

Stefan POSTRZEDNIK

Instytut Techniki Ciepłej

EKSTREMALNE PARAMETRY NIEODWRACALNEGO PRZEPŁYWU GAZU
W DYSZY BENDEMANN

Streszczenie. Wyznaczono funkcje przepływu (strumieni-masy, pędu, energii kinetycznej) gazu doskonałego, poddanego adiabatycznej nieodwracalnej ekspansji w dyszy zbieżnej Bendemanna. Ustalono ekstremalne parametry przepływu, dotyczące poszczególnych strumieni, z uwzględnieniem odpowiednich ograniczeń.

WAŻNIEJSZE OZNACZENIA

- A - przekrój minimalny dyszy,
a - prędkość dźwięku,
c_p - izobaryczna, właściwa pojemność cieplna,
E^p - energia kinetyczna strugi,
f, F }
g, G } - funkcje przepływu,
h, H }
i - entalpia czynnika,
J - pęd strugi,
ṁ - strumień masy,
m - parametr funkcji przepływu,
(Ma) - liczba Macha,
P - ciśnienie bezwzględne,
S - stała przepływu,
T - temperatura bezwzględna,
w - prędkość przepływu,
W - parametr zredukowany,
v - objętość właściwa,
X - funkcja przepływu (uogólniona),
β - stosunek ciśnień,
η - sprawność przemiany,
Θ - stosunek temperatur,
ε - stosunek ciepł właściwych.

INDEKSY DOTYCZĄ

- }^x - przepływu krytycznego,
- }^E - punktu ekstremalnego,
- } - przekroju minimalnego,
- }_o - stanu spoczynkowego,
- }_s - przemiany izentropowej.

1. WPROWADZENIE

Dysza zbieżna Bendemanna jest typowym elementem, w którym realizuje się proces rozprężania czynnika. Rozwiązanie to można zazwyczaj traktować jako adiatomiczne [1], z uwzględnieniem jednak nieodwracalności samej przemiany. Istotnymi wielkościami, jakie determinują działanie takiego układu są wartości parametrów, osiągnane w przekroju minimalnym dyszy:

- prędkość wypływu w ,
- strumień substancji \dot{m} ,
- pęd wypływającej strugi \dot{J} ,
- energia kinetyczna strugi \dot{E} .

Każda z tych funkcji posiada swoje teoretyczne maksimum. Ponieważ w obrębie tego typu dyszy realizowane mogą być przepływy poddźwiękowe [1] (prędkość dźwięku może wystąpić co najwyżej w przekroju minimalnym), więc osiągnięcie tego teoretycznego ekstremum nie zawsze jest możliwe. W pracy chodzi więc o wyznaczenie zredukowanych form i dokonanie analizy wspomnianych funkcji przepływu, określenie ich teoretycznych ekstremów i możliwości osiągnięcia tych parametrów ekstremalnych.

2. PODSTAWOWE ZWIĄZKI TERMODYNAMICZNE

Parametry czynnika podlegającego nieodwracalnej ekspansji adiatermicznej (w dyszy zbieżnej Bendemanna) określa się za pomocą sprawności przemiany η , [1] zdefiniowanej jako - rys. 1

$$\eta \stackrel{\text{GD}}{=} \frac{dF}{i_o - i_s} \stackrel{\text{GD}}{=} \frac{T_o - T}{T_o - T_s} \quad (1)$$

coż

$$s_o(T_o p_o) = s(T_s, p) \Rightarrow \stackrel{\text{GD}}{=} T_s = T_o \left(\frac{p}{p_o}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \quad (2)$$

Prędkość, jaką osiąga czynnik w przekroju minimalnym, wynosi

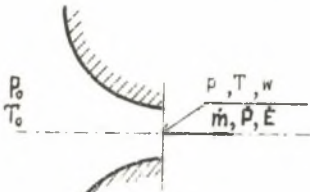
$$w = \sqrt{2(i_o - i)} \stackrel{\text{GD}}{=} 2\sqrt{c_p(T_o - T)} \quad (3)$$

Jak wiadomo [3] prędkość ta podlega ograniczeniu, tak by

$$Ma) \frac{df}{a} \leq 1, \quad (4)$$

gdzie

$$a = \sqrt{-v^2 \frac{\partial p}{\partial v}} \stackrel{GD}{=} \sqrt{\kappa R T} \quad (5)$$



Wprowadzając dodatkowo zmienne i parametry względne

$$\theta \stackrel{df}{=} \frac{T}{T_0}, \quad \beta \stackrel{df}{=} \frac{p}{p_0}, \quad \theta_s \stackrel{df}{=} \frac{T_s}{T_0} \quad (6)$$

ustala się z (1), (2), (3), (4), (5) związku

$$\eta = \frac{1 - \theta}{1 - \theta_s} \quad (1a)$$

$$\theta_s = \beta \frac{\kappa - 1}{\kappa} \quad (2a)$$

$$\frac{1}{\theta} = 1 + \frac{\kappa - 1}{2} (Ma)^2, \quad (7)$$

Przy warunku $(Ma)_m = 1$ uzyskuje się z (7) i (1a), (2a)

$$\theta^* = \frac{2}{\kappa + 1}, \quad (8)$$

$$\beta^* = \left[1 - \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \frac{1}{\eta} \right]^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}} \quad (9)$$

Rys. 1. Rozprężanie w dyszy Bendemannne

Równanie (9) pozwala podać warunek na minimalną wartość η_A^* sprawności dyszy, przy której możliwe jeszcze jest osiągnięcie prędkości dźwięku w przekroju minimalnym

$$\eta_A^* = \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1}. \quad (10)$$

Ten skrajny przypadek nie jest jednak możliwy do zrealizowania ze względu na fakt, że:

- dyszą musiałyby panować idealna próżnia (z (9) wynika bowiem $\beta_A^* = 0$, $\theta_{S,A}^* = 0$).

- strumień czynnika przepływającego maleje wówczas do zera (gdyż $v_A^* \Rightarrow \infty$,
a więc $\dot{m}_A^* \sim (\frac{w}{v})_A^* \Rightarrow 0$),

czyli ostatecznie

$$1 \geq \eta > \eta_A^*.$$

Sprawności rzeczywistych dysz zbieżnych bywają jednak znacznie większe od wartości η_A^* [4].

3. FUNKCJE PRZEPŁYWU CZYNNIKA

Zasadnicze funkcje przepływu, dotyczące przekroju minimalnego dyszy zbieżnej określa się z zależności

$$\dot{m} = A \left(\frac{\bar{w}_v}{v} \right) \quad \text{dla strumienia masy,} \quad (11)$$

$$\dot{J} = \dot{m} \bar{w}_p \quad \text{dla pędu strugi,} \quad (12)$$

$$\dot{E} = \dot{m} \frac{\bar{w}_m^2}{2} \quad \text{dla energii kinetycznej strugi.} \quad (13)$$

Przyjmując założenie, że średnie prędkości przepływu (prędkość: objętościowa \bar{w}_v , pędowa \bar{w}_p , masowa \bar{w}_m) są równe [1] ($\bar{w}_v = \bar{w}_p = \bar{w}_m = w$), wystarczy analizować dalej następujące zależności funkcyjne:

$$f \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{w}{v} \right) \quad \text{dla strumienia substancji,} \quad (14)$$

$$g \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{w^2}{v} \right) \quad \text{dla pędu,} \quad (15)$$

$$h \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{w^3}{v} \right) \quad \text{dla energii kinetycznej strugi.} \quad (16)$$

Po wprowadzeniu wielkości odniesienia

$$w_0 = \sqrt{2 \frac{\gamma}{\gamma-1} R T_0} \quad \text{dla prędkości oraz} \quad (17)$$

$$v_0 = \frac{R T_0}{P_0} \left(\frac{\gamma+1}{2} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad \text{dla objętości właściwej,} \quad (18)$$

uzyskuje się z (14), (15), (16) oraz (1), (2), (3), (6)

$$F = S_F \frac{\beta \sqrt{1 - \theta}}{\theta}, \quad (19)$$

gdzie

$$F \stackrel{\text{df}}{=} \frac{f v_o}{w_o}, \quad S_F = \sqrt{\frac{\mathcal{X}+1}{\mathcal{X}-1}} \left(\frac{\mathcal{X}+1}{2}\right)^{\frac{1}{\mathcal{X}-1}}, \quad (20)$$

$$G = S_G \beta \frac{1 - \theta}{\theta}, \quad (21)$$

gdzie

$$G \stackrel{\text{df}}{=} \frac{g v_o}{w_o^2}, \quad S_G = \left(\frac{\mathcal{X}+1}{\mathcal{X}-1}\right) \left(\frac{\mathcal{X}+1}{2}\right)^{\frac{1}{\mathcal{X}-1}}, \quad (22)$$

$$H = S_H \beta \frac{(1 - \theta) \sqrt{1 - \theta}}{\theta}, \quad (23)$$

gdzie

$$H \stackrel{\text{df}}{=} \frac{h v_o}{w_o^3}, \quad S_H = \left(\frac{\mathcal{X}+1}{\mathcal{X}-1}\right)^{3/2} \left(\frac{\mathcal{X}+1}{2}\right)^{\frac{1}{\mathcal{X}-1}}, \quad (24)$$

Powyższe funkcje (19), (21), (23) dadzą się wyrazić poprzez jeden z parametrów: θ , β , (Ma) oraz η , a mianowicie:

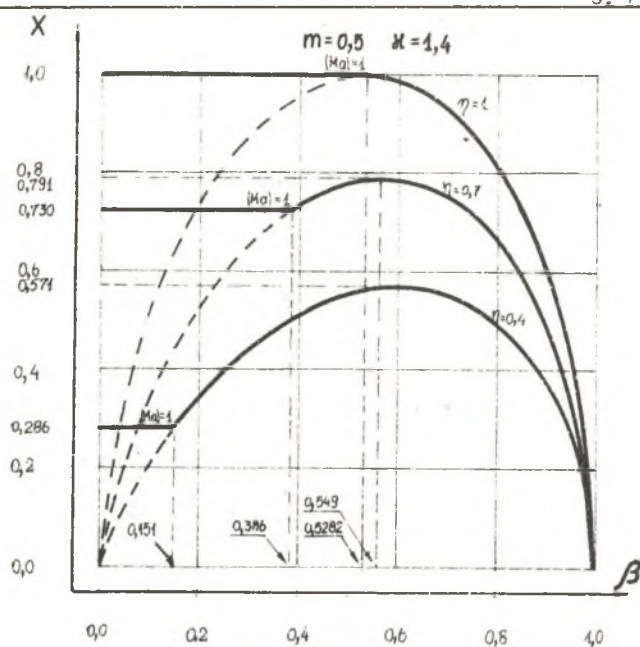
$$X_m = S_m \frac{(1 - \theta)^m}{\theta} \left(1 - \frac{1 - \theta}{\eta}\right)^{\frac{\mathcal{X}}{\mathcal{X}-1}} \quad (25)$$

$$X_m = S_m \frac{\beta}{1 - \eta \left(1 - \beta \frac{\mathcal{X}-1}{\mathcal{X}}\right)} \left[\eta \left(1 - \beta \frac{\mathcal{X}-1}{\mathcal{X}}\right)\right]^m \quad (26)$$

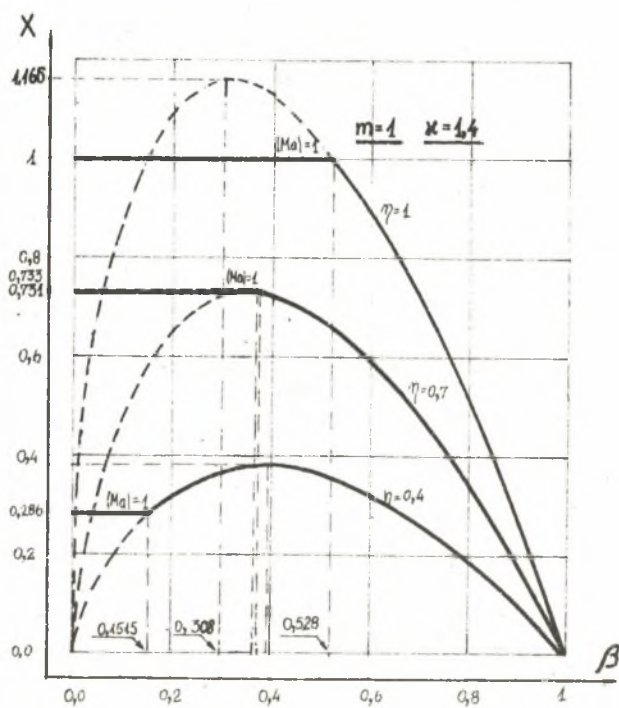
$$X_m = S_m (1 + Z) \left(\frac{Z}{1 + Z}\right)^m \left[1 - \frac{Z}{(1 + Z)\eta}\right]^{\frac{\mathcal{X}}{\mathcal{X}-1}} \quad (27)$$

gdzie

$$S_m = \left(\frac{\mathcal{X}+1}{\mathcal{X}-1}\right)^m \left(\frac{\mathcal{X}+1}{2}\right)^{\frac{m}{\mathcal{X}-1}}, \quad Z = \frac{\mathcal{X}-1}{2} (Ma)^2$$



Rys. 2. Funkcja przepływu strumienia masy

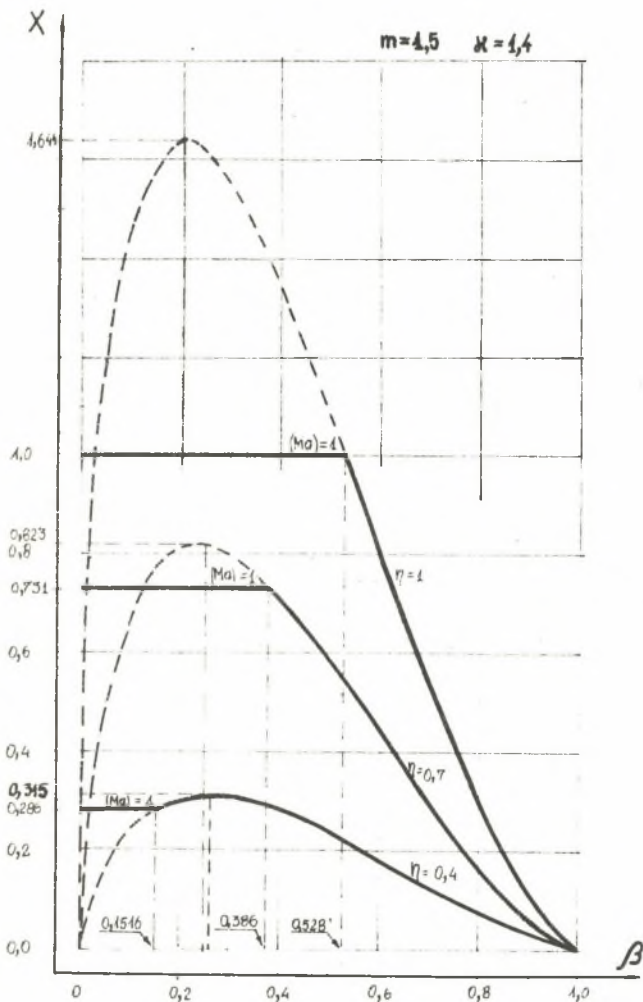


Rys. 3. Funkcja przepływu pędu strugi

$$m = \begin{cases} 0,5 & \text{dla strumienia masy, tzn. } X_{0,5} \equiv F, \quad S_{0,5} \equiv S_F, \\ 1,0 & \text{dla pędu, tzn. } X_{1,0} \equiv G, \quad S_{1,0} \equiv S_G, \\ 1,5 & \text{dla energii kinetycznej, tzn. } X_{1,5} \equiv H, \quad S_{1,5} \equiv S_H. \end{cases} \quad (28)$$

Funkcje X_m $m = 0,5, 1,0, 1,5$ zostały tak zdefiniowane, aby przyjmowały wartość równą jedności przy przepływie maksymalnym w idealnej dyszy zbieżnej Bendemanna, tzn.

$$X_{0,5}(\eta=1, (Ma)=1) = X_{1,0}(\eta=1, (Ma)=1) = X_{1,5}(\eta=1, (Ma)=1) = 1,0. \quad (29)$$



Rys. 4. Funkcja przepływu energii kinetycznej strugi

Przykładowe zmiany funkcji (26), dla $\eta = 1,4$ oraz wybranych wartości $\eta \leq 1,0$ przedstawiono na rys. 2, 3, 4. Linią przerywaną zaznaczono tam pełny teoretyczny z punktu widzenia analizy matematycznej przebieg wybranej funkcji, zaś linia ciągła przedstawia rzeczywisty obraz odpowiedniej zależności.

Z uwagi na ograniczenie (4), należy zaznaczyć, że równania (25), (26) (27) są słuszne, gdy odpowiednio

$$\theta^* \leq \theta \leq 1, \quad \beta^* \leq \beta \leq 1, \quad 0 \leq z \leq \frac{\eta-1}{2}, \quad (30)$$

zaś poza tym

$$x_m = x_m^* = \left[\frac{\eta+1}{2} \left(1 - \frac{\eta-1}{\eta+1} \frac{1}{\eta} \right) \right]^{\frac{\eta}{\eta-1}} = \text{idem} \quad (31)$$

dla $m = 0,5, 1,0, 1,5$

$$0 < \beta \leq \beta^*,$$

przy czym, jak wynika z (31),

$$1 \geq x_{0,5}^* = x_{1,0}^* = x_{1,5}^* = \text{idem}. \quad (32)$$

Powyższa analiza pozwala wyciągnąć wniosek, że nieodwracalność przepływu ($\eta \leq 1$) powoduje zawsze zmniejszenie strumienia masy ($x_{0,5} \leq 1$) [2], pędu ($x_{1,0} \leq 1$), energii kinetycznej ($x_{1,5} \leq 1$), przy czym, przy przepływie krytycznym stopień zmniejszenia jest identyczny dla rozpatrywanych trzech parametrów przepływu.

4. PARAMETRY EKSTREMALNE FUNKCJI PRZEPŁYWU

Jak widać na rys. 2,3, 4 każda z funkcji x_m , $m = 0,5, 1,0, 1,5$ posiada swoje teoretyczne ekstremum. W zależności od sprawności dyszy η ekstremum to może być możliwe do osiągnięcia w rzeczywistości albo nie. Celem wyznaczenia współrzędnych teoretycznego ekstremum wybrano funkcję (26) i skorzystano z warunku

$$\frac{dx_m}{d\beta} = 0, \quad m = 0,5, 1,0, 1,5. \quad (33)$$

Ze względów obliczeniowych wprowadzono dodatkową wielkość

$$w \equiv 1 - \beta \frac{\eta-1}{\eta}, \quad (34)$$

a wtedy z (26) i (34) uzyskano

$$X_m = S_m \frac{(1 - W)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}{1 - \eta W} (\eta W)^m. \quad (35)$$

Biorąc pod uwagę zależność

$$\frac{dX_m}{d\beta} = \frac{dX_m}{dW} \cdot \frac{dW}{d\beta}, \quad (36)$$

a ponadto z (34)

$$\frac{dW}{d\beta} = -\frac{\alpha-1}{\alpha} \beta^{-\frac{1}{\alpha}} \neq 0, \quad (37)$$

w miejsce (33) uwzględniono, wobec (36), (37), warunek

$$\frac{dX_m}{dW} = 0, \quad m = 0.5, 1.0, 1.5,$$

wykorzystując także równanie (35).

Po wykonaniu odpowiednich przekształceń uzyskano równanie

$$\frac{\alpha}{\alpha-1} \frac{1}{(1 - W_E)} - \frac{\eta}{(1 - \eta W_E)} - \frac{m}{W_E} = 0. \quad (39)$$

Jest to równanie kwadratowe ze względu na W_E , które może być zapisane w formie

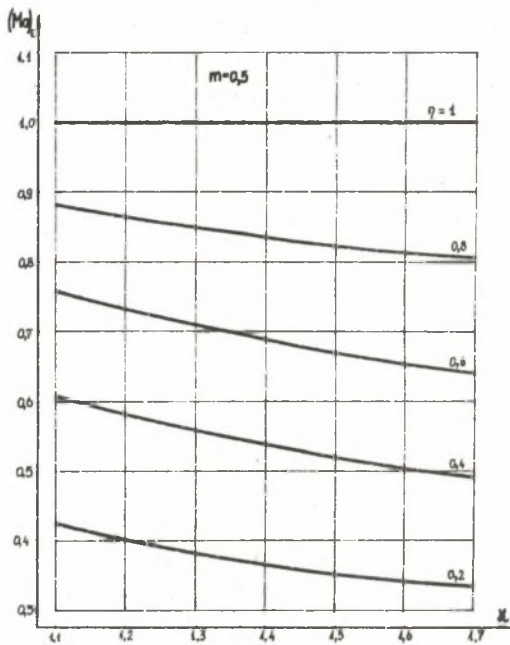
$$a W_E^2 + b W_E + c = 0, \quad (40)$$

gdzie

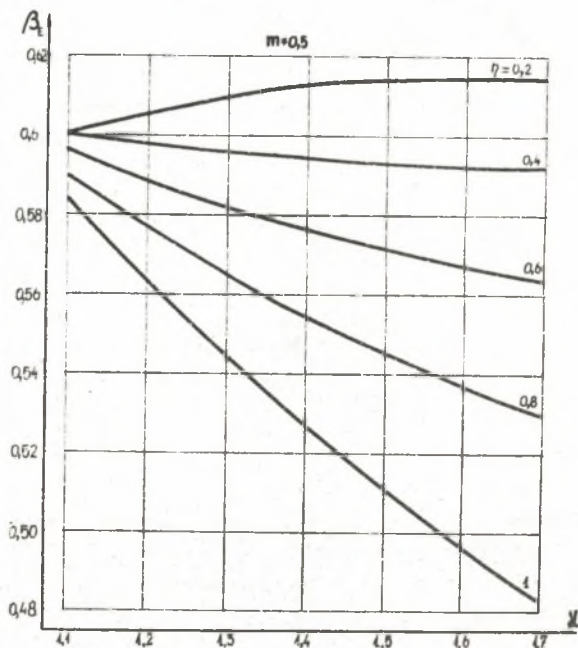
$$\begin{aligned} a &= \eta \left(1 - \frac{\alpha}{\alpha-1} - m\right) \\ b &= \frac{\alpha}{\alpha-1} - \eta(1 - m) + m \end{aligned} \quad (41)$$

$$c = -m$$

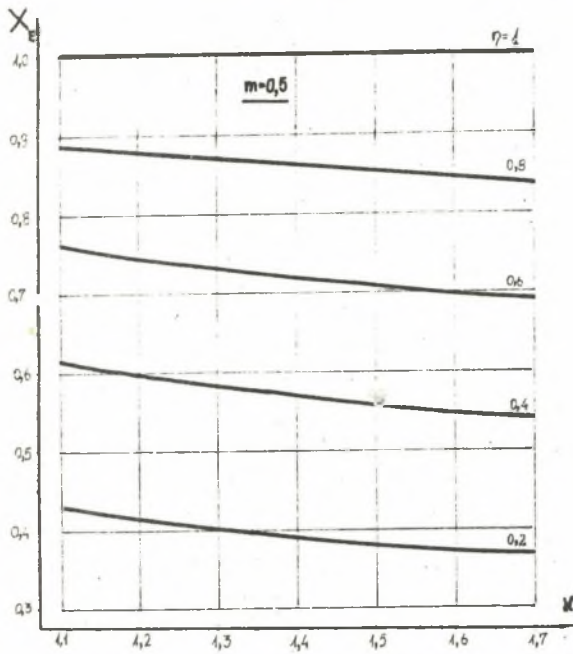
Równanie (40) posiada, jak wykazała analiza, zawsze jeden pierwiastek $W_E(\eta, \alpha, m)$ w interesującym przedziale $[0, 1]$. Wyznaczając więc z równania (40) parametr W_E oblicza się z (34) parametr β_E , z (35) X_m , a następnie w oparciu o równania (1a), (2a), (7) parametry θ_E , $(Ma)_E$ itd.



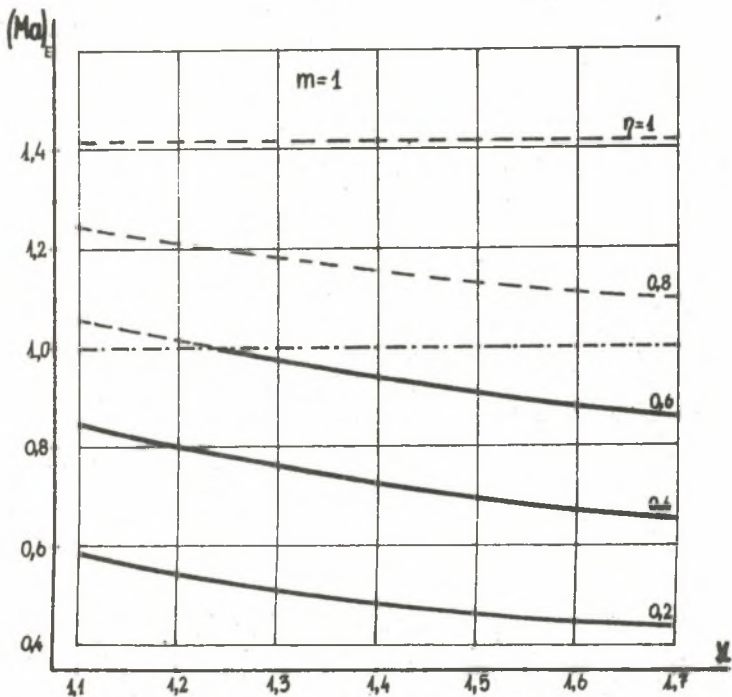
Rys. 5. Liczba Macha ekstremalnego strumienia masy



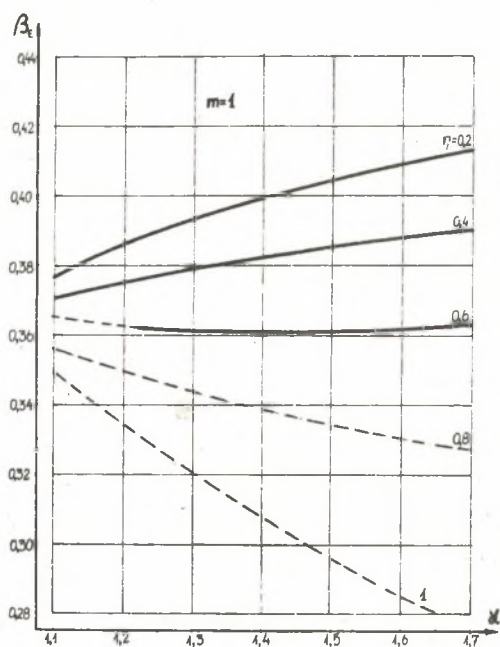
Rys. 6. Stosunek ciśnień ekstremalnego strumienia masy



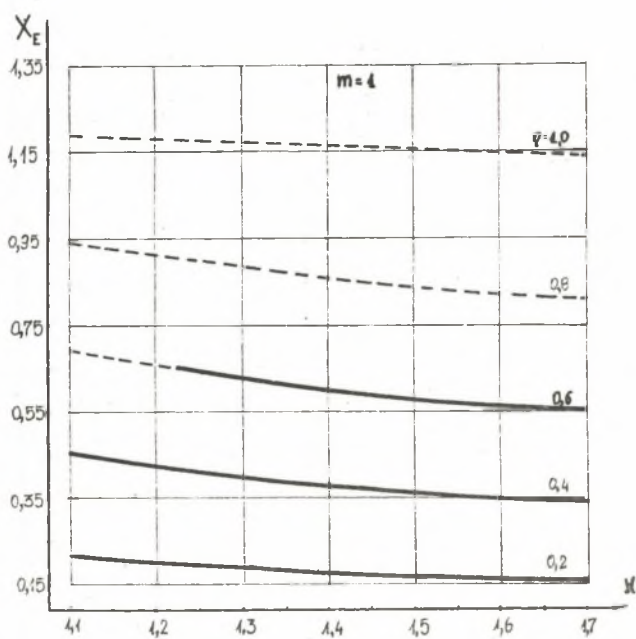
Rys. 7. Funkcja przepływu ekstremalnego strumienia masy



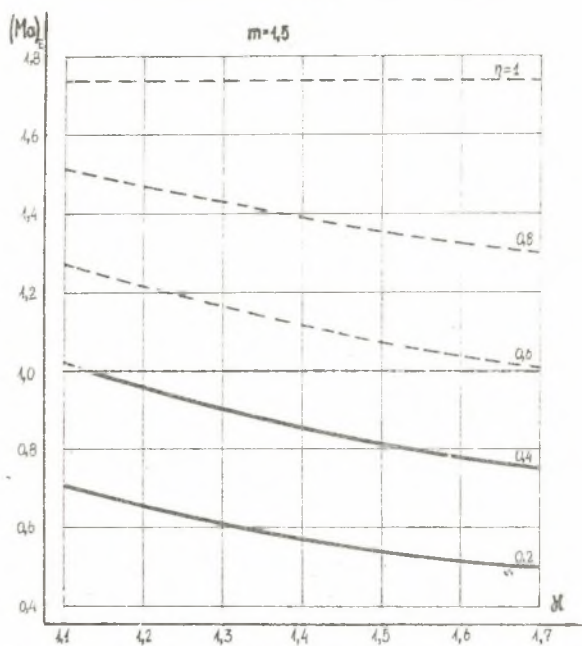
Rys. 8. Liczba Macha ekstremalnego pędu strugi



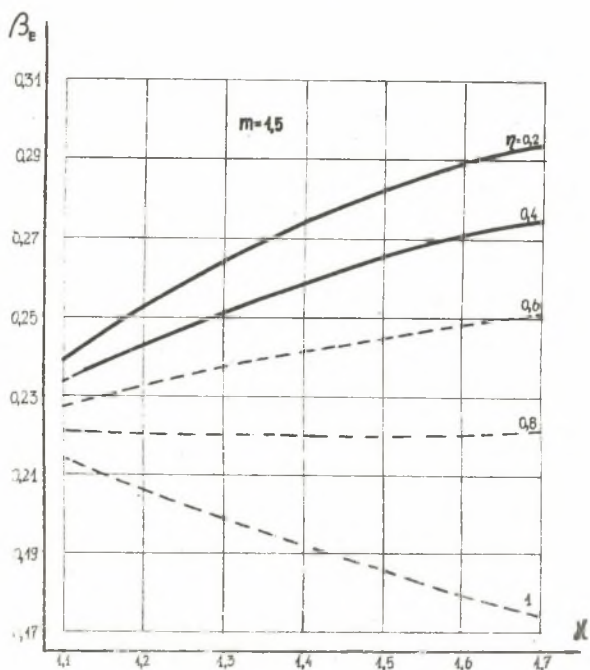
Rys. 9. Stosunek ciśnień ekstremalnego pędu strugi



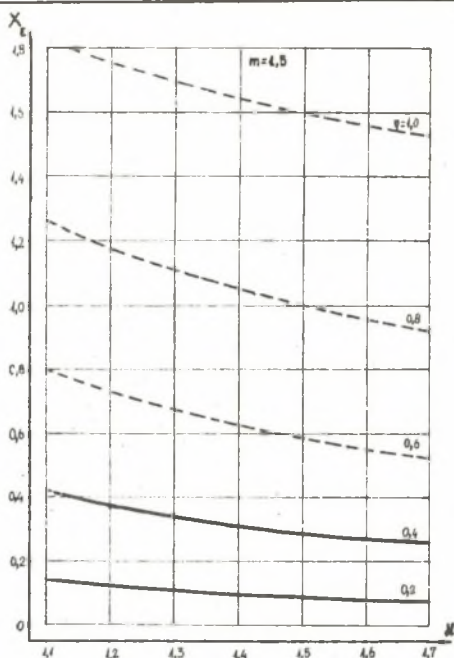
Rys. 10. Funkcja przepływu ekstremalnego pędu strugi



Rys. 11. Liczba Macha ekstremalnej energii kinetycznej strugi



Rys. 12. Stosunek ciśnień ekstremalnej energii kinetycznej strugi

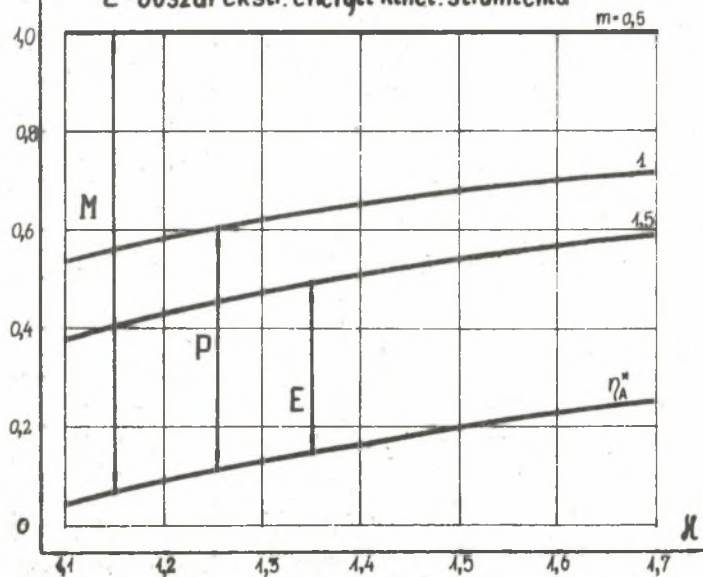


Rys. 13. Funkcja przepływu ekstremalnej energii kinetycznej strugi

M - obszar ekstr. masy strumienia

P - obszar ekstr. pędu strumienia

E - obszar ekstr. energii kinet. strumienia



Rys. 14. Obszary ekstremum funkcji przepływu

Ekstremalne wartości wybranych parametrów przedstawiono

na rys. 5, 6, 7 dla $m = 0.5$, $1.1 \leq \alpha \leq 1.7$,
 rys. 8, 9, 10 dla $m = 1.0$, $1.1 \leq \alpha \leq 1.7$,
 rys. 11, 12, 13 dla $m = 1.5$, $1.1 \leq \alpha \leq 1.7$.

Istotnym kryterium możliwości osiągnięcia w rzeczywistości odpowiedniego przepływu ekstremalnego jest spełnienie ograniczenia (4). Dlatego też, na rys. od 8 do 13 linią przerywaną zaznaczono krzywe mające tylko teoretyczne znaczenie. Uwaga ta dotyczy więc tylko pędu i energii kinetycznej strugi, zaś w przypadku strumienia masy istnieje zawsze możliwość osiągnięcia jego maksymalnej wartości, przy danej sprawności dyszy.

Zaobserwować tutaj można pewną prawidłowość, polegającą na tym, że dla coraz mniejszych sprawności η dyszy, parametr β_E przyjmuje coraz większe wartości (ekstremum przesuwa się w prawo - rys. 2, 3, 4). Podczas gdy krytyczna wartość stosunku β^* (równanie (9)) jest coraz mniejsza. Można więc skorzystać z warunku granicznego

$$\beta_E(\eta_E, m, \alpha) = \beta^*(\alpha, \eta^*) \quad (42)$$

i wyznaczyć takie wartości sprawności $\eta^*(\alpha, m)$, które wyznaczają granice obszarów, w których realizować można ekstremum funkcji przepływu - rys. 14. W oparciu o równanie (42), (39), (10) wyznaczono zależność

$$\frac{\eta_E^*}{\eta_A^*} = 1 + \frac{\alpha}{(\alpha - 1) \left(\frac{\alpha - 1}{2} + m \right)} \quad (43)$$

dla $m = 0.5$, 1.0 , 1.5 .

Warto zauważyć, że dla $m = 0.5$ (strumień masy $\eta_E^* = 1$).

LITERATURA

- [1] Ochęduszek St.: Termodynamika stosowana. PWT, Warszawa 1970.
- [2] Szargut J.: Teoria procesów cieplnych. PWN, Warszawa 1973.
- [3] Shapiro A.H.: The dynamics and thermodynamics of compressible fluid flow. New York 1953.
- [4] Jungowski W.: Podstawy dynamiki gazów. Warszawa 1965.

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ПАРАМЕТРЫ НЕОБРАТИМОГО ТЕЧЕНИЯ ГАЗА
В СОПЛЕ БЕНДЕМАННА

Р е з ю м е

В статье определены характерные функции (потока, количества движения, кинетической энергии) идеального газа во время адиабатического необратимого расширения в сопле Бендеманна.

Получено решение экстремальных параметров с учётом условий и ограничений.

EXTREME PARAMETERS OF IRREVERSIBLE GAS FLOW IN THE
BENDEMANN NOZZLE

S u m m a r y

The paper presents characteristic functions for the fluid, momentum kinetic energy fluxes of the ideal gas flowing through the irreversible Bendemann nozzle. The extreme parameters of the flow have been determined.