ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 2000
Seria: AUTOMATYKA z. 132 Nr kol. 1477

Zdzisław DUDA

OPTYMALNY ROZDZIAŁ ZASOBÓW W DUŻYM SYSTEMIE PRZY „STATYSTYCZNYCH" OGRANICZENIACH NA STER[1]OWANIE*

Streszczenie. W pracy sformułowano i rozwiązano problem rozdziału zasobów w dużym systemie w warunkach losowych przy ograniczeniach na sterowanie i wielkość zasobów w magazynie. Sterowanie realizowane jest w strukturze dwupoziomowej z koordynatorem na poziomie wyższym i lokalnymi decydentami na poziomie niższym, dysponującymi zróżnicowaną informacją. Do koordynacji zastosowano ograniczenie typu izoperymetrycznego, umożliwiające częściową decentralizację sterowania i dekompozycję obliczeń.

OPTIMAL RESOURCE ALLOCATION IN THE LARGE-SCALE SYSTEM WITH SOFT CONSTRAINTS FOR CONTROL SIGNALS

Summary. A resource allocation problem in a large scale stochastic system under some constraints on a control and a value of resources in a storage reservoir is considered. A strategy is realized in a two-level hierarchical structure with a coordinator on an upper level and local controllers on a lower level, which have different information. An izoperymetric type of constraint is used for a coorination. Wwing to this a partially decentralization of control and decomposition of calculations are possible.

1. Wprowadzenie

Większość problemów sterowania wielkimi systemami rozwiązywana jest w strukturze hierarchicznej. Złożoność algorytmu zależy od przyjętej struktury informacyjnej oraz struktury sterowania. Zazwyczaj synteza algorytmu sterowania prowadzi do dekompozycji obliczeń i decentralizacji sterowania. Problemy związane z dekompozycją obliczeń omawiane są między innymi w [3,6,8,9,11]. Niezwykle istotną rolę odgrywa również dostępna informacja, od której zależą prawa sterowania. Znany jest fakt, że zadania z tzw. nieklasyczną strukturą informacyjną, w której poszczególni decydenci dysponują zróżnicowaną infor-

*Praca została częściowo wykonana w ramach Grantu Nr 8 T11A 006 14

macją pomiarową, mogą prowadzić do trudności w opracowaniu algorytmu sterowania [12,13]. Temu zagadnieniu poświęcone są również prace [1,2,10].

W pracy rozpatrywany jest problem rozdziału ograniczonych zasobów w dużym systemie w warunkach losowych, w którym decydenci dysponują zróżnicowaną informacją, na podstawie której podejmują oni decyzje o sterowaniu.

Zadanie realizowane jest w dwupoziomowej strukturze hierarchicznej, z koordynatorem na poziomie wyższym i lokalnymi decydentami na poziomie niższym.

Koordynator, dysponując informacją o parametrach statystycznych zapotrzebowań odbiorców oraz o dopływie zasobów do magazynu, a także uwzględniając zmodyfikowane postaci klasycznych ograniczeń na swoje decyzje oraz na poziom zasobów w magazynie, określa i przesyła na poziom niższy wytyczne dla lokalnych decydentów. Lokalny decydent, na podstawie informacji o zapotrzebowaniach swojego podsystemu oraz wytycznej koordynatora, podejmuje decyzje o przydziale zasobów swojemu podsystemowi.

Do koordynacji wprowadzone jest ograniczenie na sterowanie typu izoperymetrycznego [4], które umożliwia częściową decentralizację sterowania i dekompozycję obliczeń.

W niniejszej pracy proponowane są dwa sposoby wyznaczania wytycznych koordynatora.

W pierwszym wykorzystana jest idea sterowania w układzie otwartym ze sprzężeniem (OLF - open loop feedback control). Sformułowanie zadania jest najbliższe sformułowaniom przedstawionym w [4,5], gdzie rozważane są zagadnienia rozdziału zasobów w strukturze dwupoziomowej przy ograniczeniu na wartość średnią sterowania. Z postawionych tam problemów wynika, że czasami (w wyniku zwiększonych zapotrzebowań odbiorców) wartości zasobów przydzielonych przez lokalnych decydentów są większe niż te, które wynikają z wytycznych koordynatora. W związku z tym do realizacji sterowania niezbędna jest pewna pojemność rezerwowa w magazynie, której wielkość zależy od wariancji sterowania. Koordynator wyznacza wytyczne dla lokalnych decydentów poprzez minimalizację odpowiedniego wskaźnika jakości przy zmodyfikowanych ograniczeniach nierównościowych na wielkość zasobów w magazynie w sposób jawny zależnych od wielkości strefy rezerwowej. Dla niektórych rozkładów zmiennych losowych wielkość strefy rezerwowej może być wyznaczona na drodze analitycznej.

W drugim algorytmie wytyczne koordynatora mają postać liniową i realizowane są w układzie ze sprzężeniem zwrotnym, w którym współczynnik wzmocnienia wyznaczany jest na podstawie znajomości wariancji rozkładów zmiennych losowych w zadanym horyzoncie sterowania. Algorytm ten uwzględnia ograniczenia w postaci prawdopodobieństwa realizacji zmiennych sterujących oraz wielkości zasobów w magazynie w zadanych przedziałach. Przy tak sformułowanym problemie nie występuje konieczność wyznaczania

wielkości strefy rezerwowej, gdyż nie pojawia się ona w sposób jawny przy rozwiązywaniu zadania.

2. Opis systemu

Rozpatrzmy system składający się z magazynu zasobów zasilanego dopływem d_n oraz z M statycznych podsystemów (odbiorców zasobów) o zapotrzebowaniach z_n^i, $i = 1, 2, ..., M$, $n = 0, 1, ..., N$, gdzie N jest horyzontem sterowania.

Załóżmy, że wielkości z_n^i, d_n są zmiennymi losowymi o znanych funkcjach rozkładu prawdopodobieństwa.

W zasadzie, rozważania dotyczą przypadku, w którym w pewnych okresach występuje deficyt zasobów i wtedy zapotrzebowania odbiorców nie mogą być w pełni pokrywane. Powstają straty wynikające z niepełnego zaspokojenia potrzeb odbiorców, które należy minimalizować poprzez odpowiednie racjonowanie zasobów.

Przyjmijmy, że wskaźnik jakości wyrażający straty w systemie ma postać:

$$I = E \sum_{n=0}^{N} \sum_{i=1}^{M} (z_n^i - u_n^i)^2, \tag{1}$$

gdzie E jest symbolem wartości średniej, z_n^i jest zapotrzebowaniem, zaś u_n^i są przydzielonymi zasobami i-temu podsystemowi w okresie $(n, n+1)$.

Naszym zadaniem jest przydzielać zasoby u_n^i tak, aby minimalizować wskaźnik jakości (1) przy ograniczeniu

$$h_{min} \leq h_n + d_n - \sum_{i=1}^{M} u_n^i \leq h_{max}, \tag{2}$$

gdzie h_{min}, h_n, h_{max} oznaczają odpowiednio minimalną, aktualną w chwili n oraz maksymalną ilość zasobów w magazynie.

3. Sformułowanie problemu

Złożoność algorytmu sterowania zależy od struktury informacyjnej oraz od przyjętej struktury układu sterowania.

Załóżmy, że decyzje o rozdziale zasobów podejmowane są w dwupoziomowej strukturze hierarchicznej z koordynatorem na poziomie wyższym i lokalnymi decydentami na poziomie niższym.

Koordynator dysponuje informacją o średnich zapotrzebowaniach odbiorców $\bar{z}_n^i$, $i = 1, 2, ..., M$ oraz informacją o wielkości zasobów w magazynie i o dopływie. Na tej podstawie dokonuje on wstępnego przydziału zasobów e_n wszystkim podsystemom, natomiast informację o tym w postaci wytycznej λ_n przesyła lokalnym decydentom.

Lokalny decydent dysponuje informacją o zapotrzebowaniu z_n^i oraz wartością wytycznej λ_n i na tej podstawie określa on przydział zasobów u_n^i swojemu odbiorcy.

Rozpatrywana dwupoziomowa struktura systemu sterowania jest uzasadniona wtedy, gdy system jest duży (duża liczba podsystemów) i przesyłanie do jednego centralnego decydenta informacji o zapotrzebowaniach wszystkich podsystemów jest trudne do zrealizowania.

W proponowanej strukturze dwupoziomowej na poziom wyższy nie przesyła się na bieżąco żadnej informacji, a koordynator podaje lokalnym decydentom jedynie wytyczne (wartości zmiennych koordynujących).

Za równanie koordynacji przyjmujemy ograniczenie w postaci:

$$E\sum_{i=1}^{M} u_n^i = e_n, \tag{3}$$

gdzie wielkość e_n zwana jest zmienną zagregowaną i reprezentuje ona wstępny przydział zasobów dokonany przez koordynatora w chwili n na okres $(n, n+1)$.
Zauważmy, że ograniczenie (3) daje pewną swobodę w podejmowaniu decyzji lokalnym decydentom, dzięki czemu mogą oni wykorzystać swoją bardziej szczegółową informację o zapotrzebowaniach.

Z przyjętej struktury informacyjnej i struktury układu sterowania wynika więc, że dopuszczalne prawa sterowania i–tego lokalnego decydenta mają postać: $u_n^i = a_n^i(z_n^i, \lambda_n)$, zaś wytyczne koordynatora: $\lambda_n = b_n(e_n, \bar{z}_n^1, ..., \bar{z}_n^M)$.

Naszym zadaniem jest wyznaczenie praw sterowania lokalnych decydentów i koordynatora, dla których wskaźnik jakości (1) przyjmuje minimalną wartość przy ograniczeniu (3) i zmodyfikownej postaci ograniczenia (2).

Ze względu na przyjętą strukturę układu sterowania ograniczenie (2) nie może być brane pod uwagę przez koordynatora w prezentowanej postaci, gdyż zarówno dopływ d_n, jak i sterowania u_n^i są dla niego wielkościami losowymi.

W dalszej części pracy zostaną rozpatrzone dwie modyfikacje ograniczenia (2).

Pierwsza będzie polegać na zastąpieniu (2) ograniczeniem:

$$h_{min} + \Delta h_n \leq \hat{h}_n + \hat{d}_n - e_n \leq h_{max}, \quad e_n \geq 0, \tag{4}$$

gdzie Δh_n jest pojemnością rezerwową w magazynie wykorzystywaną w sytuacji, gdy wartość przydzielonych zasobów $\sum_{i=1}^{M} u_n^i$ jest większa od wstępnego przydziału e_n dokonanego przez koordynatora, zaś $\hat{h}_n$ i $\hat{d}_n$ są ocenami odpowiednio wielkości zasobów w magazynie i dopływu dokonanymi przez koordynatora w chwili n na podstawie dostępnej informacji.

Zostanie też rozwiązane zadanie, w którym zamiast (2) będą uwzględnione ograniczenia:

$$prob(e_{min} \leq e_n \leq e_{max}) \geq 2\alpha - 1, \quad \alpha \in (0.5, 1) \tag{5}$$

$$prob(h_{min} \leq h_n \leq h_{max}) \geq 2\beta - 1, \quad \beta \in (0.5, 1), \tag{6}$$

gdzie α, β są z góry zadanymi prawdopodobieństwami.

4. Synteza praw sterowania lokalnych decydentów

Z przyjętej struktury układu sterowania i struktury informacyjnej wynika, że postać lokalnych praw sterowania $u_n^{io} = a_n^{io}(z_n^i, \lambda_n)$ można otrzymać z minimalizacji wskaźnika:

$$I = E\sum_{i=1}^{M}(z_n^i - u_n^i)^2 \tag{7}$$

przy ograniczeniu (3).

Po zastosowaniu metody mnożników Lagrange'a zadanie to można sprowadzić do niezależnych lokalnych problemów optymalizacji [4] w postaci:

$$L_n^i = E\min_{u_n^i} E_{|z_n^i,\lambda_n}[(u_n^i - z_n^i)^2 + 2\lambda_n u_n^i], \tag{8}$$

gdzie $E_{|z_n^i,\lambda_n}$ oznacza operację uśredniania warunkowego przy znajomości z_n^i, λ_n, zaś λ_n jest mnożnikiem Lagrange'a.

Po zróżniczkowaniu występującego w (8) wyrażenia w [.] względem u_n^i i przyrównaniu pochodnej do zera otrzymamy:

$$u_n^i = z_n^i + \lambda_n \tag{9}$$

Wartości $\lambda_n, n = 0, 1, ..., N$ wyznaczane są przez koordynatora i przesyłane lokalnym decydentom, którzy znając dodatkowo zapotrzebowania z_n^i swoich podsystemów wyznaczają z (9) ostateczne przydziały zasobów u_n^i.

Zauważmy, że dla $\lambda_n = 0$ zapotrzebowania odbiorców mogą być w pełni zaspokojone.

5. Synteza wytycznych koordynatora

Zadaniem koordynatora w chwili n jest wyznaczenie wytycznej λ_n i przesłanie jej lokalnym decydentom.

Po wprowadzeniu (9) do ograniczenia (3) wyznaczymy λ_n w postaci

$$\lambda_n = \frac{1}{M}(e_n - \bar{z}_n), \tag{10}$$

gdzie $\bar{z}_n = \sum_{i=1}^{M} Ez_n^i = \sum_{i=1}^{M} \bar{z}_n^i$.

Po wprowadzeniu (9) do (1) i wykorzystaniu (10) wskaźnik jakości dla całego systemu przyjmie postać:

$$I = \frac{1}{M}E\sum_{n=0}^{N}(e_n - \bar{z}_n)^2. \tag{11}$$

Zadaniem koordynatora w chwili n jest więc minimalizacja wskaźnika (11) względem e_n przy zmodyfikowanym ograniczeniu (2) oraz wyznaczenie wartości λ_n z (10) i przesłanie jej wszystkim podsystemom.

Zauważmy, że dla $e_n = \sum_{i=1}^{M} \bar{z}_n^i = \bar{z}_n$ wytyczna koordynatora $\lambda_n = 0$, co prowadzi do pełnego zaspokojenia potrzeb odbiorców.

5.1. Algorytm wyznaczania wytycznych koordynatora przy ograniczeniu (4)

Jedną z możliwych modyfikacji ograniczenia (2) jest zastąpienie go ograniczeniem (4).

Z postaci lokalnego prawa sterowania wynika, że:

$$\sum_{i=1}^{M} u_n^i = e_n + \sum_{i=1}^{M} (z_n^i - \bar{z}_n^i). \tag{12}$$

Zatem czasami (w wyniku zwiększonych zapotrzebowań odbiorców) może się zdarzyć, że wartości zasobów przydzielonych przez lokalnych decydentow są większe niż te, które wynikają z wytycznych koordynatora, tzn.:

$$\sum_{i=1}^{M} u_n^i > e_n \tag{13}$$

Do realizacji optymalnego lokalnego prawa sterowania potrzebna jest więc pewna pojemność rezerwowa oznaczona w (4) przez Δh_n.

Niech u_n^* oznacza minimalną wielkość zasobów, dla której prawdopodobieństwo, że $\sum_{i=1}^{M} u_n^i \leq u_n^*$ przy zadanym e_n jest równe β, tzn.:

$$P(\sum_{i=1}^{M} u_n^i \leq u_n^* | e_n) = \beta. \tag{14}$$

Wykorzystując (12) możemy (14) zapisać w postaci:

$$P[\sum_{i=1}^{M} (z_n^i - \bar{z}_n^i) \leq u_n^* - e_n | e_n] = \beta. \tag{15}$$

Z (15) wynika, że:

$$\Delta h_n = F_{z_n}^{-1}(\beta) - \sum_{i=1}^{M} \bar{z}_n^i, \tag{16}$$

gdzie $\Delta h_n = u_n^* - e_n$, zaś $F_{z_n}^{-1}(\beta)$ jest wartością funkcji odwrotnej do dystrybuanty zmiennej losowej $z_n = \sum_{i=1}^{M} z_n^i$ dla założonego β.

Jeśli założyć, że zmienna losowa z_n^i ma rozkład normalny $N(\bar{z}_n^i, \sigma_n^{i2})$, to zmienna losowa z_n ma też rozkład normalny o parametrach $N(\sum_{i=1}^{M} \bar{z}_n^i, \sum_{i=1}^{M} \sigma_n^{i2})$. Korzystając np. z Matlaba (toolbox Stats), można łatwo znaleźć $F_{z_n}^{-1}(\beta)$ dla zadanego β.

Można też, po standaryzacji zmiennej losowej $\sum_{i=1}^{M}(z_n^i - \bar{z}_n^i)$, skorzystać z tablic unormowanego rozkładu normalnego.

Po standaryzacji zmiennej losowej $\sum_{i=1}^{M}(z_n^i - \bar{z}_n^i)$ możemy (15) zapisać w postaci:

$$P(\gamma_n \leq \frac{\Delta u_n}{\sqrt{\sum_{i=1}^{M}\sigma_n^{i2}}}) = \beta, \tag{17}$$

gdzie γ_n jest zmienną losową o rozkładzie normalnym o parametrach $N(0,1)$.

Zatem

$$\Delta h_n = \sqrt{\sum_{i=1}^{M}\sigma_n^{i2}F_{\gamma_n}^{-1}(\beta)}. \tag{18}$$

Jako przykład rozpatrzmy system składający się z M odbiorców, których zapotrzebowania są zmiennymi losowymi o rozkładzie normalnym o parametrach $N(3,1)$. W tabeli 1 zamieszczone są wartości Δh dla różnych M i β.

Zauważmy, że ze wzrostem liczby podsystemów dla zadanego β maleje stosunek $\frac{\Delta h}{\sum_{i=1}^{M}\bar{z}_n^i}$, co jest związane z coraz lepszym uśrednianiem zapotrzebowań odbiorców.

Zadanie wyznaczania przez koordynatora zmiennych e_n, $n = 0,1,...,N$ minimalizujących wskaźnik jakości (11) przy ograniczeniu (4) jest zadaniem dynamicznym. Jego rozwiązanie zależy od przyjętej przez koordynatora struktury sterowania. Realne wydaje się przyjęcie idei sterowania w układzie otwartym ze sprzężeniem (OLF) z przesuwnym horyzontem N'.

Zgodnie z tą ideą, w chwili n koordynator określa zmienne zagregowane $e_n = e_{n|n}$, wynikające z minimalizacji wskaźnika:

$$I_n^* = \min_{e^*_{n+N'|n}} \sum_{k=n}^{n+N'} (e_{k|n} - \bar{z}_k)^2, \tag{19}$$

gdzie $e^*_{n+N'|n} = \{e_{k|n}\}$, $k = n, n+1, ..., n+N'$, przy ograniczeniach:

$$h_{min} + \Delta h_{n+j-1} \leq \hat{h}_{n+j|n}, \quad j = 1,2,...,N'+1 \tag{20}$$

$$e_{n+j|n} \geq 0, \quad j = 0,1,...,N', \tag{21}$$

gdzie $\hat{h}_{n+j|n}$ jest oceną wielkości zasobów w magazynie w chwili $n+j$ dokonaną przez koordynatora na podstawie informacji dostępnej w chwili n.

Ocena ta może być wyznaczona z równania:

$$\hat{h}_{n+j|n} = \hat{h}_{n|n} + \sum_{k=n}^{n+j-1}\hat{d}_{k|n} - \sum_{k=n}^{n+j-1} e_{k|n}, \tag{22}$$

gdzie $\hat{h}_{n|n}$ oraz $\hat{d}_{k|n}$ są odpowiednio ocenami wielkości zasobów w chwili n oraz dopływu w okresie $(k, k+1)$, dokonanymi przez koordynatora w chwili n.

Tabela 1

Wpływ liczby podsystemów M i prawdopodobieństwa β na wielkość strefy rezerwowej

	β	Δh	$\frac{\Delta h}{\bar{z}}$
$M = 10$	0.98	6.5	0.22
$\bar{z} = \sum_{i=1}^{M} \bar{z}_n^i = 30$	0.90	4.05	0.13
	0.85	3.30	0.11
	0.80	2.65	0.09
$M = 50$	0.98	14.52	0.09
$\bar{z} = \sum_{i=1}^{M} \bar{z}_n^i = 150$	0.90	9.06	0.06
	0.85	7.33	0.05
	0.80	5.95	0.04
$M = 500$	0.98	45.90	0.03
$\bar{z} = \sum_{i=1}^{M} \bar{z}_n^i = 1500$	0.90	28.65	0.02
	0.85	23.10	0.01
	0.80	18.80	0.01

Wielkość $\hat{h}_{n+j|n}$ zależy między innymi od oceny pojemności zasobów $\hat{h}_{n|n}$ oraz od prognozy dopływu $\hat{d}_{j|n}$, $j = 0, 1, ..., N'$. Metody wyznaczania ocen zmiennych losowych znane są w literaturze [7] i nie będą w niniejszej pracy omawiane.

Obliczenia numeryczne przeprowadzane są na poziomie wyższym w trakcie realizacji algorytmu rozdziału zasobów w chwilach $n = 0, 1, ..., N$. Zauważmy, że jest to problem optymalizacji statycznej przy ograniczeniach nierównościowych na zmienne decyzyjne o wymiarowości zależnej od przesuwnego horyzontu N'.

5.2. Algorytm wyznaczania wytycznych koordynatora przy ograniczeniach (5), (6)

W p.5.1. został przedstawiony algorytm rozdziału zasobów, w którym koordynator określa wartości zmiennych zagregowanych e_n, $n = 0, 1, ..., N$, wykorzystując ideę sterowania w układzie OLF. Algorytm ten wymaga określenia strefy rezerwowej Δh_n oraz wyznaczenia dobrych prognoz dopływu.

W niniejszym punkcie zostanie przedstawiony algorytm wyznaczania wytycznych koordynatora minimalizujących (11) przy ograniczeniach (5) i (6). Zakładamy w nim, że e_n

ma postać:

$$e_n = \bar{e}_n + G(h_n - \bar{h}_n), \tag{23}$$

gdzie $\bar{e}_n, \bar{h}_n$ są wartościami średnimi zmiennych losowych odpowiednio e_n, h_n, zaś h_n opisane jest zależnością:

$$h_{n+1} = h_n + d_n - \sum_{i=1}^{M} u_n^i. \tag{24}$$

Wykorzystując (12) możemy (24) zapisać w postaci:

$$h_{n+1} = h_n + d_n^* - e_n, \tag{25}$$

gdzie $d_n^* = d_n - \sum_{i=1}^{M}(z_n^i - \bar{z}_n^i)$.

W dalszych rozważaniach będziemy zakładać, że zmienne losowe d_n^* oraz h_0 mają rozkłady normalne o parametrach odpowiednio $N(\bar{d}_n^*, \sigma_{d_n^*})$, $N(\bar{h}_0, \sigma_{h_0})$.

Wstawiając (23) do (11) otrzymamy:

$$I = \frac{1}{M} E \sum_{n=0}^{N} [(\bar{e}_n - \bar{z}_n)^2 + G^2(h_n - \bar{h}_n)^2]. \tag{26}$$

Po uśrednieniu (25) i odjęciu stronami otrzymamy:

$$\tilde{h}_{n+1} = (1 - G)\tilde{h}_n + d_n^* - \bar{d}_n^*, \tag{27}$$

gdzie $\tilde{h}_{n+1} = h_{n+1} - \bar{h}_{n+1}$.

Ponieważ proces stochastyczny $\tilde{h}_n$, $n = 0, 1, \ldots$ nie zależy od $\bar{e}_n$, więc zadanie koordynatora polega na minimalizacji wskaźnika:

$$I^* = E \sum_{n=0}^{N} (\bar{e}_n - \bar{z}_n)^2 \tag{28}$$

względem $\bar{e}_n$ przy ograniczeniu

$$\bar{h}_{n+1} = \bar{h}_n + \bar{d}_n - \bar{e}_n. \tag{29}$$

Dodatkowe ograniczenia na $\bar{e}_n$ wynikają z (5) oraz (6) i będą rozpatrzone w dalszej części pracy.

5.2.1. Analiza ograniczeń (5) i (6)

Zapiszmy ograniczenie (5) w postaci:

$$prob(e_{min} - \bar{e}_n \leq \tilde{e}_n \leq e_{max} - \bar{e}_n) \geq 2\alpha - 1, \tag{30}$$

gdzie $\bar{e}_n = e_n - \bar{e}_n$. Z równania (23) wynika, że

$$\bar{e}_n = e_n - \bar{e}_n = G\bar{h}_n. \tag{31}$$

Przy przyjętych założeniach zmienna losowa $\bar{e}_n$ ma rozkład normalny o parametrach $N(0, \sigma_{\bar{e}_n})$, gdzie $\sigma^2_{\bar{e}_n} = G^2 E\bar{h}_n^2 = G^2\sigma^2_{\bar{h}_n}$.

Warunkami wystarczającymi do spełnienia (30) są nierówności:

$$prob(\bar{e}_n \leq e_{max} - \bar{e}_n) \geq \alpha, \tag{32}$$

$$prob(\bar{e}_n \leq e_{min} - \bar{e}_n) \leq 1 - \alpha. \tag{33}$$

Powyższe nierówności można też zapisać w postaci:

$$F_{\bar{e}_n}(e_{max} - \bar{e}_n) \geq \alpha, \tag{34}$$

$$F_{\bar{e}_n}(e_{min} - \bar{e}_n) \leq 1 - \alpha, \tag{35}$$

gdzie $F_{\bar{e}_n}$ oznacza dystrybuantę zmiennej losowej $\bar{e}_n$.

Z (34) wynika, że:

$$\bar{e}_n \leq e_{max} - F^{-1}_{\bar{e}_n}(\alpha). \tag{36}$$

Korzystając z własności rozkładu normalnego o zerowej wartości średniej ($F(z) = 1 - F(-z)$) możemy (35) zapisać, podobnie jak (34), w postaci:

$$\bar{e}_n \geq e_{min} + F^{-1}_{\bar{e}_n}(\alpha) \tag{37}$$

Z ograniczenia (5) wynika więc ograniczenie na $\bar{e}_n$ w postaci:

$$e_{min} + F^{-1}_{\bar{e}_n}(\alpha) \leq \bar{e}_n \leq e_{max} - F_{\bar{e}_n}(\alpha) \tag{38}$$

Analizując podobnie ograniczenie (6) dochodzimy do zależności:

$$h_{min} + F^{-1}_{\bar{h}_n}(\beta) \leq \bar{h}_n \leq h_{max} - F^{-1}_{\bar{h}_n}(\beta) \tag{39}$$

W przypadku gdy zachodzi:

$$F^{-1}_{\bar{e}_n}(\alpha) > \frac{e_{max} - e_{min}}{2} = \frac{\Delta e}{2} \tag{40}$$

lub

$$F^{-1}_{\bar{h}_n}(\beta) > \frac{h_{max} - h_{min}}{2} = \frac{\Delta h}{2} \tag{41}$$

to ograniczenie (38) lub (39) będzie sprzeczne.

Zależności (40), (41) można też zapisać w postaci:

$$\alpha > F_{\tilde{e}_n}(\frac{\Delta e}{2}), \tag{42}$$

$$\beta > F_{\tilde{h}_n}(\frac{\Delta h}{2}). \tag{43}$$

Reasumując, przy spełnieniu (42) lub (43) postawione zadanie minimalizacji (28) nie będzie miało rozwiązania ze względu na sprzeczność ograniczenia (38) lub (39).

Przypomnijmy, że zmienne losowe $\tilde{h}_n$ oraz $\tilde{e}_n$ mają rozkłady normalne o parametrach, odpowiednio $N(0, \sigma_{\tilde{h}_n})$, $N(0, G\sigma_{\tilde{e}_n})$. Zatem przebiegi dystrybuant $F_{\tilde{e}_n}(.)$ oraz $F_{\tilde{h}_n}(.)$ występujących w (42) i(43) zależą od wariancji zmiennej losowej $\tilde{h}_n$.

Z (27) wynika, że:

$$\sigma^2_{\tilde{h}_{n+1}} = (1-G)^2\sigma^2_{\tilde{h}_n} + \sigma^2_{\tilde{d}^*_n}, \tag{44}$$

gdzie $\sigma^2_{\tilde{d}^*_n} = E(d^*_n - \bar{d}^*_n)^2$.

Niech dla zadanego G i dla pewnego $n = n^*$ wariancja $\sigma^2_{\tilde{h}_{n^*}}$ osiąga wartość maksymalną. Ponieważ $\sigma^2_{\tilde{e}_n} = G^2\sigma^2_{\tilde{h}_n}$, więc wariancja zmiennej losowej $\tilde{e}_{n^*}$ przyjmuje również wartość maksymalną. Zatem dla $n = n^*$ dystrybuanty $F_{\tilde{h}_{n^*}}(\frac{\Delta h}{2})$ oraz $F_{\tilde{e}_{n^*}}(\frac{\Delta e}{2})$ osiągają wartości minimalne. Wartości te zależą od wybranego G.

Aby ograniczenia (38) , (39) nie były sprzeczne, wartości prawdopodobieństw α i β przyjęte w sformułowaniu problemu powinny spełniać warunki:

$$\alpha \leq F_{\tilde{e}_{n^*}}(\frac{\Delta e}{2}) \tag{45}$$

$$\beta \leq F_{\tilde{h}_{n^*}}(\frac{\Delta h}{2}) \tag{46}$$

Aby zapewnić możliwość spełnienia ograniczeń (5) i (6) z możliwie dużymi prawdopodobieństwami α i β, należy tak dobrać G występujące w (23), aby maksymalizować wyrażenie:

$$max_G\,(F_{\tilde{e}_{n^*}} + F_{\tilde{h}_{n^*}}) \tag{47}$$

Zauważmy, że w przypadku gdy $\sigma^2_{\tilde{d}^*_n} = const$ oraz $\sigma^2_{\tilde{h}_0} = 0$, wariancje $\sigma^2_{\tilde{h}_n}$ oraz $\sigma^2_{\tilde{e}_n}$ osiągają wartości maksymalne dla $n = N$, co wynika z (44). Zadanie poszukiwania G sprowadza się więc do maksymalizacji według G wyrażenia $(F_{\tilde{e}_N} + F_{\tilde{h}_N})$, które można rozwiązać numerycznie.

Jako przykład rozpatrzmy system składający się z M odbiorców, których zapotrzebowania są zmiennymi losowymi o rozkładzie normalnym o parametrach $N(1,3)$. Załóżmy, że $e_{min} = 0$, $e_{max} = \sum_{i=1}^{M} \bar{z}^i_n$, $h_{min} = 0$, $h_{max} = 2\sum_{i=1}^{M} \bar{z}^i_n$.

Tabela 2

Wartość współczynnika wzmocnienia G dla zadanych M, N i σ_{d_n}

M	N	$\sigma^2_{d_n}$	G
10	2	0	0.415
50	2	0	0
500	2	0	0
10	3	0	0.480
50	3	0	0
500	3	0	0
10	2	10	0.485
50	2	50	0
500	2	500	0
10	3	10	0.485
50	3	50	0
500	3	500	0

Wartości współczynnika G dla zadanych wartości M, N i $\sigma^2_{d_n} = E(d_n - \bar{d}_n)^2$ zawarte są w tab. 2.

Z tabeli 2 widać, że dla dużej liczby podsystemów wytyczne koordynatora wyznaczane są w układzie otwartym. W ogólnym przypadku zależy to od "stopnia" niepewności występującej w układzie.

Z obliczeń numerycznych wynika, że dla danych z tabeli 2 można w ograniczeniach (5) i (6) za α i β przyjmować wartości dowolnie bliskie jedności.

W tabelach 3 i 4 przedstawiono dopuszczalne zmiany $\bar{e}_n$ i $\bar{h}_n$ występujące w (38) i (39) odpowiednio dla $M = 50, N = 2, \sigma^2_{d_n} = 0, G = 0$ i dla $M = 50, N = 2, \sigma^2_{d_n} = 50, G = 0$ w zależności od przyjętych wartości α i β.

Zauważmy, że dla $G = 0$ wartość wariancji $\sigma^2_{\bar{h}_n}$ rośnie ze wzrostem n, natomiast wariancja $\sigma^2_{\bar{e}_n} = 0$. W konsekwencji dopuszczalny zakres zmiennej $\bar{e}_n$ pozostaje bez zmian i wynosi $e_{min} \leq \bar{e}_n \leq e_{max}$, natomiast przedział dopuszczalnych zmian zmiennej $\bar{h}_n$ zawęża się ze wzrostem n.

Tabela 3

Dopuszczalne zmiany $\bar{e}_n$ i $\bar{h}_n$ dla $M = 50$, $N = 2$, $\sigma^2_{d_n} = 0$. $G = 0$ i wybranych α oraz β

α	β	*Zakres zmian* $\bar{e}_n$	*Zakres zmian* h_n
0.98	0.98	$0 \le \bar{e}_0 \le 150$ $0 \le \bar{e}_1 \le 150$ $0 \le \bar{e}_2 \le 150$	$14.5 \le h_1 \le 285$ $20.5 \le \bar{h}_2 \le 279$
0.90	0.90	$0 \le \bar{e}_0 \le 150$ $0 \le \bar{e}_1 \le 150$ $0 \le \bar{e}_2 \le 150$	$9.06 \le h_1 \le 291$ $12.8 \le \bar{h}_2 \le 287$

Tabela 4

Dopuszczalne zmiany $\bar{e}_n$ i $\bar{h}_n$ dla $M = 50$, $N = 2$, $\sigma^2_{d_n} = 50$, $G = 0$ i wybranych α oraz β

α	β	*Zakres zmian* $\bar{e}_n$	*Zakres zmian* h_n
0.98	0.98	$0 \le \bar{e}_0 \le 150$ $0 \le \bar{e}_1 \le 150$ $0 \le \bar{e}_2 \le 150$	$20.53 \le h_1 \le 279.5$ $29.04 \le \bar{h}_2 \le 271.2$
0.90	0.90	$0 \le \bar{e}_0 \le 150$ $0 \le \bar{e}_1 \le 150$ $0 \le \bar{e}_2 \le 150$	$12.8 \le h_1 \le 287.1$ $18.1 \le \bar{h}_2 \le 281.9$

6. Uwagi końcowe

W pracy sformułowano problem rozdziału zasobów w dużym systemie i dokonano syntezy algorytmu sterowania w strukturze dwupoziomowej. Rozważania przeprowadzona przy założeniu że decydenci dysponują zróżnicowaną informacją, na podstawie której podejmują oni decyzje.

Dla założonej struktury sterowania i struktury informacyjnej możliwa jest częściowa dekompozycja obliczeń i decentralizacja sterowania. Optymalne prawa sterowania lokalnych decydentów i częściowo koordynatora mają postać analityczną.

Opracowano dwa algorytmy numerycznego wyznaczania przez koordynatora wartości zmiennej zagregowanej, od której zależą wytyczne przekazywane lokalnym decydentom. Wybór strategii zależy od wyników badań symulacyjnych dla konkretnego systemu.

LITERATURA

1. Aoki M.: On decentralized linear stochastic control problems with quadratic cost. IEEE Trans. Aut. Control, Ac-18, 1973, 243-250.
2. Chong C.Y., Athans M.: On the stochastic control of linear systems with different information sets. IEEE Trans. Aut. Control, AC-16, 1971, 423-430.
3. Findeisen W.: Wielopoziomowe układy sterowania, PWN, Warszawa 1974.
4. Gessing R., Duda Z.: Price co-ordination for a resource allocation problem in a large-scale system. Int. J. Systems Sci., 26, no. 11, 1995, 2245-2253.
5. Gessing R., Duda Z.: Optymalne reguły decyzyjne rozdziału zasobów w strukturze dwupoziomowej. W monografii Komitetu Gosp. Wodnej PAN pt. Sterowanie w systemach wodnych, 7, 1995, 133-151.
6. Lasdon L.S.: Optimization Theory for Large Systems. MacMilan, NY, 1970.
7. Meditch: Estymacja i sterowanie statystycznie optymalne w układach liniowych, PWN, Warszawa 1975.
8. Mesarovic M.D., Macko D., Takahara Y.: Theory of Hierarchical, Multilevel Systems. Academic Press, NY, 1970.
9. Pearson J.D.: Dynamic decomposition techniques in Optimization Methods for Large-Scale Systems. McGraw-Hill, NY, 1971.

10. Sandell N.R., Athans M.: Solutions of some non-clasiccal stochastic decision problems. IEEE Trans. Aut. Control, AC-19, 1974, 109-116.
11. Wismer D.A.: Optimization Methods for Large Scale Systems with Applications, Mc-Graw-Hill, NY, 1971.
12. Witsenhausen H.S.: A counterexample in stochastic optimum control. SIAM J. Control, 6, 1968, 131-147.
13. Witsenhausen H.S.: Separation pf estimation and control for discrete-time systems. Proc. IEEE, 9, 1971, 1557-1566.

Recenzent: Prof.dr hab. Józef Korbicz

Wpłynęło do Redakcji 10 grudnia 1998 r.

Abstract

In the paper there is discussed a problem of the resource allocation in a large scale system, in the presence of the resource shortages. The control task is devided into two levels, with the coordinator on the upper level and local controllers on the lower one.

It is assumed that they dispose different information. The coordinator has an information on mean values of users demands, an inflow forecast and an estimation of the resource amount in a storage reservoir. On the basis on this information it determines (by a numerical way) values of a coordinating variable transmitted to the local controllers. The *i*th local controller receives the measurement of the *i*th user demand and the value of the coordinating variable from the coordinator. On the basis on this information it calculates the decision on the resource allocation.

For a coordination an izoperymetric constraint is proposed. Due to this, the lower level optimization problem consists in independent local tasks which depend on the coordinating variable.

In the paper two strategies of the coordinator are proposed. The first algorithm is based on the open-loop feedback strategy, while the second one take into account probabilistic constraints on the aggregate variable and on the amount of the resource in a storage reservoir.