k^{0*}(1)/(k-n)!$$

Dalsze postępowanie zmierzające do otrzymania następnego wyrażenia w ciągu kolejnych przybliżeń metody małego parametru, jest jednakowe dla obydwu faz.

Wynika to z formalnej identyczności równań różniczkowych i warunków brzegowych i początkowych, dla pierwszego i każdego następnego przybliżenia. Układy równań różnią się jedynie stałymi współczynnikami B, S i  $\xi$ .

Funkcje  $F^m(Z, f)$  dogodnie jest przedstawić w postaci szeregu potęgowego:

$$F^m(Z, f) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} c_{nk}^m (Bf)^k \right] Z^n \quad (19)$$

W celu wyznaczenia wartości współczynników  $c_{nk}^m$  należy także rozwinąć w szereg względem potęg zmiennej  $f$  funkcje  $T_n^m, \psi_n^m$  dla  $m = 0, 1, \dots, n-1$ :

$$T_n^m(f) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}^m (Bf)^k, \quad (20)$$

$$\psi_n^m(f) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{nk}^m (Bf)^k.$$

Wartości współczynników  $a_{nk}^m$  i  $b_{nk}^m$  wyznacza się podstawiając wyrażenia (19) i (20) do równań (9).

Wynikają stąd związki rekurencyjne:

$$a_{n-k+1}^m = (b_{n,k}^m - a_{n-k}^m + c_{n,k}^{m-1}) / (k+1) \quad (21)$$

$$b_{n+1,k}^m = S(a_{n,k}^m - b_{n,k}^m - c_{n,k}^{m-1}) / (n+1),$$

$$c_{k1}^m = \sum_{p=0}^m \sum_{q=0}^k \sum_{r=0}^1 (a_{k-q,1-r}^{m-p} + \frac{\xi_2}{\xi_1} b_{k-q,1-r}^{m-p}) (a_{qr}^p - b_{qr}^p), \quad \begin{matrix} k = 0, 1, 2, \dots \\ 1 = 0, 1, 2, \dots \end{matrix}$$

w których wartości początkowe poszukiwanych współczynników dla  $m = 0$  mają postać:

$$b_{0,0}^0 = 1, \quad a_{n,0}^0 = T_n^0(0), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

dla etapu grzania,

$$b_{0,k}^0 = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$



$$a_{n,0}^0 = T_{n,0}^{0*}(0), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_{k,0}^0 = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad \text{dla etapu chłodzenia.}$$

Z warunków początkowych dla funkcji  $T_n^m(\bar{r})$  i  $\bar{v}_n^m(f)$  wynika, że dla  $m > 0$   $a_{n,0}^m = 0$ ,  $b_{n,0}^m = 0$ .

Ostatecznie rozwiązania równań (9) dla  $m > 0$  spełniające zadane warunki początkowe i brzegowe mają postać szeregów potęgowych:

$$T^m(Z, f) = \sum_{n=0}^N Z^n \sum_{k=0}^K a_{n,k}^m (Bf)^k \quad (22)$$

$$\bar{v}^m(Z, f) = \sum_{n=0}^N Z^n \sum_{k=0}^K b_{n,k}^m (Bf)^k.$$

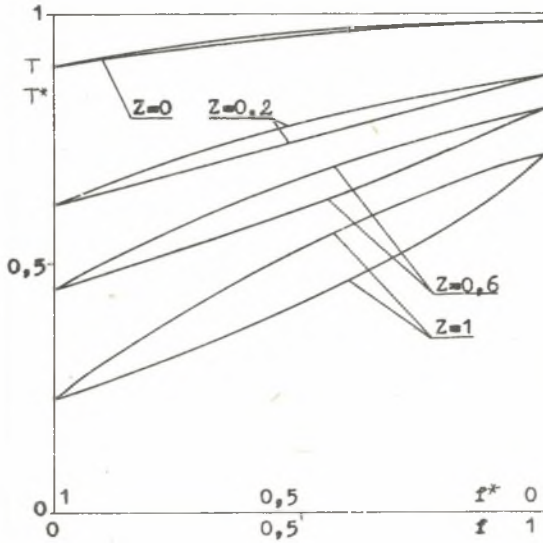
W celu otrzymania analogicznych rozwiązań dla fazy chłodzenia, wystarczy w powyższych wzorach zamienić wartości  $B$ ,  $S$ ,  $\epsilon_1$  i  $\epsilon_2$  na wartości  $B^*$ ,  $S^*$ ,  $\epsilon_1^*$ ,  $\epsilon_2^*$  oraz w miejsce współrzędnej  $Z$  wstawić współrzędną  $x = 1 - Z$ .

#### 4. Przykład liczbowy

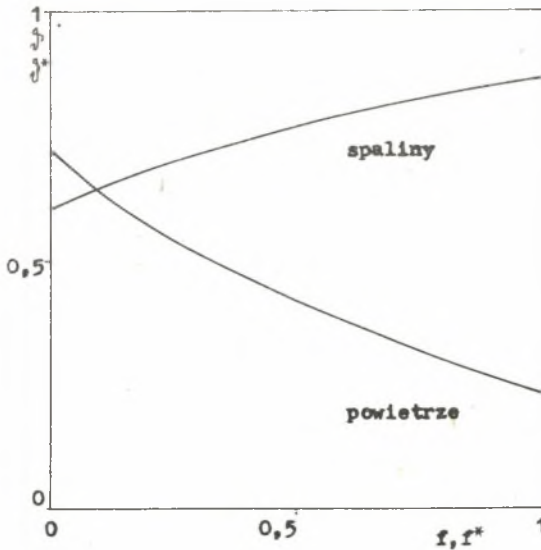
Do obliczeń przyjęto regenerators, w którym:

średnica kanału	$d_e = 0,02 \text{ m}$
długość kanału	$L = 1,5 \text{ m}$
grubość wypełnienia	$l_o = 0,01 \text{ m}$
strumień spalin	$\dot{m}_s = 0,001 \text{ kg/s}$
strumień powietrza	$\dot{m}_a = 0,0005 \text{ kg/s}$
temperatura początkowa	
spalin	$t_s = 600^\circ\text{C}$
powietrza	$t_a = 20^\circ\text{C}$
skład spalin	$(\text{CO}_2) = 0,13$
	$(\text{H}_2\text{O}) = 0,11$
	$(\text{N}_2) = 0,76$

Wartości współczynników wnikania ciepła  $\alpha$  i  $\alpha^*$  obliczono w oparciu o wzory podane w [5].



Rys. 1. Zredukowane temperatury wypełnienia w stanie pseudoustalonym regeneratora



Rys. 2. Zredukowane temperatury spalin i powietrza na wylocie w stanie pseudoustalonym regeneratora

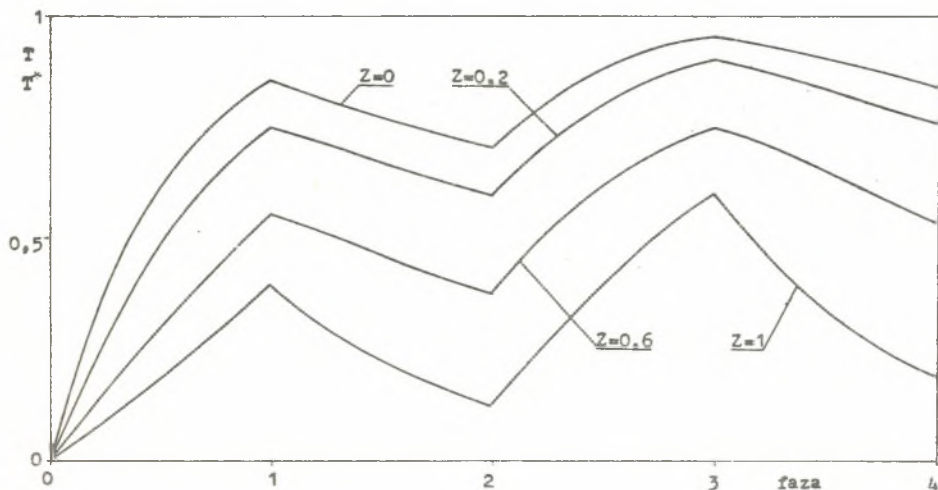
Funkcje  $\alpha(T, \vartheta)$  i  $\alpha^*(T^*, \vartheta^*)$  aproksymowano funkcjami liniowymi (2), w których współczynniki  $\varepsilon_1$  i  $\varepsilon_1^*$  ( $i = 1, 2$ ) dobrano tak, aby spełnione było kryterium minimum sumy kwadratów odchyłeń. Dla rozważanego regeneratora współczynniki  $B$ ,  $B^*$ ,  $S$  i  $S^*$  przyjmują wartości:

$$B = 1,95 (1 - 0,333\vartheta' - 0,143 T)$$

$$S = 1,93 (1 - 0,333\vartheta' - 0,143 T)$$

$$B^* = 1,13 (1 + 0,064\vartheta^{*'} + 0,126 T^*)$$

$$S^* = 4,09 (1 + 0,064\vartheta^{*'} + 0,126 T^*)$$



Rys. 3. Temperatury wypełnienia w stanie rozruchu regeneratora

#### LITERATURA

- [1] Bes T., Woźniak Z.: Temperatury gazów i wypełnienia w fazie rozruchu regeneratora przeciwprądowego. Referaty Sympozjum Wymiany Ciepła i Masy, PAN, Warszawa Jabłonna 1974.
- [2] Ames W.: Nonlinear partial differential equations. Academic Press New York 1965.
- [3] Szargut J.: Metody numeryczne w obliczeniach cieplnych pieców przemysłowych. Śląsk Katowice 1977.
- [4] Tomeczek J.: Pseudoustalony przepływ ciepła w przeciwprądowym regeneratorze ciepła. ZN Pol. Śl. Energetyka z. 41, Gliwice 1972.
- [5] Kostowski E. i in.: Zbiór zadań z przepływu ciepła. Skrypt Pol. Śl., 1973.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА МАЛОГО ПАРАМЕТРА К РЕШЕНИЯМ НЕЛИНЕЙНЫХ  
ЗАДАЧ ТЕПЛООБМЕНА В ПРОТИВОТОЧНОМ РЕГЕНЕРАТОРЕ ТЕПЛА

Р е з ю м е

В работе определены распределения температур газа и заполнения в противоточном регенераторе тепла. Для приближенного решения нелинейных уравнений баланса энергии применен метод малого параметра. Зависимость конвективного коэффициента теплообмена от температуры газа и заполнения принята в следующем виде:  $\alpha = \alpha_0(1 + \epsilon_1 \psi + \epsilon_2 T)$ ,  $\alpha_0$ ,  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$  - постоянные. Анализ касается работы устройства в псевдоустановившемся состоянии, а также переходных состояний в результате изменений параметров входных факторов.

APPLICATION OF THE PERTURBATION METHOD TO THE SOLUTION OF  
NON-LINEAR HEAT TRANSFER IN A COUNTER-FLOW HEAT REGENERATOR

S u m m a r y

The paper presents gas temperature distributions and filling in the heat regenerator. The perturbation method has been applied to solve non-linear energy balance equations. It has been assumed that the dependance of the  $\alpha$  coefficient is known from fluid temperature and that of the filling. Considerations comprise the regenerator work in a semi steady state as well as transitory conditions as resulting from input parameters changes.