ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 2000
Seria: AUTOMATYKA z 132 Nr kol. 1477

Beata SIKORA

DODATNIA STEROWALNOŚĆ LINIOWYCH UKŁADÓW Z OPÓŹNIENIAMI PRZY DODATNICH STEROWANIACH

Streszczenie. Niniejszy artykuł zawiera definicje oraz podstawowe twierdzenia dotyczące dodatniej, względnej oraz absolutnej sterowalności przy dodatnich sterowaniach linowych, stacjonarnych, skończenie-wymiarowych układów dynamicznych ze stałymi wielokrotnymi opóźnieniami w sterowaniu. Podano przykłady liczbowe ilustrujące rozważania teoretyczne.

POSITIVE CONTROLLABILITY WITH POSITIVE CONTROLS OF LINEAR SYSTEMS WITH DELAYS

Summary. This paper contains some definitions and basic theorems concerning the positive, relative and absolute, controllability with positive controls for linear, time-invariant, finite dimensional dynamical systems with delays in control. Numerical examples which illustrate theoretical considerations are also given.

1. Wprowadzenie

Jednym z podstawowych problemów matematycznej teorii sterowania jest sterowalność układów dynamicznych. W niniejszej pracy rozpatrywane będą układy dynamiczne z opóźnieniami w sterowaniu, które stanowią jedną z klas układów z opóźnieniami. Sformułowane zostaną dla nich pewne kryteria dodatniej, względnej i absolutnej sterowalności przy dodatkowych ograniczeniach nałożonych na sterowania. Kryteria te pozwolą określić, jak przy dodatnich sterowaniach można osiągnąć stany układu o dodatnich współrzędnych. Uzyskane wyniki są uogólnieniem rezultatów zawartych w pracy [1] na przypadek wielokrotnych, stałych opóźnień w sterowaniu. Omawiane typy układów dynamicznych znajdują zastosowanie m.in. w ekonomii.

Rozpatrujemy liniowe, stacjonarne, skończenie wymiarowe układy dynamiczne ze stałymi wielokrotnymi opóźnieniami w sterowaniu opisane różniczkowym równaniem stanu o następującej postaci

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + \sum_{i=0}^{M} B_i\, u(t - h_i)\,, \qquad t \geq 0, \tag{1}$$

gdzie

$x(t) \in R^n$ - wektor stanu chwilowego,

$u \in L^2_{loc}([\,0,\infty), U)$ - sterowanie, gdzie $U = R^m_+ \subset R^m$ – stożek dodatni o wierzchołku w zerze,

A- $(n \times n)$ -wymiarowa macierz o elementach $a_{kj} \in R$, $k,j = 1,2,\ldots,n$,

B_i $(i = 0,1,2,\ldots, M)$ - $(n \times m)$-wymiarowe macierze o elementach $b_{ikj} \in R$, $k = 1,2,\ldots,n$, $j = 1,2,\ldots,m$,

$h_i \in R$, $i = 0,1,2,\ldots,M$ - stałe opóźnienia sterowania, spełniające nierówności

$$0 = h_0 < h_1 < \ldots < h_i < \ldots < h_{M-1} < h_M.$$

Niech $L^2([\,0, t\,], U)$ oznacza zbiór funkcji całkowalnych z kwadratem w przedziale $[\,0, t\,]$ o wartościach w zbiorze U. Dowolne sterowanie $u \in L^2([\,0, t\,], U)$ nazywa się sterowaniem dopuszczalnym dla układu dynamicznego (1). Przy zadanych warunkach początkowych $z(0)=\{x(0), u_0\} \in R^n \times L^2([\,-h_M, 0], U)$, gdzie $u_0 = u(s)$ dla $s \in [-h_M, 0]$ oraz sterowaniu dopuszczalnym $u \in L^2([\,0, t_1], U)$, dla każdego $t \geq 0$ istnieje jednoznaczne, absolutnie ciągłe rozwiązanie $x(t, z(0),u)$ równania różniczkowego (1) o postaci

$$(t\,,z(0),\,u) = e^{At}\,x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} \sum_{i=0}^{M} B_i\, u(\tau-h_i)\,d\tau. \tag{2}$$

Warunki początkowe $z(0)$ nazywa się początkowym stanem zupełnym układu (1).

Zakładając $t > h_M$ i przekształcając wzór (2), otrzymuje się

$$x(t\,,z(0),\,u) = e^{At}\,x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} \sum_{i=0}^{M} B_i\, u(\tau-h_i)\,d\tau = e^{At}\,x(0) + e^{At}\int_0^t e^{-A\tau} \sum_{i=0}^{M} B_i\, u(\tau-h_i)\,d\tau =$$

$$= e^{At}\,x(0) + e^{At}\sum_{i=0}^{M}\int_0^t e^{-A\tau} B_i\, u(\tau-h_i)\,d\tau = e^{At}\,[\,x(0) + \int_{-h_M}^{0} e^{-A(\tau+h_M)} B_M\, u(\tau)\,d\tau +$$

$$+ \int_{-h_{M-1}}^{0} e^{-A(\tau+h_{M-1})} B_{M-1}\, u(\tau)\,d\tau + \ldots + \int_{-h_1}^{0} e^{-A(\tau+h_1)} B_1\, u(\tau)\,d\tau\,] +$$

$$+ e^{At}\int_0^{t-h_M} e^{-A\tau}\,[\sum_{i=0}^{M} e^{-Ah_i} B_i\,]\,u(\tau)\,d\tau + \ldots + e^{At}\int_{t-h_{j+1}}^{t-h_j} e^{-A\tau}\,[\sum_{i=0}^{j} e^{-Ah_i} B_i\,]\,u(\tau)\,d\tau +$$

$$+ \ldots + e^{At}\int_{t-h_2}^{t-h_1} e^{-A\tau}\,[\,e^{-Ah_1} B_1 + B_0\,]\,u(\tau)\,d\tau + e^{At}\int_{t-h_1}^{t} e^{-A\tau} B_0\, u(\tau)\,d\tau =$$

$$= e^{At} [x(0) + \int_{-h_M}^{0} e^{-A(\tau+h_M)} B_M u(\tau) d\tau + \int_{-h_{M-1}}^{0} e^{-A(\tau+h_{M-1})} B_{M-1} u(\tau) d\tau + \ldots +$$

$$+ \int_{-h_1}^{0} e^{-A(\tau+h_1)} B_1 u(\tau) d\tau] + \int_{0}^{t-h_M} e^{A(t-\sum_{i=0}^{M} h_i - \tau)} [e^{A(h_0+\ldots+h_{M-1})} B_M + e^{A(h_0+\ldots+h_{M-2}+h_M)} B_{M-1} +$$

$$+ \ldots + e^{A(h_1+\ldots+h_M)} B_0] u(\tau) d\tau + \ldots + \int_{t-h_{j+1}}^{t-h_j} e^{A(t-\sum_{i=0}^{j} h_i - \tau)} [e^{A(h_0+\ldots+h_{j-1})} B_j +$$

$$+ e^{A(h_0+\ldots+h_{j-2}+h_{j-1})} B_{j-1} + \ldots + e^{A(h_1+\ldots+h_j)} B_0] u(\tau) d\tau + \ldots +$$

$$+ \int_{t-h_2}^{t-h_1} e^{A(t-h_1-\tau)} [B_1 + e^{Ah_1} B_0] u(\tau) d\tau + \int_{t-h_1}^{t} e^{A(t-\tau)} B_0 u(\tau) d\tau.$$

2. Podstawowe definicje i twierdzenia

Dla układu dynamicznego (1) zdefiniujemy pojęcie zbioru osiągalnego $K^+([\,0, t_1], z(0))$ w chwili $t_1>0$.

Definicja 1. Zbiorem osiągalnym układu dynamicznego (1) w chwili $t_1>0$ nazywamy zbiór $K^+([\,0, t_1], z(0))$ określony za pomocą wzoru

$$K^+([0,t_1], z(0)) = \{ x(t_1,z(0),u) \in \mathbf{R}^n : x(t_1,z(0),u) = e^{At_1} x(0) + \int_0^{t_1} e^{t_1-\tau} \sum_{i=0}^{M} B_i u(\tau-h_i) d\tau, \quad u \in L^2([\,0, t_1],U) \}. \tag{3}$$

Wykorzystując pojęcie zbioru osiągalnego, zdefiniujemy dodatnią względną sterowalność w przedziale $[\,0, t_1]$ oraz aproksymacyjną dodatnią względną sterowalność w przedziale $[0, t_1]$ układu dynamicznego (1).

Definicja 2. Układ dynamiczny (1) nazywa się dodatnio względnie sterowalnym w przedziale $[\,0, t_1]$ ze stanu zupełnego $z(0) \in \mathbf{R}^n \times L^2([\,-h_M, 0], U)$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$K^+([0,t_1], z(0)) = \mathbf{R}^n_+ .$$

Definicja 3. Układ dynamiczny (1) nazywa się aproksymacyjnie dodatnio względnie sterowalnym w przedziale $[\,0, t_1]$ ze stanu zupełnego $z(0) \in \mathbf{R}^n \times L^2([\,-h_M, 0], U)$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\mathrm{cl}\, K^+([0,t_1], z(0)) = \mathbf{R}^n_+ ,$$

gdzie symbol cl oznacza domknięcie zbioru.

Zauważmy, że po przekształceniu wzoru (2) możemy na podstawie równości (3) napisać następującą równość:

$$K^+([0,t_1], z(0)) = K_M^+([0,t_1-h_M], x(0)) \cup K_{M-1}^+([t_1-h_M, t_1-h_{M-1}], x(t_1-h_M)) \cup \ldots \cup \quad (4)$$
$$\cup K_j^+([t_1-h_{j+1}, t_1-h_j], x(t_1-h_{j+1})) \cup \ldots \cup K_0^+([t_1-h_1, t_1], x(t_1-h_1)),$$

gdzie $K_j^+([t_1-h_{j+1}, t_1-h_j], x(t_1-h_{j+1}))$ dla każdego $j = 0,1, \ldots, M$ jest zbiorem osiągalnym układu bez opóźnień w postaci

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + (e^{A(h_0+\ldots+h_{j+1})}B_j + e^{A(h_0+\ldots+h_{j-2}+h_j)}B_{j-1} + \ldots + e^{A(h_1+\ldots+h_j)}B_0)\,u(t), \quad t \geq 0,$$

w przedziale $[t_1-h_{j+1}, t_1-h_j]$ ze stanu początkowego $x(t_1-h_{j+1})$, $j = 0,1, \ldots, M$.

Niech $e(1),\ldots,e(m)$ oraz $e[1],\ldots,e[n]$ oznaczają bazowe wektory jednostkowe odpowiednio w przestrzeniach $\mathbf{R}^m$ i $\mathbf{R}^n$.

Macierz $A = [a_{ij}]$, $i,j = 1,2, \ldots, n$ nazywa się macierzą Metzlera, jeżeli $a_{ij} \geq 0$ dla $i \neq j$. Wiadomo [3], że $e^{At} \geq 0$, tzn. elementy macierzy e^{At} są nieujemne, wtedy i tylko wtedy, gdy A jest macierzą Metzlera.

Lemat 1. [4], [1] Niech $e^{At} \geq 0$ oraz $B \geq 0$. Dla układu bez opóźnień w postaci

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t), \quad t \geq 0, \quad (5)$$

prawdziwe są nierówności

(a) $\mathrm{cl}\,K_t^+ = \mathrm{cl}\,\{\mathrm{co}\{e^{As}Bu: 0 \leq s \leq t, u \in \mathbf{R}_+^n\}\}$

$\mathrm{cl}\,K^+ = \mathrm{cl}\,\{\mathrm{co}\{e^{As}Bu: 0 \leq s, u \in \mathbf{R}_+^n\}\}$

(b) $\mathrm{cl}\,K_t^+ = \mathrm{cl}\,\{\mathrm{cocone}\{e^{As}Be(k): 0 \leq s \leq t, k = 1, \ldots, m\}\}$

$\mathrm{cl}\,K^+ = \mathrm{cl}\,\{\mathrm{cocone}\{e^{As}Be(k): 0 \leq s, k = 1, \ldots, m\}\}$,

gdzie $K_t^+ = K^+([0,t], x(0))$ oznacza zbiór osiągalny układu (5) w chwili $t \geq 0$ przy dodatnich sterowaniach, $K^+ = \bigcup_t K_t^+$, $t > 0$, clU oznacza domknięcie zbioru U, coU oznacza najmniejszy zbiór wypukły zawierający U, natomiast coconeU to najmniejszy stożek wypukły zawierający U i 0.

Lemat 2. [4], [1] Niech $e^{At} \geq 0$ oraz $B \geq 0$.

(a) Układ (5) jest aproksymacyjnie dodatnio sterowalny w chwili $t > 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego k, $k = 1, \ldots, n$ istnieje l, $l = 1, \ldots, m$ oraz stała $\mu > 0$, taka że $e[k] = \mu\,B\,e(l)$.

(b) Układ (5) jest aproksymacyjnie dodatnio sterowalny wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego k, $k = 1, \ldots, n$ istnieje l, $l = 1, \ldots, m$ oraz stała $\mu > 0$, taka że $e[k] = \mu\,B\,e(l)$ lub $e[k] = \lim_{t\to\infty}\left(\dfrac{T(t)\,B\,e(l)}{\|T(t)\,B\,e(l)\|}\right)$.

Poniższe twierdzenie stanowi warunek konieczny i wystarczający aproksymacyjnej sterowalności układów dynamicznych z opóźnieniami w sterowaniu postaci (1) przy dodatnich sterowaniach, czyli aproksymacyjnej dodatniej względnej sterowalności w ustalonym przedziale czasowym.

Twierdzenie 1. Niech A jest macierzą Metzlera oraz $e^{A(h_0+...+h_{j-1})}B_j + e^{A(h_0+...+h_{j-2}+h_j)}B_{j-1} + ... + e^{A(h_0+h_2+...+h_j)}B_1 + e^{A(h_1+...+h_j)}B_0 \geq 0$ dla każdego j = 0,1, ... , M. Wówczas układ dynamiczny (1) jest aproksymacyjnie dodatnio względnie sterowalny w przedziale $[0, t_1]$ dla każdego $t_1 > 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego k, k = 1, ... , n istnieje l, l = 1, ... , m oraz stała $\mu > 0$, taka że

$$e[k] = \mu\,(e^{A(h_0+...+h_{j-1})}B_j + ... + e^{A(h_1+...+h_j)}B_0)\,e(l) \text{ dla pewnego } j,\ j = 0,1, ... , M.$$

D o w ó d w a r u n k u w y s t a r c z a j ą c e g o: Jeżeli w przedziale $[0,t_1]$,dla każdego k, k = 1, ... , n istnieje l, l = 1, ... , m oraz stała $\mu > 0$, taka że $e[k] = \mu\,(e^{A(h_0+...+h_{j-1})}B_j + ... + e^{A(h_1+...+h_j)}B_0)\,e(l)$ dla pewnego j, j = 0,..., M, to na mocy Lematu1b) wnioskujemy, że albo $e[k]\in \mathrm{cl}\,K_0^+([t_1-h_1,t_1],x(t_1-h_1))$ albo $e[k]\in \mathrm{cl}\,K_1^+([t_1-h_2,t_1-h_1],x(t_1-h_2))$ albo ... albo $e[k]\in \mathrm{cl}\,K_M^+([0,t_1-h_M],x(0))$. Korzystając z równości (4) wnioskujemy, że $e[k]\in \mathrm{cl}\,K^+([0,t_1], z(0))$, czyli $\mathrm{cl}\,K^+([0,t_1], z(0)) = \mathbf{R}_+^n$. Zatem układ dynamiczny (1) jest aproksymacyjnie dodatnio względnie sterowalny w przedziale $[0,t_1]$.

D o w ó d w a r u n k u k o n i e c z n e g o: Z drugiej strony, jeżeli układ jest aproksymacyjnie dodatnio względnie sterowalny w przedziale $[0,t_1]$, czyli $\mathrm{cl}\,K^+([0,t_1], z(0)) = \mathbf{R}_+^n$, to dla każdego k,k = 1, ..., n, $e[k]\in \mathrm{cl}\,K^+([0,t_1], z(0))$. Zatem istnieje ciąg $\{x_n\}$, $n\to\infty$, elementów z $K^+([0,t_1], z(0))$, zbieżny do e[k]. Przedstawmy x_n, jako $x_n = \sum_{j=0}^{M} x_{jn}$, gdzie $x_{jn}\in K_j^+([t_1-h_{j+1},t_1-h_j],x(t_1-h_{j+1}))$ dla każdego j = 0,1, ... ,M. Ponieważ ciągi $\{x_{jn}\}$, $n\to\infty$, mają wyrazy nieujemne, a ich suma jest zbieżna, każdy z nich jest ograniczony. Zatem każdy z nich zawiera podciąg $\{x_{jn_k}\}$, $n\to\infty$, zbieżny odpowiednio do x_j. Otrzymujemy $\sum_{j=0}^{M} x_j = e[k]$, a zatem $x_j = \lambda_j e[k]$, gdzie $\sum_{j=0}^{M}\lambda_j = 1$, $0<\lambda_j\leq 1$ dla każdego j=0,...,M, skąd wnioskujemy, że $e[k]\in \mathrm{cl}\,K_j^+([t_1-h_{j+1},t_1-h_j],x(t_1-h_{j+1}))$ dla pewnego j = 0, ...,M. Ostatecznie, na mocy dowodu lematu 2a) (patrz [4], dowód tw.4.9a)) istnieje l, l = 1, ... , m oraz stała $\mu > 0$, taka że $e[k] = \mu\,(e^{A(h_0+...+h_{j-1})}B_j + ... + e^{A(h_1+...+h_j)}B_0)\,e(l)$ dla pewnego j, j = 0,1, ... , M, co kończy dowód.

Jako wniosek w przypadku pojedynczego opóźnienia h = 1 otrzymujemy twierdzenie 3.1 zamieszczone w pracy [1]. Uwzględniając, że A jest macierzą Metzlera wtedy i tylko wtedy, gdy $e^{At} \geq 0$ oraz przyjmując M = 1, twierdzenie to można zapisać następująco:

Wniosek 1. Niech A jest macierzą Metzlera, $B_0 \geq 0$ oraz $e^A B_0 + B_1 \geq 0$. Wówczas układ dynamiczny (1) jest aproksymacyjnie dodatnio względnie sterowalny w przedziale $[0, t_1]$ dla każdego $t_1 > 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego k, k = 1, ... , n istnieje l, l = 1, ... , m oraz stała $\mu > 0$, taka że $e[k] = \mu\, B_0\, e(l)$ lub $e[k] = \mu\,(e^A B_0 + B_1)\, e(l)$.

Kolejny wniosek podaje warunek wystarczający aproksymacyjnej dodatniej względnej sterowalności w przedziale $[0, t_1]$. Układ o postaci (1) pokazuje, jakiej postaci musi być macierz B, aby z aproksymacyjnej dodatniej sterowalności w przedziale $[0, t_1]$ układu bez opóźnień o postaci (5) wynikała aproksymacyjna dodatnia względna sterowalność w przedziale $[0, t_1]$ układu z opóźnieniami opisanego równaniem (1).

Wniosek 2. Niech A jest macierzą Metzlera oraz $e^{A(h_0+...+h_{M-1})}B_M + ... + e^{A(h_1+...+h_M)}B_0 > 0$. Jeżeli układ bez opóźnień w postaci

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + [\,e^{A(h_0+...+h_{M-1})}B_M + ... + e^{A(h_1+...+h_M)}B_0]\,u(t), \quad t > 0, \tag{6}$$

jest aproksymacyjnie dodatnio sterowalny w przedziale $[0, t_1]$ dla każdego $t_1 > 0$, to układ dynamiczny (1) jest aproksymacyjnie dodatnio względnie sterowalny w przedziale $[0, t_1]$.

D o w ó d: Wynika z twierdzenia 1 oraz lematu 2a). Spełnione są założenia twierdzenia 1. Jeżeli układ bez opóźnień (6) jest aproksymacyjnie dodatnio sterowalny w ustalonym przedziale $[0,t_1]$, to na podstawie lematu 2a) dla każdego k, k = 1, ..., n istnieje l, l = 1, ... , m oraz stała $\mu > 0$, taka że $e[k] = \mu\,(e^{A(h_0+...+h_{M-1})}B_M + ... + e^{A(h_1+...+h_M)}B_0)\,e(l)$. Z tej równości wynika, że dla każdego k, k = 1, ... , n istnieje l, l = 1, ... , m oraz stała $\mu > 0$, taka że $e[k] = \mu\,(e^{A(h_0+...+h_{j-1})}B_j + ... + e^{A(h_1+...+h_j)}B_0)\,e(l)$ dla pewnego j, j = 0, 1, ... , M, mianowicie dla j = M. Zatem na mocy twierdzenia 1 układ (1) jest aproksymacyjnie dodatnio względnie sterowalny w przedziale $[0, t_1]$.

Rozpatrując dalej układ dynamiczny (1) w przedziale [0, t] załóżmy, że $t > h_M$ oraz $u(s) = u_0(s)$ dla $s \in (-h_M, 0)$ i $u(s) = u_1(s)$ dla $s \in (t-h_1, t)$ są danymi funkcjami. Przekształcając wzór (2), otrzymamy następującą formułę:

$$x(t, z(0), u) = e^{At}\,\widetilde{x}(0) + \int_0^{t-h_M} e^{A(t-\sum_{i=0}^{M} h_i - \tau)}\,[\,e^{A(h_0+...+h_{M-1})}B_M + e^{A(h_0+...+h_{M-2}+h_M)}B_{M-1} + ... + \tag{7}$$

$$+ e^{A(h_1+...+h_M)}B_0\,]\,u(\tau)\,d\tau + ... + \int_{t-h_{j+1}}^{t-h_j} e^{A(t-\sum_{i=0}^{j} h_i - \tau)}\,[\,e^{A(h_0+...+h_{j-1})}B_j +$$

$$+ e^{A(h_0+...+h_{j-2}+h_j)}B_{j-1} + ... + e^{A(h_1+...+h_j)}B_0\,]\,u(\tau)\,d\tau + ... +$$

$$+ \int_{t-h_2}^{t-h_1} e^{A(t-h_1-\tau)}\,[\,B_1 + e^{Ah_1}B_0\,]\,u(\tau)\,d\tau,$$

gdzie $\widetilde{x}(0) = x(0) + \int_{-h_M}^{0} e^{-A(\tau+h_M)}B_M\,u(\tau)\,d\tau + \int_{-h_{M-1}}^{0} e^{-A(\tau+h_{M-1})}B_{M-1}\,u(\tau)\,d\tau + ... +$

$$+ \int_{-h_1}^{0} e^{-A(\tau+h_1)}B_1\,u(\tau)\,d\tau\,] + \int_{t-h_1}^{t} e^{-\tau A}B_0\,u(\tau)\,d\tau.$$

Zdefiniujemy pojęcia dodatniej absolutnej sterowalności w przedziale $[0, t_1]$ oraz aproksymacyjnej dodatniej absolutnej sterowalności w przedziale $[0, t_1]$ układu dynamicznego (1).

Definicja 4. Układ dynamiczny (1) nazywa się dodatnio absolutnie sterowalnym w przedziale $[0, t_1]$ ze stanu zupełnego $z(0) \in \mathbf{R}^n \times L^2([-h_M, 0], U)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego wektora $x_1 \in \mathbf{R}^n_+$ oraz dowolnej funkcji $u_1 \in L^2([t_1-h_1, t_1], U)$ istnieje takie sterowanie $u \in L^2([0, t_1-h_1], U)$, że stan zupełny w chwili t_1 układu dynamicznego (1) spełnia warunek $z(t_1) = \{x_1, u_1\}$, czyli

$$K^+([0,t_1], z(0), z(t_1)) = \mathbf{R}^n_+ .$$

Definicja 5. Układ dynamiczny (1) nazywa się układem aproksymacyjnie dodatnio absolutnie sterowalnym w przedziale $[0, t_1]$ ze stanu zupełnego $z(0) \in \mathbf{R}^n \times L^2([-h_M, 0], U)$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\mathrm{cl}\, K^+([0,t_1], z(0), z(t_1)) = \mathbf{R}^n_+ .$$

Dodatnia absolutna sterowalność w przedziale $[0, t_1]$ oraz aproksymacyjna dodatnia absolutna sterowalność w przedziale $[0, t_1]$ są pojęciami silniejszymi odpowiednio od dodatniej względnej sterowalności w przedziale $[0, t_1]$ oraz od aproksymacyjnej dodatniej względnej sterowalności w przedziale $[0, t_1]$.

Przyjmując $x(0)= 0$, $\tilde{x}(0) = 0$, $u_0(s) =0$ dla $s\in(-h_M, 0)$ oraz $u_1(s) = 0$ dla $s\in(t-h_1, t)$, otrzymamy zależność analogiczną do równości (4), tzn. dla $t_1 > h_M$

$$K^+([0,t_1], z(0)) = K^+_M([0, t_1 - h_M], x(0)) \cup K^+_{M-1}([t_1 - h_M, t_1 - h_{M-1}], x(t_1 - h_M)) \cup \ldots \cup \tag{8}$$
$$\cup K^+_j([t_1 - h_{j+1}, t_1 - h_j], x(t_1 - h_{j+1})) \cup \ldots \cup K^+_1([t_1 - h_2, t_1 - h_1], x(t_1 - h_2)),$$

gdzie $K^+_j([t_1 - h_{j+1}, t_1 - h_j], x(t_1 - h_{j+1}))$ dla każdego $j = 0,1, \ldots , M$ jest zbiorem osiagalnym układu bez opóźnień w postaci

$$\dot{x}(t) = A\, x(t) + (e^{A(h_0+\ldots+h_{j-1})} B_j + e^{A(h_0+\ldots+h_{j-2}+h_j)} B_{j-1} + \ldots + e^{A(h_1+\ldots+h_j)} B_0)\, u(t), \quad t \geq 0, \tag{9}$$

w przedziale $[t_1 - h_{j+1}, t_1 - h_j]$ ze stanu początkowego $x(t_1 - h_{j+1})$, $j = 0,1, \ldots, M$.

Konsekwencją wzoru (9) jest następujące twierdzenie:

Twierdzenie 2. Niech A jest macierzą Metzlera oraz $e^{A(h_0+\ldots+h_{j-1})} B_j + e^{A(h_0+\ldots+h_{j-2}+h_j)} B_{j-1} + \ldots + e^{A(h_0+h_2+\ldots+h_j)} B_1 + e^{A(h_1+\ldots+h_j)} B_0 \geq 0$ dla każdego $j = 0,1, \ldots , M$ oraz $x(0)= 0$, $u_0(s) =0$ dla $s\in(-h_M, 0)$ oraz $u_1(s) = 0$ dla $s\in(t-h_1, t)$. Wówczas układ dynamiczny (1) jest aproksymacyjnie dodatnio absolutnie sterowalny w przedziale $[0, t_1]$ dla każdego $t_1 > 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy każdy z układów bez opóźnień w postaci (9) jest aproksymacyjnie dodatnio sterowalny w odpowiednim przedziale $[t_1 - h_{j+1}, t_1 - h_j]$ ze stanu początkowego $x(t_1 - h_{j+1})$, $j = 1, \ldots, M$, czyli wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego k, $k = 1, \ldots , n$ istnieje l, $l = 1, \ldots , m$ oraz stała $\mu > 0$, taka że

$$e[k] = \mu\, (e^{A(h_0+\ldots+h_{j-1})} B_j + \ldots + e^{A(h_1+\ldots+h_j)} B_0)\, e(l) \text{ dla każdego } j,\ j = 1, \ldots , M.$$

3. Przykłady

Podane teraz zostaną przykłady ilustrujące powyższe rozważania teoretyczne.

Przykład 1. Rozpatrujemy układ dynamiczny opisany następującym równaniem różniczkowym

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \quad t > 0. \tag{10}$$

Ustalmy $t_1 > 0$. Zauważmy, że $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ jest macierzą Metzlera oraz $B_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \geq 0$, $n = 2$, $m = 1$ oraz $e(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $e(2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, to wektory bazowe przestrzeni $\mathbf{R}^n$ i $e[1] = 1$ są wektorem bazowym przestrzeni $\mathbf{R}^m$.

Na mocy lematu 2a) układ (10) nie jest aproksymacyjnie dodatnio sterowalny w przedziale $[0, t_1]$, ponieważ nie istnieje taka stała $\mu > 0$, że $e(2) = \mu\, B_0\, e[1]$.

Do układu dynamicznego (10) wprowadzamy stałe opóźnienie sterowania $h_1 = 1$. Pokażemy, że układ z opóźnieniem w postaci

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} -e^{-1} \\ 1 \end{bmatrix} u(t-1), \quad t > 0 \tag{11}$$

jest aproksymacyjnie dodatnio względnie sterowalny w przedziale $[0, t_1]$. Obliczamy e^{At}, $e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$, czyli $e^{A} = \begin{bmatrix} e^{-1} & e^{-1} - e^{-2} \\ 0 & e^{-2} \end{bmatrix}$. Ponadto $e^{A}B_0 + B_1 \geq 0$, bo $e^{A}B_0 + B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Na macy twierdzenia 1 układ (11) jest aproksymacyjnie dodatnio względnie sterowalny w przedziale $[0, t_1]$, ponieważ:

$$e(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = B_0\, e[1] \text{ oraz } e(2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = (e^{A}B_0 + B_1)\, e[1].$$

Pokazaliśmy, że wprowadzając opóźnienie do układu, który nie jest aproksymacyjnie dodatnio sterowalny, można uzyskać jego sterowalność.

Przykład 2. Mamy układ dynamiczny z opóźnieniami w sterowaniu o postaci

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t-1) + \begin{bmatrix} e - e^{-2} - e^{-1} - e^{2} \\ e^{2} \end{bmatrix} u(t-2), \quad t > 0. \tag{12}$$

Układ ten jest aproksymacyjnie dodatnio względnie sterowalny w przedziale $[0, t]$, ponieważ spełnia założenia twierdzenia 1 oraz

$$e(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = B_0\, e[1] \text{ oraz } e(2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = (e^{3A}B_0 + e^{2A}B_1 + e^{A}B_2)\, e[1].$$

Zauważmy, że układ bez opóźnień o postaci (6) przyjmie tutaj postać

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t),$$

ponieważ $e^{3A}B_0 + e^{2A}B_1 + e^{A}B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, a ten, który pokazano w przykładzie 1, nie jest aproksymacyjnie dodatnio sterowalny. W ten sposób wykazaliśmy, że we wniosku 2 nie może być równoważności.

4. Podsumowanie

W pracy podane zostały twierdzenia dotyczące aproksymacyjnej dodatniej sterowalności (względnej i absolutnej) układów dynamicznych z wielokrotnymi, stałymi opóźnieniami w sterowaniu. Pokazują one możliwości uzyskania stanów o dodatnich współrzędnych przy dodatnich sterowaniach dla układów z opóźnieniami w sterowaniu. W przykładzie 1 pokazano, że jeżeli w układzie bez opóźnień, który nie jest aproksymacyjnie dodatnio sterowalny, wprowadzimy opóźnienia sterowania, to możemy uzyskać jego aproksymacyjną dodatnią względną sterowalność. Przykład 2 jest ilustracją wniosku 2 i pokazuje zależności pomiędzy pewnymi układami z i bez opóźnień.

LITERATURA

1. El-Hodiri M. A., Van Vleck F. S.: Positive controllability of linear systems with delay. Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, 152, New York 1993, 469 – 479;
2. Klamka J.: Sterowalność układów dynamicznych. PWN, Warszawa – Wrocław 1990.
3. Minc H.: Nonnegative matrices, J.Wiley, New York 1988.
4. Schanbacher T.: Aspects of positivity in control theory, SIAM J. Control and Opt., 27, 3, 1989, 457 – 475.
5. Sikora B.: Sterowalność liniowych układów dynamicznych z opóźnieniami w sterowaniu przy ograniczeniach na sterowanie. Zeszyty Naukowe Politechniki Śl., Automatyka, 122, 1998, ss. 183 –197.

Recenzent: Prof.dr hab.inż. Andrzej Świerniak

Wpłynęło do Redakcji 8 maja 2000 r.

Abstract

In this paper we consider linear, time-invariant, finite dimensional dynamical systems with delays in control with positive controls described by state equation of the form (1). We give definitions of positive and approximately positive relative and absolute controllability of the system (1). We formulate some theorems which give the criteria of approximately positive relative and absolute controllability for such systems. These theorems tell us, when we can reach states of positive coordinates by nonnegative controls. In presented examples we illustrate mutual dependencies between controllability of the system without delays and related to it the system with delays in control. We show that by introducing delays in the system without delays, which is not approximately positively controllable in [0, t] we can get approximately positive relative controllability in [0,t]. The results obtained are generalization of results published in [1].