ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 2000
Seria: AUTOMATYKA z. 132 Nr kol. 1477

Ryszard GESSING

OPIS I PROJEKTOWANIE ZAMKNIĘTYCH UKŁADÓW DYNAMICZNYCH Z REGULATORAMI DYSKRETNYMI

Streszczenie. Na początku pracy zwraca się uwagę na trudności w stosowaniu metod bazujących na transformacji $\mathcal{Z}$ do opisu układów dyskretnych przy dużych częstotliwościach próbkowania. Proponuje się metodę projektowania regulatorów dyskretnych przy wykorzystaniu metod czasu ciągłego. Stosuje się w niej proste modele ciągłe układu dyskretnego. Zaprojektowany przy użyciu tych modeli regulator ciągły jest następnie przybliżany regulatorem dyskretnym. Pokazano możliwość zastosowania metody do projektowania wielowymiarowych układów dyskretnych z oddzielnymi regulatorami poszczególnych pętli regulacji i z różnymi częstotliwościami próbkowania. Zauważono, że dla tych ostatnich układów nie istnieje opis za pomocą transmitancji dyskretnej, co utrudnia ich projektowanie przy wykorzystaniu modeli dyskretnych. Zaproponowano także oryginalną metodę projektowania ciągłych układów wielowymiarowych. Metody zilustrowano przykładami. [1]

DESCRIPTION AND DESIGN OF CLOSE-LOOP DYNAMIC SYSTEM WITH DISCRETE-TIME REGULATORS

Summary. At the begining, it is noticed that for high sampling frequencies there arise difficultics in description of discrete-time systems by means of the models based on $\mathcal{Z}$ transform. Next, the method of design of discrete-time regulator based on continuous-time methods is proposed. The simple continuous-time models are used in it. The continiuous - time regulator designed with using these models is then approximated by means of a discrete- time regulator. It is shown that it is possible to apply the method for designing multivariable discrete-time systems with separate regulators of particular

[1] Artykuł zawiera podsumowanie wyników otrzymanych w pracach finansowanych częściowo przez Komitet Badań Naukowych.

loops having different sampling frequencies. It is noticed, that for the latter systems does not exist the transfer function description which creates a difficulty in their design. An original method of design of continuous-time multivariable systems is also proposed. The methods are illustrated with examples.

1. Wprowadzenie

Ostatnio coraz częściej w układach automatyki wykorzystuje się regulatory zrealizowane na mikroprocesorach, przy czym zazwyczaj stosuje się duże częstotliwości próbkowania. Wiadomo, że wtedy układy takie zbliżają się swoimi własnościami do układów ciągłych. Tym niemniej regulator zrealizowany na mikroprocesorze pozostaje jednak regulatorem dyskretnym i musi to być brane pod uwagę przy projektowaniu algorytmu sterowania. Aktualne więc pozostaje pytanie, jakie metody stosować do opisu i projektowania takich układów?

W literaturze zwraca się uwagę na trudności związane z zastosowaniem opisu bazującego na transformacji $\mathcal{Z}$ do takich układów. Przyczyna tych trudności jest wyeksponowana również na początku niniejszej pracy. W związku z tym zostały rozwinięte inne transformacje, takie jak np. transformacja δ [7]. Wzrasta również zainteresowanie stosowaniem metod czasu ciągłego do opisu układów dyskretnych. Ale propozycje takie jak w pracach [8, 5] nie wydają się być trafione ze względu na stopień ich skomplikowania.

W niniejszej pracy proponuje się oryginalną i prostą metodę projektowania regulatorów dyskretnych za pomocą metod czasu ciągłego. Istotą metody jest zastosowanie modelu ciągłego uwzględniającego próbkowanie i podtrzymywanie realizowane przez ekstrapolator zerowego rzędu. Regulator dyskretny otrzymuje się z odpowiedniego przybliżenia regulatora ciągłego zaprojektowanego za pomocą jednej z metod czasu ciągłego.

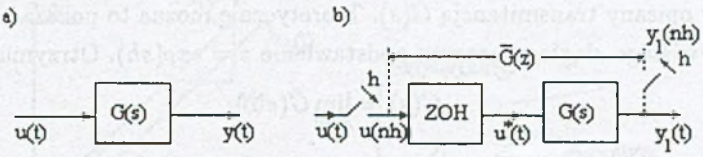
Zauważa się także, że układy wielowymiarowe dyskretne z różnymi częstotliwościami próbkowania w różnych pętlach nie dają się opisać za pomocą macierzowej transmitancji dyskretnej, co stwarza istotne trudności w ich projektowaniu. W związku z tym wskazuje się na możliwość odpowiedniego stosowania proponowanej metody do ich projektowania. Uzupełnieniem tych rozważań jest zaproponowana również oryginalna metoda projektowania układów wielowymiarowych ciągłych.

Niniejsza praca wynikła z mojego "powrotu" do problematyki układów dyskretnych i ponownego zajęcia się nią kilka lat temu. Było to spowodowane powszechnym ostatnio stosowaniem regulatorów zrealizowanych na mikroprocesorach. Należy jednak zauważyć, że na otrzymane tutaj wyniki i poglądy bardzo duży wpływ miało doświadczenie zdobyte podczas wykonywania przeze mnie pracy doktorskiej w pierwszej połowie lat sześćdziesiątych. Burzliwe dyskusje na seminariach, prowadzonych przez Prof. S. Węgrzyna w ówczesnej Katedrze Teorii Regulacji, na Wydziale Elektrycznym Politechniki Śląskiej, miały olbrzymi wpływ na kształtowanie się młodych pracowników nauki. Dzisiaj z perspektywy czasu potrafię to chyba właściwie ocenić.

2. Przypadek małych okresów próbkowania

Rozważmy układ dyskretny złożony z szeregowo połączonych elementów: próbkującego, ekstrapolatora zerowego rzędu EO i obiektu ciągłego G. (rys. 1b). Załóżmy, że obiekt posiada transmitancję wymierną o postaci

$$G(s) = \frac{C(s)}{D(s)}, \tag{1}$$



Rys.1. a) Układ ciągły; b) układ dyskretny
Fig.1. a) Continuous-time system; b) discrete-time system

gdzie $C(s)$ i $D(s)$ są wielomianami odpowiednio stopnia m i n, przy czym $m < n$. Rozpatrywany układ dyskretny można opisać za pomocą transmitancji dyskretnej określonej przez wzór

$$\bar{G}(z) = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}^h[y(kh)], \tag{2}$$

gdzie $k = 0, 1, 2, ...$ jest czasem dyskretnym, $\mathcal{Z}^h$ oznacza transformację $\mathcal{Z}$ o okresie próbkowania h, $y_1(t)$ oznacza odpowiedź skokową obiektu ciągłego G, h jest okresem próbkowania oraz $(1 - z^{-1})$ jest odwrotnością transformaty $\mathcal{Z}$ dyskretnego skoku jednostkowego. Niechaj s_j i z_j, $j = 1, 2, ..., n$ są biegunami odpowiednio transmitancji $G(s)$ i $\bar{G}(z)$. Mamy wtedy

$$z_j = e^{s_j h}, \; j = 1, 2, ..., n \tag{3}$$

Warto zauważyć, że za pomocą podstawienia $t = kh$ zmieniamy skalę czasu od czasu rzeczywistego t z jednostką "1" do czasu dyskretnego k z jednostką "h". W związku z tym położenie biegunów z_i transmitancji $\bar{G}(z)$ nie odpowiada przebiegom czasu rzeczywistego. Można zauważyć, że te ostanie przebiegi są związane z pierwiastkami

$$z_j^* = z_j^{1/h} = e^{s_j}, \; j = 1, 2, ..., n \tag{4}$$

w przypadku czasu dyskretnego oraz z pierwiastkami s_j, $j = 1, 2, ..., n$, w przypadku czasu ciągłego.

Przypadek graniczny, gdy h dąży do zera, należy traktować ostrożnie. Wtedy, po pierwsze, wszystkie bieguny z_j dążą do granicy równej 1, co oznacza, że ta granica nie zawiera

żadnej informacji o przebiegach sygnału wyjściowego. Po drugie, jeżeli traktujemy z jako zmienną zespoloną niezależną od h i różną od 1, wtedy

$$\lim_{h \to 0} \bar{G}(z) = 0. \tag{5}$$

Przypadek $z \neq 1$ odpowiada stanom nieustalonym dla skończonych wartości czasu dyskretnego k. Granica (5) wynika stąd, że w rozważanym przypadku $y_1(kh) \to 0$ dla $h \to 0$, ponieważ $y_1(0) = 0$. Granica (5) nie ma żadnego znaczenia praktycznego i wynika stąd, że użyty został czas dyskretny k z jednostką "h" zdążającą do zera. Z drugiej strony praktycy wiedzą, że gdy $h \to 0$, wtedy omawiany układ dyskretny zachowuje się tak jak układ ciągły opisany transmitancją $G(s)$. Teoretycznie można to pokazać powracając do czasu rzeczywistego ciągłego poprzez podstawienie $z = exp(sh)$. Otrzymujemy wtedy

$$G(s) = \lim_{h \to 0} \bar{G}(e^{sh}). \tag{6}$$

Własność (6) wynika także z nieco zapomnianej obecnie własności transmitancji dyskretnej dla układu z impulsatorem idealnym, wyprowadzonej w [4].

Z własności (5) wynika, że stosowanie transmitancji dyskretnej $\bar{G}(z)$ do opisu układów przy małym h może prowadzić do znacznych trudności. Rzeczywiście z pracy [2] wynika, że do zapisu współczynników wielomianów transmitancji $\bar{G}(z)$ potrzebne są wtedy słowa cyfrowe o bardzo dużej długości. Na przykład, do zapisu tych współczynników dla układu, w którym $G(s) = 40.48/(s+1)(s+2s+40.48)$ i $h = 0.01$, zapewniającego dokładność parametru wzmocnienia na poziomie 1% potrzeba 8 pozycji liczby dziesiętnej, a przy stosowaniu 5 pozycji model jest całkowicie nieadekwatny. Przy $h = 0.001$ potrzeba już 11 pozycji, a przy 8 model całkowicie upada. Z [2] wynika, że na potrzebną ilość pozycji liczby dziesiętnej istotny wpływ ma wielkość $n(-logh)$. Stawia to pod znakiem zapytania możliwość stosowania transmitancji $\bar{G}(z)$ do opisu i projektowania układów dyskretnych przy małych h, szczególnie dla obiektów wyższego rzędu.

3. Modele przybliżone

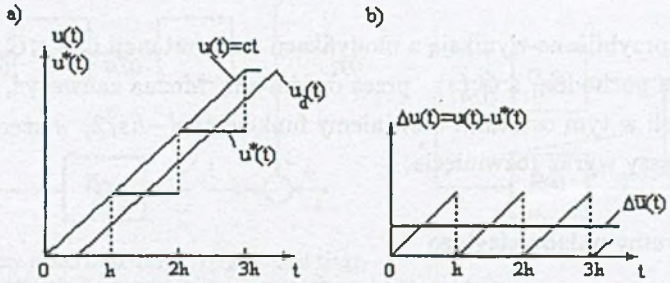
Jednym ze sposobów ominięcia opisanych w poprzednim rozdziale trudności jest stosowanie opisu i projektowania metodami czasu ciągłego. W tym celu będziemy stosować dwa typy modeli przybliżonych: model ciągły układu dyskretnego i model dyskretny układu ciągłego. Pierwszy model pozwala wykorzystywać metody projektowania czasu ciągłego, a drugi pozwala przejść z otrzymanej tymi metodami wersji ciągłej regulatora na wersję dyskretną realizowaną za pomocą mikroprocesora.

3.1. Model ciągły układu dyskretnego

Rozważmy dwa układy, pierwszy jest obiektem ciągłym opisanym za pomocą transmitancji $G(s)$ (Rys. 1a) i drugi złożony z elementu próbkującego o okresie h, ekstra-

polatora zerowego rzędu EO i obiektu ciągłego $G(s)$ (rys. 1b). O transmitancji $G(s)$ zakładamy tylko to, że $G(j\omega) \to 0$ gdy $\omega \to \infty$. Drugi układ można opisać za pomocą transmitancji dyskretnej $\bar{G}(z)$.

Porównajmy odpowiedzi obu układów na sygnał wejściowy $u(t) = ct$, c = const. Niech $u^*(t)$ oznacza wyjście ekstrapolatora EO i niech $\Delta u(t) = u(t) - u^*(t)$. Wykresy sygnałów $u(t)$, $u^*(t)$ i $\Delta u(t)$ są pokazane na rys. 2 a i b. Różnicę $\Delta u(t)$ można przedstawić w postaci następującego szeregu Fouriera



Rys.2. a) Sygnały wejściowe; b) różnica sygnałów
Fig.2. a) Inputs; b) inputs difference

$$\Delta u(t) = c\frac{h}{2} - \frac{h}{\pi}\left(sin\frac{2\pi}{h}t + \frac{1}{2}sin\frac{4\pi}{h}t + ...\right) \tag{7}$$

Jeżeli h jest dostatecznie małe, wtedy $|G(j\frac{2\pi}{h}l)|$, $l = 1, 2, ...$ są małe i składowe harmoniczne występujące w (7) są tłumione po przejściu przez G. Oznaczając przez $\Delta\bar{u}(t)$ wartość średnią za okres h przebiegu $\Delta u(t)$ oraz uwzględniając to, że $c = \dot{u}(t)$, otrzymujemy z (7)

$$\Delta\bar{u}(t) = \frac{h}{2}c = \frac{h}{2}\dot{u}(t). \tag{8}$$

Można zauważyć, że odpowiedź układu $G(s)$ na sygnał (8) dla małego h określa w przybliżeniu sygnał $\Delta y(t) = y(t) - y_1(t)$. Wprowadzając oznaczenia $\Delta\bar{U}(s) = \mathcal{L}[\Delta\bar{u}(t)]$, $U(s) = \mathcal{L}[u(t)]$, $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)]$, $Y_1(s) = \mathcal{L}[y_1(t)]$, $\Delta Y(s) = Y(s) - Y_1(s)$, gdzie $\mathcal{L}$ oznacza symbol transformacji Laplace'a, otrzymujemy:

$$\Delta Y(s) \approx \Delta\bar{Y}(s) = G(s)\Delta\bar{U}(s) = G(s)\frac{h}{2}sU(s) = \frac{h}{2}sY(s), \tag{9}$$

$$Y_1(s) \approx G_d(s)U(s), \quad G_d(s) = (1 - \frac{h}{2}s)G(s). \tag{10}$$

Przybliżone zależności (9) i (10) są tym dokładniejsze, im bardziej są tłumione przez G składowe sinusoidalne szeregu (7). Zauważmy, że zależności te obowiązują nie tylko dla $u(t) = ct$, ale także dla dowolnych $u(t)$, dla których zmiana pochodnej $\dot{u}(t)$ za okres $(t - h, t)h$ jest pomijalnie mała.

Zależność (10) określa oryginalny przybliżony model ciągły w postaci transmitancji $G_d(s)$ dla układu dyskretnego - rys. 1b.

Inny model ciągły przybliżony układu dyskretnego z rys. 1b można wyprowadzić zauważając, że średnia za okres $(t-h,t)$ wartość sygnału $u^*(t)$ oznaczana przez $\bar{u}^*(t)$ spełnia zależność $\bar{u}^*(t) = u(t-\frac{h}{2})$. Otrzymujemy stąd

$$Y_1(s) \approx G_e(s)U(s), \quad G_e(s) = G(s)e^{-\frac{h}{2}s}. \tag{11}$$

Dokładniejsze uzasadnienie modelu (11) można znaleźć już w literaturze z lat sześćdziesiątych [6], a możliwość jego zastosowań zauważona jest również w aktualnej literaturze [1].

Oba modele przybliżone wynikają z modyfikacji transmitancji $G(s)$; $G_d(s)$ jest zmodyfikowana przez pochodną, a $G_e(s)$ - przez opóźnienie. Można zauważyć, że $G_d(s)$ wynika z $G_e(s)$, jeżeli w tym ostatnim rozwiniemy funkcję $exp(-hs/2)$ w szereg i uwzględnimy tylko pierwszy wyraz rozwinięcia.

3.2. Model dyskretny układu ciągłego

Dany układ ciągły opisany transmitancją wymierną $R(s)$ można aproksymować opisem dyskretnym na wiele sposobów. W dalszych rozważaniach będziemy wykorzystywać tzw. aproksymację Tustina, w której model dyskretny w postaci transmitancji dyskretnej $\bar{R}(z)$ układu ciągłego $R(s)$ wynika ze wzoru

$$\bar{R}(z) = R\left(\frac{2}{h}\frac{z-1}{z+1}\right) \tag{12}$$

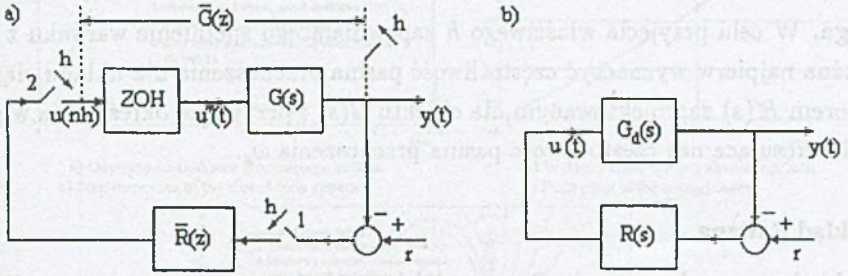
Można pokazać [7], że model (12) wynika z tzw. trapezowej aproksymacji całkowania.

Oczywiście dokładność aproksymacji zależy od stosunku częstotliwości próbkowania do maksymalnej częstotliwości widma sygnału wejściowego. Im większy ten stosunek, tym większa dokładność aproksymacji. W proponowanej dalej metodzie projektowania odpowiednia wartość tego stosunku wynika z poczynionego tam założenia dotyczącego tzw. częstotliwości określającej pasmo przenoszenia.

4. Projektowanie regulatora dyskretnego

Rozważmy układ dyskretny pokazany na rys. 3a składający się z obiektu ciągłego o transmitancji $G(s)$, ekstrapolatora zerowego rzędu EO, regulatora o transmitancji dyskretnej $\bar{R}(z)$ i dwóch synchronicznych elementów próbkujących o okresie próbkowania h. W realizacji praktycznej próbkowanie elementu 2 odpowiadające przetwornikowi cyfrowo-analogowemu jest nieco opóźnione w stosunku do próbkowania elementu 1 odpowiadającego przetwornikowi analogowo-cyfrowemu. Opóźnienie to jest przeznaczone na wyznaczenie nowej wartości sterowania $u(kh)$ po otrzymaniu nowej wartości pomiaru $y(kh)$ i w rozważanym modelu pomijamy je.

Przedstawiony na rys. 3b model ciągły jest modelem układu dyskretnego z rys. 3a, jeżeli transmitancja $G_d(s)$ jest związana z $G(s)$ zgodnie ze wzorem (10), a transmitancja $\bar{R}(z)$ wynika z aproksymacji Tustina (12) transmitancji $R(s)$. Zamiast modelu $G_d(s)$ można również używać modelu $G_e(s)$, który jest określany za pomocą transmitancji z opóźnieniem (niewymiernej), co jednak prowadzi do zwiększenia trudności projektowania.



Rys.3. a) Zamknięty układ dyskretny; b) jego model ciągły
Fig.3. a) Discrete-time closed-loop system; b) its continuous-time model

Dodatkowym warunkiem jest odpowiedni stosunek częstotliwości próbkowania do częstotliwości określającej pasmo przenoszenia. Niechaj ω_g oznacza częstotliwość określającą pasmo przenoszenia modelu układu z rys. 3b, mamy zatem $|G_d(j\omega)R(j\omega)| < 1$ (lub $|G_e(j\omega)R(j\omega)| < 1$) dla $0 \leq \omega < \omega_g$. Omawiane modele obowiązują dla małych h, dla których sygnał o częstotliwości próbkowania i wyższej jest dostatecznie tłumiony przez G. Orientacyjnie zachodzi to wtedy, gdy częstotliwość próbkowania $\omega_s = 2\pi/h$ jest w przybliżeniu nie mniej niż dziesięć razy większa niż ω_g. To zalecenie wynika z dotychczasowych rozważań, jak również z przeprowadzonych badań numerycznych. Jest ono zgodne z zaleceniem określającym częstotliwość próbkowania znajdującym się w [7, str. 461]. Przy spełnieniu tego warunku będziemy uważali, że układ z rys. 3b z obiektem $G_d(s)$ (lub $G_e(s)$) jest modelem ciągłym układu dyskretnego z rys. 3a. Oznacza to, że odpowiednie charakterystyki czasowe i częstotliwościowe omawianych układów są zbliżone do siebie.

Ponieważ model z pochodną jest prostszy, jest on zalecany w przypadku obiektów bez opóźnienia. Nietrudno zauważyć, że proponowana metoda może być również stosowana dla przypadku obiektu z opóźnieniem. W tym przypadku stosowanie modelu z opóźnieniem wydaje się bardziej właściwe.

4.1. Algorytm projektowania

Proponujemy zatem następujący algorytm projektowania regulatora dyskretnego.

1. Dla danej transmitancji obiektu $G(s)$ i przyjętego okresu próbkowania h tworzymy model z pochodną $G_d(s) = G(s)(1 - \frac{h}{2}s)$ lub model z opóźnieniem $G_e(s) = G(s)exp(-\frac{h}{2}s)$;

2. Stosując jedną ze znanych metod projektowania układów ciągłych, dobieramy regulator $R(s)$ do stosowanego modelu $G_d(s)$ lub $G_c(s)$;

3. Jeżeli $\omega_s > 10\omega_g$, to regulator dyskretny $\bar{R}(z)$ wynika z przybliżenia regulatora $R(s)$, określonego wzorem Tustina (12).

Uwaga. W celu przyjęcia właściwego h zapewniającego spełnienie warunku z punktu 3 można najpierw wyznaczyć częstotliwość pasma przenoszenia dla układu ciągłego z regulatorem $R'(s)$ zaprojektowanym dla obiektu $G(s)$ i przyjąć, że określa ona w przybliżeniu interesującą nas częstotliwość pasma przenoszenia ω_g.

4.2. Przykład Rattana

Przykład wprowadzony przez Rattana [8] był również rozpatrywany przez Kellera i Andersona [5]. W przykładzie tym obiekt i regulator mają transmitancje w postaci

$$G(s) = \frac{10}{s(s+1)}, \tag{13}$$

$$R(s) = \frac{0.416s + 1}{0.139s + 1}. \tag{14}$$

Dla $h = 0.15$ zaprojektowany przez Rattana regulator dyskretny ma postać

$$\bar{R}(z) = \frac{3.436z - 2.191}{z + 0.239}. \tag{15}$$

Dla tego samego h model z pochodną przyjmuje postać $G_d(s) = \frac{-0.75s+10}{s(s+1)}$. Regulator zaprojektowany dla tego modelu przy wykorzystaniu kryterium $Max_\omega M$, $(M = |\frac{K(j\omega)}{1+K(j\omega)}|)$ przyjmuje postać

$$R(s) = \frac{10s + 21}{s + 21}. \tag{16}$$

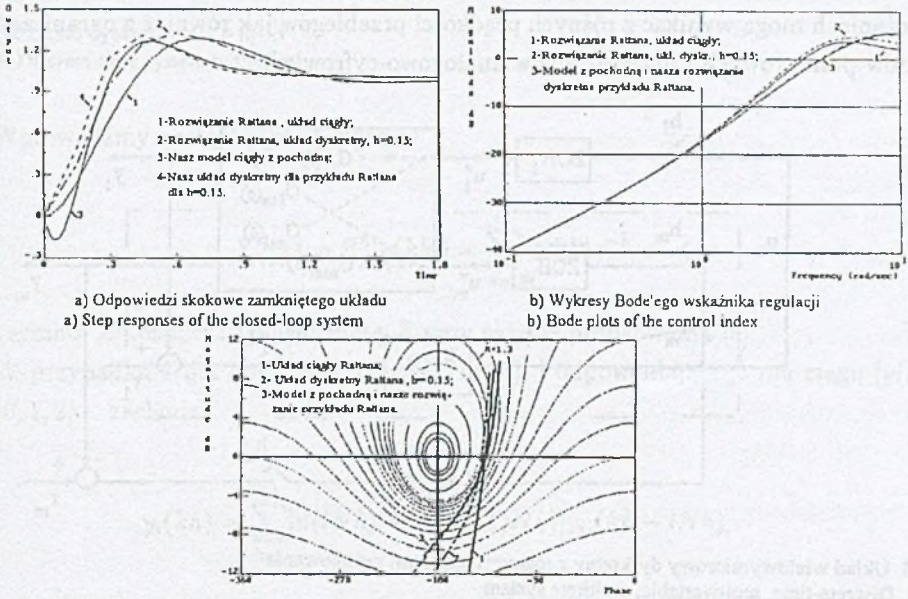
Regulator dyskretny wynika z (16) i (12)

$$\bar{R}(z) = \frac{4.495z - 3.272}{z + 0.223}. \tag{17}$$

Dla rozpatrywanego przykładu mamy $Max_\omega M = 1.35$, $\omega_g = 5.2$, $\omega_s = 41.9$, $\omega_s/\omega_g = 8.06$. Tym niemniej odpowiedzi skokowe, wykresy wskaźnika regulacji i wykresy Nicholsa dla układu dyskretnego i odpowiadającego mu układu ciągłego są jeszcze wzajemnie zbliżone. Dzięki temu układ dyskretny z zaprojektowanym regulatorem (17) ma dobre własności.

Zaprojektowany regulator (17) i regulator Rattana (15) są regulatorami 1 rzędu. Keller i Anderson zaprojektowali dla obiektu (13) regulator 2 rzędu dla h=0.157,

0.314, 0.42. Jednakże te ostatnie regulatory dają nieco gorsze przebiegi niż regulator Rattana (15).



a) Odpowiedzi skokowe zamkniętego układu
a) Step responses of the closed-loop system

b) Wykresy Bode'ego wskaźnika regulacji
b) Bode plots of the control index

c) Wykresy Nicholsa układu otwartego
c) Nichols plots of the open-loop system.

Rys. 4. Charakterystyki czasowe i częstotliwościowe dla przykładu Rattana
Fig.4. Time and frequency characteristics for Rattan's example

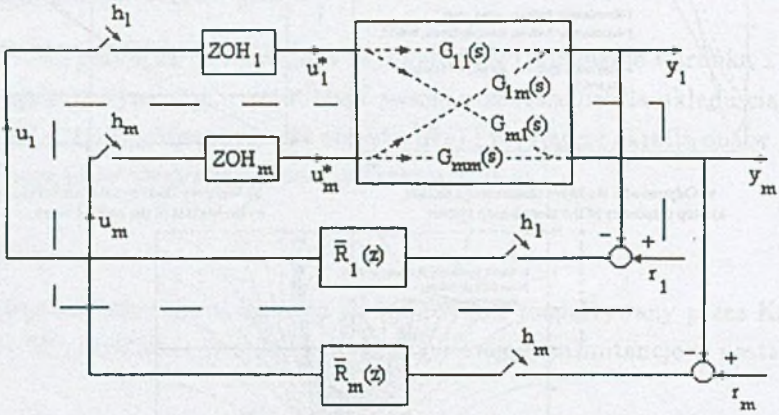
Na rys. 4 a, b, c przebiegi charakterystyk dla układu z naszym regulatorem (17) są porównywane z przebiegami dla regulatora Rattana (15). Widać, że nasz regulator jest nieco szybszy, daje nieco mniejsze przeregulowanie, a nawet nieco większy zapas fazy w porównaniu do regulatora Rattana. Tylko zapas amplitudy dla naszego regulatora jest mniejszy.

5. Układ wielowymiarowy z różnymi okresami próbkowania

Rozważmy układ wielowymiarowy dyskretny w czasie pokazany na rys. 5 złożony z ciągłego wielowejściowego i wielowyjściowego obiektu opisanego transmitancją macierzową

$$G(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s), & \dots & G_{1m}(s) \\ \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ G_{m1}(s), & \dots & G_{mm}(s) \end{bmatrix} \quad (18)$$

i z m sprzężeń zwrotnych zawierających elementy próbkujące z różnymi okresami próbkowania h_i, ekstrapolatory zerowego rzędu EO_i oraz regulatory dyskretne opisane transmitancjami $\bar{R}_i(z)$, i = 1, 2, ..., m. Różne okresy próbkowania zastosowane w różnych sprzężeniach mogą wynikać z różnych prędkości przebiegów, jak również z ograniczeń elementów pomiarowych i przetworników analogowo-cyfrowych.



Rys.5. Układ wielowymiarowy dyskretny z różnymi okresami próbkowania
Fig.5. Discrete-time, multivariable, multirate system

Rozważany układ jest liniowy, ale nie da się opisać za pomocą transmitancji macierzowej. Rzeczywiście, opis w postaci transmitancji macierzowej całego układu z rys. 5 byłby możliwy, gdyby istniała transmitancja dla układu pokazanego na rys. 6 o jednym wejściu i jednym wyjściu, w przypadku gdy $h_i \neq h_j$. Powstaje zatem pytanie: czy i w jakim przypadku istnieje opis w postaci transmitancji (lub stacjonarnych równań stanu) dla układu z rys. 6. Należy podkreślić, że w dostępnej literaturze brak jest wyraźnej odpowiedzi na to pytanie, chociaż problem został zauważony np. w [13].

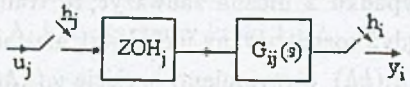
6. Istnienie transmitancji

Rozważmy trzy przypadki:

1. $h_i = h, \quad h_j = Nh, \quad N$- liczba całkowita;

2. $h_j = Mh, \quad h_j = h, \quad M$- liczba całkowita;

3. $h_i = Mh, \quad h_j = Nh, \quad M, N$ - względne pierwsze liczby całkowite, dodatnie, a h oznacza pewien podstawowy okres próbkowania (największy wspólny podzielnik okresów h_i oraz h_j).



Rys. 6. Układ dyskretny z $h_i \neq h_j$
Fig.6. Discrete-time system with $h_i \neq h_j$

Wprowadźmy następujące wyrażenie:

$$Y^h(z) = \mathcal{Z}^h[y(kh)] = \sum_{k=0}^{\infty} y(kh)z^{-k}, \tag{19}$$

tzn. symbol $\mathcal{Z}^h$ oznacza transformatę $\mathcal{Z}$ przy okresie próbkowania h.

W przypadku 1 dla dowolnego ciągu $[u(kNh)]$ i odpowiadającego mu ciągu $[y(kh)]$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ zachodzi:

$$y_i(kh) = \sum_{l=0}^{\infty} [u(lNh) - u((l-1)Nh)]\hat{y}_{ij}(kh - lNh), \tag{20}$$

gdzie

$$\hat{y}_{ij}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}G_{ij}(s)\right], \tag{21}$$

a $\mathcal{L}^{-1}$ oznacza symbol odwrotnej transformacji Laplace'a. Po zastosowaniu transformacji $\mathcal{Z}$ do obu stron zależności (20) otrzymujemy:

$$Y^h(z) = \sum_{l=0}^{\infty} [u(lNh) - u((l-1)Nh)]\mathcal{Z}^h[\hat{y}_{ij}(kh)]z^{-lN} = (1 - z^{-N})U^{Nh}(z^N)\mathcal{Z}^h[\hat{y}_{ij}(kh)] \tag{22}$$

lub

$$Y^h(z) = G_{ij}^h(z)U^{Nh}(z^N), \tag{23}$$

gdzie

$$Y^h(z) = \mathcal{Z}^h[y(kh)], \quad U^{Nh}(z^N) = \sum_{l=0}^{\infty} u(lNh)(z^N)^{-l}, \tag{24}$$

$$G_{ij}^h = (1 - z^{-N})\mathcal{Z}^h[\hat{y}_{ij}(kh)]. \tag{25}$$

Tak więc dla przypadku 1 istnieje opis w postaci transmitancji (25) wiążącej wyjście $Y^h(z)$ z wejściem $U^{Nh}(z^N)$.

Natomiast dla przypadku 2 można zauważyć, że transmitancja wiążąca wyjście z wejściem nie istnieje, gdyż rozpatrywany układ jest niestacjonarny. Rzeczywiście, jeżeli dla dowolnego wejścia $u_j(kh)$ otrzymujemy wyjście $y_i(kMh)$, $k = 0, 1, 2, ...$, wtedy dla takiego samego wejścia ale przesuniętego w czasie o h, tzn. dla $u_j(kh - h)$, wyjście y_i nie jest przesunięte o h, gdy minimalne przesunięcie w czasie wyjścia y_i jest równe $h_i = Mh$.

Również dla przypadku 3 transmitancja opisująca układ z rys. 4 nie istnieje, gdyż również wtedy układ jest niestacjonarny.

Ponieważ w układzie wielowymiarowym, nawet jeżeli kanałowi skrośnemu od wejścia u_i do wyjścia y_j odpowiada przypadek 1, to kanałowi skrośnemu od u_j do y_i odpowiada przypadek 2. Wynika stąd, że dla całego układu dyskretnego wielowymiarowego z różnymi częstotliwościami próbkowania nie istnieje opis w postaci transmitancji macierzowej (ani w postaci stacjonarnych równań stanu), co znacznie utrudnia projektowanie takich układów metodami czasu dyskretnego. W związku z tym wzrasta znaczenie zaproponowanej w następnym rozdziale metody projektowania bazującej na opisie ciągłym.

7. Projektowanie dyskretnych układów wielowymiarowych

Zakładamy, że w układzie z rys. 5 wejście u_i obiektu jest odpowiednio dobrane do wyjścia y_i, $i = 1, 2, ..., m$, tak że oba występują w i-tym sprzężeniu zwrotnym. Inaczej mówiąc, zakładamy, że problem doboru sygnału regulującego u_j do sygnału regulowanego y_i został już rozstrzygnięty przy wykorzystaniu różnych przesłanek (wzmocnienie i stałe czasowe poszczególnych kanałów, oraz ewentualnie inne przesłanki wynikające z fazy tworzenia modelu obiektu). Ponieważ cały układ nie może być opisany za pomocą macierzowej transmitancji dyskretnej, uzasadnione jest wykorzystanie omówionego poprzednio modelu ciągłego do opisu poszczególnych kanałów obiektu z uwzględnieniem różnych okresów próbkowania. Dzięki temu można zaproponować następujący algorytm projektowania wielowymiarowych układów dyskretnych.

7.1. Algorytm projektowania

1. Dla danej transmitancji $G_{ij}(s)$ ij-tego kanału obiektu i przyjętego okresu próbkowania h_j należy utworzyć transmitancję zmodyfikowaną przez pochodną $G^d_{ij}(s) = (1 - h_j s/2)G(s)$ (lub przez opóźnienie $G^e_{ij}(s) = exp(-h_j s/2)G(s)$, $i = 1, 2, ...m$).

2. Wykorzystując jedną ze znanych metod projektowania wielowymiarowych układów dyskretnych, znajdujemy transmitancje $R_j(s)$ regulatorów ciągłych dla obiektu opisanego przez transmitancje $G^d_{ij}(s)$ (lub $G^e_{ij}(s)$).

3. Sprawdzamy, czy okresy próbkowania h_j są dostatecznie małe, tzn. czy częstotliwość próbkowania $\omega_j = 2\pi/h_j$ jest około dziesięć razy większa od częstotliwości

określającej częstotliwość pasma przenoszenia ω_j^* j-tej pętli sprzężenia ; jeżeli nie – to zmniejszamy okres h_j i powtarzamy kroki 1 i 2.

4. Transmitancje regulatorów dyskretnych poszczególnych pętli $\bar{R}_j(z)$ wynikają z aproksymacji Tustina transmitancji $R_j(s)$, czyli

$$\bar{R}_j(z) = R_j\left(\frac{2}{n}\frac{z-1}{z+1}\right). \tag{26}$$

Częstotliwość pasma przenoszenia j-tej pętli ω_j^* obliczamy biorąc pod uwagę transmitancję obiektu zastępczego G_j^* wiążącą wyjście $Y_j(s)$ z wejściem $U_j(s)$ obiektu i wyprowadzoną przy uwzględnieniu pozostałych m-1 pętli zamkniętych. Dalej zostanie to objaśnione dokładniej i stanie się zrozumiałe po przedstawieniu przykładu.

Uwaga. Ażeby wybrać odpowiednie okresy próbkowania h_j zapewniające spełnienie warunku $\omega_j \gtrsim 10\omega_j^*$ najpierw można określić częstotliwość $\omega_j^{*\prime}$ pasma przenoszenia dla układu z regulatorami $R_j'(s)$ zaprojektowanymi dla obiektu $G(s)$. Następnie można przyjąć, że $\omega_j^* \approx \omega_j^{*\prime}$ i określić h_j.

W opisanym algorytmie projektowania wykorzystuje się dowolną metodę projektowania wielowymiarowych układów ciągłych. W następnym rozdziale opiszemy oryginalną metodę projektowania takich układów.

8. Projektowanie ciągłych układów wielowymiarowych

Rozważmy teraz wielowymiarowy układ ciągły powstający z układu pokazanego na rys. 5, jeżeli w tym ostatnim nie występują elementy próbkujące i ekstrapolatory, a w miejsce regulatorów dyskretnych $\bar{R}_j(z)$ występują regulatory ciągłe $R_j(s)$. Opiszemy teraz oryginalną metodę projektowania regulatorów $R_j(s)$ dla tych układów polegającą na sukcesywnym stosowaniu metody projektowania regulatora dla obiektu o jednym wejściu i jednym wyjściu. Proponowane podejście polega na repetycyjnej procedurze, w której regulator $R_j(s)$ j-tej pętli jest projektowany dla obiektu zastępczego o jednym wejściu u_j i jednym wyjściu y_j, powstającego z uwzględnienia pozostałych pętli zamkniętych (tych, które już mają zaprojektowane w poprzednich krokach regulatory).

Tak więc najpierw jest projektowany regulator $R_1(s)$ dla obiektu $G_{11}(s)$, pozostałe pętle są otwarte, gdyż nie mają one jeszcze zaprojektowanych regulatorów. Drugi regulator $R_2(s)$ projektujemy dla jednowymiarowego obiektu zastępczego powstającego z uwzględnienia pierwszej pętli zamkniętej i pozostałych otwartych; trzeci $R_3(s)$ - dla zastępczego obiektu uwzględniającego dwie pierwsze pętle zamknięte, a pozostałe otwarte; ostatni m-ty regulator $R_m(s)$ dla obiektu zastępczego uwzględniającego wszystkie pozostałe pętle zamknięte.

Następnie powtarzamy procedurę projektowania rozpoczynając od pierwszej pętli i projektując regulator $R_j(s)$ j-tej pętli, $j = 1, 2, ..., m$ dla obiektu zastępczego jednowymiarowego wynikającego z uwzględnienia pozostałych pętli zamkniętych z regulatorami zaprojektowanymi w ostatnich m-1 krokach. Jeżeli potrzeba, powtarzamy procedurę projektowania, aż dalsze kroki nie dadzą poprawy sterowania.

Należy podkreślić, że proponowana procedura projektowania jest zazwyczaj szybko zbieżna. Wynika to z faktu, że zmiana regulatora $R_j(s)$ j-tej pętli wpływa głównie na charakterystyki otwartej j-tej pętli wykorzystywane przy projektowaniu. Charakterystyki pozostałych kolejno otwieranych pętli są znacznie mniej zależne od tej zmiany, gdyż dla nich j-ta pętla jest zamknięta, a więc zazwyczaj mało wrażliwa na zmianę parametrów.

Regulator $R_j(s)$ określamy stosując dowolną metodę projektowania układów jednowymiarowych. Jedną z zalecanych jest metoda bazująca na charakterystykach częstotliwości i kryterium M_{max}, które jest stosowane w opisanym dalej przykładzie. Regulator $R_j(s)$ powinien być zaprojektowany tak, że $M_{max} \approx 1.3$, gdzie M_{max} jest równe maksimum modułu charakterystyki amplitudy zamkniętego układu.

9. Przykład

Rozważmy układ dyskretny o dwóch zmiennych regulowanych pokazany na rys. 5, w którym transmitancja macierzowa obiektu przyjmuje postać

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{10}{s(s+1)}, & \frac{7}{(s+2)(s+3)} \\ \frac{5}{s(s+1)}, & \frac{7}{(s+2)(s+3)} \end{bmatrix}. \tag{27}$$

Celem rozważań jest zaprojektowanie transmitancji $\bar{R}_1(z)$ i $\bar{R}_2(z)$, które określają algorytmy regulatorów dyskretnych w obu pętlach.

Po wstępnych próbach, w których brano pod uwagę prędkości przebiegów obu pętli, przyjęto $h_1 = 0.18$ i $h_2 = 0.24$. Zatem dla obiektu otrzymujemy następujący model z pochodną

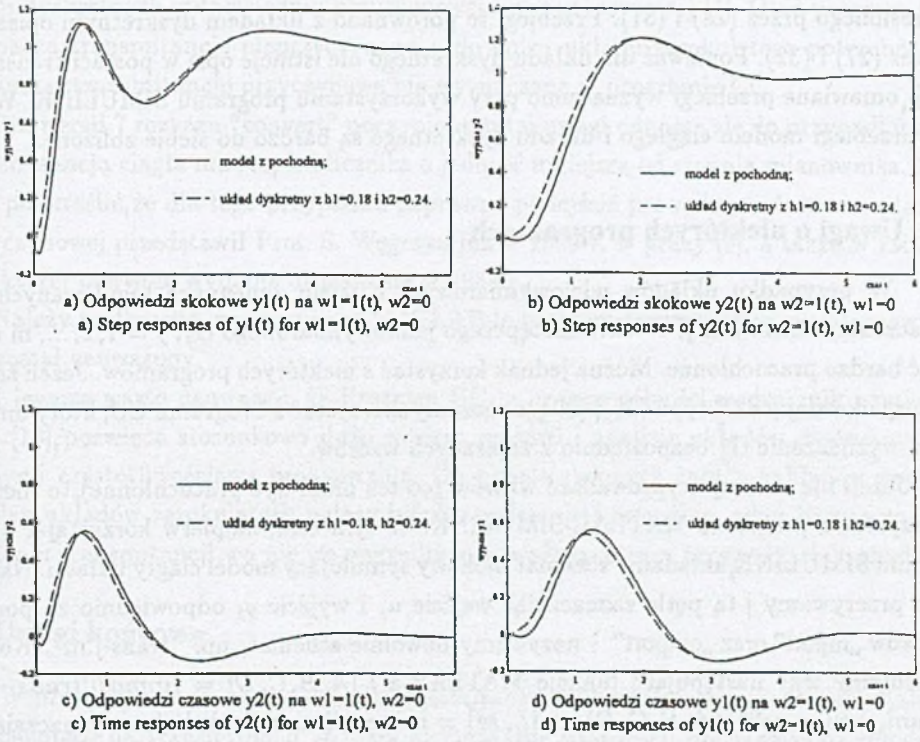
$$G^d(s) = \begin{bmatrix} \frac{-0.9s+10}{s(s+1)}, & \frac{-0.84s+7}{(s+2)(s+3)} \\ \frac{-0.45s+5}{s(s+1)}, & \frac{-0.84s+7}{(s+2)(s+3)} \end{bmatrix}. \tag{28}$$

Najpierw projektujemy regulatory ciągłe $R_j(s)$, $j = 1, 2$ za pomocą metody opisanej w poprzednim rozdziale. W pierwszym kroku projektujemy regulator $R_1'(s)$ dla obiektu $G_{11}^d(s)$; druga pętla jest otwarta, ponieważ nie ma jeszcze zaprojektowanego regulatora. W drugim kroku projektujemy regulator $R_2'(s)$ dla obiektu zastępczego (z wejściem u_2 i wyjściem y_2 oraz zamkniętą pierwszą pętlą zawierającą regulator $R_1'(s)$) opisanego transmitancją

$$G_2^*(s) = G_{22}^d - G_{12}^d \frac{R_1'}{1 + R_1' G_{11}^d} G_{21}^d. \tag{29}$$

W trzecim kroku projektujemy regulator $R_1''(s)$ dla obiektu zastępczego opisanego transmitancją:

$$G_1^*(s) = G_{11}^d - G_{21}^d \frac{R_2'}{1 + R_2' G_{22}^d} G_{12}^d \tag{30}$$



a) Odpowiedzi skokowe y1(t) na w1=1(t), w2=0
a) Step responses of y1(t) for w1=1(t), w2=0

b) Odpowiedzi skokowe y2(t) na w2=1(t), w1=0
b) Step responses of y2(t) for w2=1(t), w1=0

c) Odpowiedzi czasowe y2(t) na w1=1(t), w2=0
c) Time responses of y2(t) for w1=1(t), w2=0

d) Odpowiedzi czasowe y1(t) na w2=1(t), w1=0
d) Time responses of y1(t) for w2=1(t), w1=0

Rys.7. Przebiegi czasowe w obu pętlach dla zaprojektowanego układu dwuwymiarowego
Fig.7. Time responses of both the loops for the designed twodimensional system

W czwartym kroku projektujemy regulator $R_2''(s)$ dla obiektu zastępczego $G_2^{*\prime}$ (określonego przez (29) z R_1' zastąpionym przez R_1''). Jednakże dla rozważanej klasy regulatorów opisanych transmitancją wymierną pierwszego rzędu w czwartym kroku nie otrzymujemy już istotnej poprawy. Ostatecznie otrzymujemy regulatory $R_1(s) = R_1''(s)$ i $R_2(s) = R_2'(s)$ w postaci

$$R_1(s) = 0.4\frac{0.8s + 1}{0.1s + 1}, \quad R_2(s) = \frac{2.6}{s}. \tag{31}$$

Częstotliwości określające pasma przenoszenia obu pętli z odpowiednimi obiektami zastępczymi są $\omega_1^* = 3.57$ i $\omega_2^* = 1.27$. Ponieważ $\omega_1 = 2\pi/0.18 = 34.9$ i $\omega_2 = 2\pi/0.24 = 26.1$, więc $\omega_1/\omega_1^* = 9.78$ i $\omega_2/\omega_2^* = 20.55$. Transmitancje regulatorów dyskretnych otrzymujemy z aproksymacji Tustina transmitancji (31), co daje

$$\overline{R}_1(z) = \frac{1.873684(z - 0.7977528)}{z - 0.05263158},$$

$$R_2(s) = \frac{0.312(z+1)}{z-1}. \tag{32}$$

Na rys. 7 a i b pokazano odpowiedzi na skok jednostkowy wartości zadanych poszczególnych pętli, a na rys. 7 c i d - przebiegi wynikające z interakcji dla modelu ciągłego określonego przez (28) i (31). Przebiegi te porównano z układem dyskretnym opisanym przez (27) i (32). Ponieważ dla układu dyskretnego nie istnieje opis w postaci transmitancji, omawiane przebiegi wyznaczono przy wykorzystaniu programu SIMULINK. Widać, że przebiegi modelu ciągłego i układu dyskretnego są bardzo do siebie zbliżone.

10. Uwagi o niektórych programach

W przypadku układów wielowymiarowych o wielu zmiennych regulowanych wyznaczenie transmitancji obiektu zastępczego jednowymiarowego G_j^*, $j = 1, 2, ..., m$ może być bardzo pracochłonne. Można jednak korzystać z niektórych programów. Jeżeli znamy wzory określające G_j^* typu (29), (30), to możemy skorzystać z Programu CC, który umożliwia wyznaczenie G_j^* bezpośrednio z zapisanych wzorów.

Jeżeli nie chcemy wyprowadzać wzorów (co też może być pracochłonne), to możemy korzystać z programu MATLAB-SIMULINK. W tym celu, najpierw korzystając z programu SIMULINK, układamy schemat blokowy symulujący model ciągły układu. Następnie przerywamy j-tą pętlę zaznaczając wejście u_j i wyjście y_j odpowiednio za pomocą bloków „inport" oraz „outport" i nazywamy dowolnie schemat, np. "trans-j.m". Kolejno stosujemy trzy następujące funkcje MATLAB-a : $[A, B, C, D] = linmod('trans - j')$, $[num, den] = ss2tf(A, B, C, D)$, $[L, M] = mineral(num, den)$, które wyznaczają wektory L i M, określające współczynniki wielomianów odpowiednio licznika i mianownika transmitancji G_j^* - bez wyprowadzania wzorów.

Ostrzeżenie. W przypadku występowania w symulującym schemacie blokowym elementu z opóźnieniem wymienione funkcje MATLAB-a dają wynik niepoprawny bez żadnego ostrzeżenia! Dla tego przypadku autor niniejszej pracy ułożył program MATLAB-a wyznaczający odpowiednie przydatne do projektowania charakterystyki częstotliwościowe reprezentujące G_j^*.

Przy okazji warto jeszcze omówić niektóre potknięcia występujące w programach. Przy projektowaniu układów dyskretnych często wyznacza się transmitancje dyskretne dla części układu złożonej z elementu próbkującego, ekstrapolatora i obiektu ciągłego. Program CC zawiera rozkaz "convert" pozwalający obliczać transmitancję dyskretną dla danej transmitancji ciągłej w dziesięciu różnych wersjach. Dla nas interesujące są wersje nr 7, 8 i 9 odnoszące się do układów odpowiednio z impulsatorem idealnym, ekstrapolatorem zerowego rzędu i ekstrapolatorem pierwszego rzędu. Otóż w pewnych przypadkach omawiany rozkaz wyznacza transmitancje dyskretne, które zastosowane do opisu układów zamkniętych prowadzą do niepoprawnego opisu układu. Dla przypadków odpowiadających wersjom 8 i 9 występuje to wtedy, gdy transmitancja ciągła obiektu jest wymierna

i ma stopień licznika równy stopniowi mianownika. Skokowa zmiana wejścia dla takiego obiektu wywołuje skokową zmianę (nieciągłość) wyjścia i przy obliczaniu transmitancji dyskretnej powstaje problem, którą granicę lewo- czy prawostronną uwzględnia w chwili nieciągłości element próbkujący. Prowadzi to do rozróżnienia dwóch różnych transmitancji dyskretnych, odpowiednio przyczynowej i nieprzyczynowej [4]. Otóż program CC wyznacza transmitancje nieprzyczynowe, a do opisu układu zamkniętego potrzebne są zazwyczaj transmitancje przyczynowe nie wyznaczane w programie CC.

Dla wersji 7 rozkazu "convert" poczynione tutaj uwagi odnoszą się do przypadku, gdy transmitancja ciągła ma stopień licznika o jedność mniejszą od stopnia mianownika. Należy podkreślić, że dla tego przypadku poprawne podejście prowadzące do transmitancji przyczynowej przedstawił Prof. S. Węgrzyn już w 1960 r. w pracy [9], a także w książce [10], której pierwsze wydanie ukazało się w 1963 r.

Należy podkreślić, że również w MATLAB-ie problem transmitancji przyczynowych nie został zauważony.

I jeszcze warto zauważyć, że Program CC, a w szczególności podręcznik użytkownika [13], poświęca stosunkowo dużo miejsca opisowi i analizie układów dyskretnych z różnymi częstotliwościami próbkowania. Do przedstawionych tam przykładów opisu i analizy układów zamkniętych należy jednak podchodzić ostrożnie, gdyż bazują one na istnieniu transmitancji, co nie we wszystkich rozważanych tam przypadkach zachodzi.

11. Uwagi końcowe

W przypadku stosunkowo dużych częstotliwości próbkowania transmitancje dyskretne bazujące na transformacji $\mathcal{Z}$ mają niekorzystne własności, np. wymagają długiego słowa cyfrowego do zapisu występujących w nich współczynników. Jednym ze sposobów uniknięcia występujących trudności zaproponowanym w niniejszej pracy jest stosowanie oryginalnego, przybliżonego modelu ciągłego i dowolnej metody projektowania układów ciągłych.

Zaproponowana metoda ma tę zaletę, że jest prosta i można ją zastosować do zaprojektowania regulatora dyskretnego nawet bez bliższej znajomości zasad opisu układów dyskretnych. Prostota metody umożliwia powtórzenie projektowania dla różnych okresów próbkowania i wybór najbardziej odpowiedniego okresu. Korzyści są wyraźnie widoczne dla układów z wieloma regulatorami dyskretnymi pracującymi z różnymi częstotliwościami próbkowania, niekoniecznie synchronicznie. W tym przypadku zastosowanie metod opisu układów dyskretnych napotyka na duże trudności. Metoda może być również stosowana do układów z opóźnieniem.

Chociaż metoda szczególnie nadaje się dla dużych częstotliwości próbkowania, to daje ona również dobre rezultaty dla zalecanych w literaturze [7] częstotliwości próbkowania wynikających z pasma przenoszenia układu. Po uwzględnieniu powyższych rozważań wydaje się, że z punktu widzenia inżynierskiego metoda może mieć istotne znaczenie.

Uzupełnieniem do tych rozważań jest opracowana także oryginalna metoda projektowania wielowymiarowych układów ciągłych, z oddzielnymi regulatorami w poszczególnych pętlach regulacji. Metoda polega na kolejnym projektowaniu regulatorów w poszczególnych pętlach dla obiektu zastępczego z jednym wejściem i jednym wyjściem, wynikającego z uwzględnienia pozostałej części układu z zamkniętymi pętlami regulacji. W ten sposób układ wielowymiarowy jest projektowany przez wielokrotne stosowanie dowolnej metody projektowania układu jednowymiarowego.

LITERATURA

1. Franklin G.F., Powell J.D., Emami Naeini A.: Feedback Control of Dynamic Systems, 3-rd ed. Reading, MA, Addison Wesley, 1994.
2. Gessing R.: Properties of Discrete-Time Transfer Functions for Small Sampling Periods. Proceedings of 2-nd European Control Conference, June 29-July 1, 1993, 1699-1702.
3. Gessing R.: Comments on „A Modification and the Tustin Approximation" with a Concluding Proposition. IEEE Trans Autom. Control, vol. 40, no. 5, 1995, pp. 942-944.
4. Gessing R.: Causal and Noncausal Discrete-Time Transfer Functions and Their Applications. Inf. J. Control (w druku).
5. Keller J.P., Anderson B.D.O.: A New Approach to the Discretization of Continuous-Time Controllers. IEEE Trans. Autom. Control, Vol. 37 No 2. 1992, pp. 214-223.
6. Kuzin L.T: Opis i projektowanie układów dyskretnych. Moskwa 1962, (po rosyjsku).
7. Middleton R.H., Goodwin G.C.: Digital Control and Estimation, A Unified Approach, Englewood Clifs, NY: Printice Hall 1990.
8. Rattan K.S.: Digitalization of Existing Continuous Control Systems, IEEE Trans. Autom. Control, Vol. AC-29, 1984, pp 282-285.
9. Węgrzyn S.: Différentes transformées en z de l'échelon uinitaire et leurs applications dans l'analyse des systémes pulsés. Bulletin de L'Academie Polonaise des Scientes Vol. VIII, No. 6, 1960.
10. Węgrzyn S.: Podstawy automatyki. PWN, Wydanie 5, Warszawa 1980.
11. MATLAB ver. 4.2c.1. User's Guide – For Microsoft Windows The Math. Works Inc., 1993.

12. SIMULINK ver. 1.3. Dynamic System Simulation Software User's Guide, The Math. Works Inc., 1993.

13. Program CC. Tutorial and User's Guide. System Technology Inc. California, 1991.

Recenzent: Prof.dr hab.inż. Wojciech Mitkowski

Wpłynęło do Redakcji 10 grudnia 1998 r.

Abstract

In the beginning of the paper the attention is focussed on the difficulties appearing in description and design of discrete-time (DT) systems by means of the method basing on $\mathcal{Z}$ transform. Namely, for small sampling periods some very long digital words are needed for recording the coefficients of the DT transfer function (TF) parameters. Next, the method of approximate description and design is proposed basing on continuous-time (CT) model of the DT system composed of sampler, zero order hold and CT plant. For the CT plants with rational, proper TF-s a model with derivative is proposed and for the CT plants containing additionally, a delay a model with delay is recomended. In the proposed method, first a CT controller with a TF $R(s)$ is designed for the CT modified plant described by one from the mentioned models. For designing any from the well know CT methods of design can be applied. The DT controller TF $\bar{R}(z)$ results from the Tustin approximation of the CT controller $R(s)$ in accordance with the formula $\bar{R}(z) = R(\frac{h}{2}\frac{z-1}{z+1})$.

The proposed method has one important advantage, the DT controller can be designed, practically without knowledge concerning description of DT systems. The used models are very simple and the design can be easily repeated for different sampling periods. The advantage is exactly seen in the case of multivariable systems with many DT controllers having different sampling periods with asynchronous sampling instants. In this case it is very difficult to describe the system and to design the controllers using usual DT methods.

Additionally an original method of design of continuous-time multivariable systems with separate regulators of particular loops is proposed. The method makes it possible to design the multivarible system, by means of successive determination of the regulators, with using repeatedly any method of design of one variable system.

The proposed methods are very simple, then from engineering point of view they have an essential meaning.