ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1979

Seria: ENERGETYKA z. 73 Nr kol. 617

Kazimierz KURPISZ

NIEUSTALONE POLA TEMPERATUR W WYMIENNIKACH CIEPŁA PRZY ZMIENNYM STRUMIENIU CZYNNIKA

Streszczenie. W pracy przedstawiono metodę wyznaczania rozkładu temperatur w wymienniku ciepła w stanie nieustalonym, wywołanym zmiennym strumieniem czynnika. W rozważaniach uwzględniono pojemność cieplną przegrody. Metodę zilustrowano prostym przykładem.

Wykaz oznaczeń:

$Bi = \frac{\alpha\delta}{\lambda}$ - liczba Biota

$Fo = \frac{aL}{\delta^2 w}$ - liczba Fouriera

$K = \frac{\alpha A}{W}$ - liczba kryterialna

L - długość wymiennika

T - zredukowana temperatura płynu

w - prędkość płynu

W - pojemność cieplna płynu

$Z = \frac{z}{L}$ - zredukowany wymiar wzdłuż przepływu

δ - grubość przegrody

θ - zredukowana temperatura przegrody

$\bar{\tau}$ - czas

$\tau = \frac{a}{\delta^2}\bar{\tau}$ - bezwymiarowy czas

$B = Bi_0 + Bi_{20}$

$C = \frac{K_0 \; Bi_{20}}{B}$ - pomocnicze oznaczenia

Równania różniczkowe bilansu energii dla wymienników ciepła wyprowadza się przy pewnych uproszczeniach, takich jak założenie stałych wartości własności fizycznych płynu i przegrody, wyrównaniu temperatur w kierunku prostopadłym do przepływu, pomijaniu akumulacji masy w płynach itp. W poniższej pracy zaniedbano także wpływ przewodzenia ciepła w przegrodzie. Założenia te były już wielokrotnie dyskutowane (por. [2]).

Dalsze rozważania dotyczą zmiennych w czasie strumieni czynnika, co zmusza do wprowadzenia nowych założeń. Zakłada się, że prędkość czynnika jest znaną funkcją czasu i daje się opisać równaniem

$$w = w_o\left[1 + f(\tau)\right], \tag{1}$$

gdzie indeksem "o" oznaczono wielkość związaną ze stanem początkowym. Zakłada się dalej, że charakterystyczne liczby kryterialne można opisać równaniami

$$Bi = Bi_o\left[1 + f(\tau)\right]^n,$$

$$Fo = Fo_o\left[1 + f(\tau)\right]^{-1}, \tag{2}$$

$$K = K_o\left[1 + f(\tau)\right]^{n-1},$$

gdzie n jest wykładnikiem przy liczbie Reynoldsa w równaniu na liczbę Nusselta. Zachowanie się współczynnika wnikania ciepła w stanach nieustalonych szczegółowo rozważano, np. w [1].

W miejsce rzeczywistych temperatur płynów $t(z,\tau)$ i ścianki $\vartheta(z,\tau)$ wprowadza się temperatury zredukowane

$$T(z,\tau) = \frac{t(z,\tau) - t_o(z)}{\Delta t_o}, \quad \Theta(z,\tau) = \frac{\vartheta(z,\tau) - \vartheta_o(z)}{\Delta t_o}, \tag{3}$$

gdzie t_o i ϑ_o są początkowymi rozkładami temperatur, a Δt_o - charakterystyczną różnicą temperatur, np. początkową różnicą temperatur między czynnikami na wlocie. Jeżeli w chwili początkowej wymiennik ciepła znajdował się w stanie ustalonym, to funkcje t_o i ϑ_o wynikają z rozwiązania równań dla stanu ustalonego.

Równania bilansu energii przy zmiennych strumieniach prowadzą do równań cząstkowych ze zmiennymi współczynnikami. Zwykle rozwiązywano je metodą linearyzacji. Poniżej przedstawiona metoda polega na sprowadzeniu ich do równań całkowych. Ponieważ problemy nieliniowe wymagają zwykle każdorazowo indywidualnego podejścia, istota metody zostanie wyjaśniona przy pomocy prostego przykładu. Wybór takiego przykładu nie zawęża jej stosowalności, a jedynie umożliwia przejrzystą prezentację.

Zakłada się zatem dla uproszczenia rozważań, że jeden z czynników posiada nieskończenie wielką pojemność cieplną, a jego temperatura wynosi zero, co zawsze można uzyskać przez odpowiedni dobór temperatury zredukowanej. Zakłada się dalej, że zakłócenie stanu ustalonego spowodowane jest wyłącznie zmiennością strumienia czynnika o skończonej pojemności cieplnej. Wpierw wyznacza się funkcje t_o i ϑ_o z układu równań dla stanu ustalonego

$$\frac{dt_o}{dZ} + K_o(t_o - \vartheta_o) = 0$$

$$(Bi_o + Bi_{20})\vartheta_o = Bi_o t_o, \tag{4}$$

przy warunku

$$t_o(0) = t_{oo}.$$

Indeks "20" związany jest z czynnikiem o nieskończonej pojemności cieplnej.

Wprowadzając pomocnicze oznaczenia

$$B = Bi_o + Bi_{20}$$

$$C = \frac{K_o\ Bi_{20}}{B}$$

otrzymuje się rozwiązania w postaci

$$t_o = t_{oo}\ \exp(-CZ)$$

$$\vartheta_o = t_{oo}\ \frac{Bi_o}{B}\ \exp(-CZ). \tag{5}$$

Równania bilansu energii dla stanu nieustalonego mają postać następującą:

a) dla płynu

$$Fo\ \frac{\partial t}{\partial \tau} + \frac{\partial t}{\partial Z} + K(t-\vartheta) = 0$$

b) dla ścianki

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} + (Bi + Bi_{20})\,\vartheta = Bi\ t.$$

Wprowadzenie bezwymiarowych temperatur (3), przy wykorzystaniu rozwiązań (5) przekształca układ do postaci

$$Fo\ \frac{\partial T}{\partial \tau} + \frac{\partial T}{\partial Z} + K(T - \Theta) = Ce^{-CZ}\left\{1 - \left[1 + f(\tau)\right]^{n-1}\right\} \tag{6}$$

$$\frac{\partial\Theta}{\partial\tau} + (Bi + Bi_{20})\Theta - Bi\ T = \frac{Bi_o\ Bi_{20}}{B}\ e^{-CZ}\left\{\left[1 + f(\tau)\right]^n - 1\right\}. \tag{7}$$

Równania te całkuje się przy następujących warunkach brzegowych i początkowych

$$\begin{aligned} T(0,\tau) &= 0 \\ T(Z,0) &= \Theta(Z,0) = 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Równanie (7) można wprost scałkować

$$\Theta(Z,\tau) = e^{-F(\tau)} \int_0^\tau Bi_o\left[1 + f(\psi)\right]^n T(Z,\psi)e^{F(\psi)}d\psi +$$

$$+ \frac{Bi_o\ Bi_{20}}{B}\ e^{-CZ}\ e^{-F(\tau)} \int_0^\tau \left\{\left[1 + f(\psi)\right]^n - 1\right\}e^{F(\psi)}d\psi, \tag{9}$$

gdzie:

$$F(\tau) = \int_0^\tau \left\{Bi_o\left[1 + f(\psi)\right]^n + Bi_{20}\right\} d\psi.$$

Aby scałkować równanie (6) wprowadza się w miejsce czasu nową zmienną

$$\xi = \bar{\tau} - Z, \tag{10}$$

gdzie zredukowany czas $\bar{\tau}$ dany jest w postaci całkowej

$$\bar{\tau} = \int_0^\tau \frac{d\psi}{Fo} = \frac{1}{Fo_o}\int_0^\tau \left[1 + f(\psi)\right] d\psi. \tag{11}$$

Pochodne temperatury po czasie i współrzędnej przestrzennej wyrażają się teraz następująco

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{1}{Fo}\frac{\partial T}{\partial \xi}, \qquad \frac{\partial T}{\partial Z} = -\frac{\partial T}{\partial \xi} + \frac{\partial T}{\partial Z}.$$

Równanie (6) we współrzędnych ξ i Z ma postać

$$\frac{\partial T}{\partial Z} + K(\xi,Z)T = K(\xi,Z)\Theta + C\ e^{-CZ}\left\{1 - \left[1 + f(\xi,Z)\right]^{n-1}\right\} \tag{6a}$$

i można je scałkować

$$T(Z,\xi) = e^{-G(\xi,Z)}K_o\ Bi_o \int_0^Z H(\xi,\eta)\left[1 + f(\xi,\eta)\right]^{n-1}\ \theta\, e^{G(\xi,\eta)}d\eta +$$

$$+ C\, e^{-G(\xi,Z)} \int_0^Z H(\xi,\eta)\left\{1 - \left[1 + f(\xi,\eta)\right]^{n-1}\right\} e^{-C\eta}\, e^{G(\xi,\eta)}d\eta\ , \qquad (12)$$

gdzie $H(\tau)$ jest funkcją Heaviside'a, a

$$G(\xi,Z) = \int_0^Z K_o\left[1 + f(\xi,\eta)\right]^{n-1}\, d\eta.$$

Podstawiając (9) do (12) otrzymamy równanie całkowe, opisujące temperaturę płynu przy zaburzeniu strumienia czynnika. Równanie to jest równaniem całkowym typu Volterry II rodzaju, które można rozwiązywać metodą kolejnych przybliżeń, tworzących szereg jednostajnie zbieżny (por. [3]).

Przy uwzględnieniu skończonej pojemności cieplnej drugiego płynu tok rozważań pozostaje bez zmian i w efekcie uzyskuje się układ dwóch równań całkowych. Jednak ścisłe jego rozwiązanie analityczne nie jest możliwe w każdym przypadku. Zależy ono od postaci funkcji $f(\tau)$, a ściślej od stopnia uwikłania całki (11). Przy prostych funkcjach $f(\tau)$ takich, jak funkcja skokowa, liniowa itp. rozwiązanie jest dość proste. Znacznie się ono komplikuje dla funkcji nieelementarnych.

W dalszej części rozważany będzie przypadek najprostszy skokowej zmiany strumienia. Przyjmuje się zatem

$$f(\tau) = H(\tau). \qquad (13)$$

przy tym warunku całka $F(\tau)$ wynosi

$$F(\tau) = \int_0^\tau \left\{Bi_o\left[1 + H(\nu)\right]^n + Bi_{20}\right\}d\nu = \left\{Bi_o\left[1 + H(\tau)\right]^n + Bi_{20}\right\}\tau ,$$

a całka $G(\xi,Z)$

$$G(\xi,Z) = \int_0^Z K_o\left[1 + H(Fo(\xi+\eta))\right]^{n-1}d\eta =$$

$$= \frac{1}{Fo}\, K_o\left[1 + H(\tau)\right]^{n-1}\tau - K_o\left[1 + H(Fo\,\xi)\right]^{n-1}\xi.$$

gdzie

$$\xi = \tilde{\tau} - Z = \frac{1}{Fo}\tau - Z.$$

Ostatecznie po przekształceniach i obliczeniu całek występujących w równaniach (9) i (12) otrzymuje się

$$T(Z,\tau) = BiK\int_0^Z\int_0^\tau T[\nu - Fo(Z-\eta)]e^{-K(Z-\eta)}e^{-(Bi+Bi_{20})(\tau-\nu)}d\eta d\nu + W_0(Z,\tau), \quad (14)$$

gdzie K, Bi, Fo zdefiniowano przy pomocy formuły (2).

Funkcja W_0 pochodzi z całkowania prawych stron równań (6) i (7) czyli zależna jest od warunków brzegowych i początkowych oraz od funkcji opisującej zaburzenie strumienia. Wprowadzając pewne pomocnicze funkcje $f_{m,k}(\tau)$ można ją zapisać w postaci

$$W_0(Z,\tau) = (2^n-1)K\frac{Bi_0\ Bi_{20}}{B}\left[e^{-CZ}f_{1,1}(\tau) - e^{-KZ}f_{1,1}(\tau-Fo\ Z)\right]$$

$$+ (1-2^{n-1})\ C\left[e^{-CZ}f_{0,1}(\tau) - e^{-KZ}f_{0,1}(\tau-Fo\ Z)\right]. \quad (15)$$

Wyznaczenie rezolwenty równania (14) nie przedstawia trudności, gdyż pojawiają się wyłącznie całki typu

$$\int x^m e^{ax}dx, \quad (16)$$

dla których znane jest ogólne rozwiązanie. Pomijając zatem żmudne przekształcenia, rozwiązanie równania (14) zapisujemy w postaci

$$T(Z,\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} W_m(Z,\tau). \quad (17)$$

Wyrazy W_m szeregu (16) dla $m > 0$ wyznacza się z następujących formuł

$$W_m(Z,\tau) = (2^n-1)\ K(BiK)^m\frac{Bi_0\ Bi_{20}}{B}\left[e^{-Cz}f_{m+1,m+1}(\tau)\right.$$

$$\left. - e^{-KZ}\sum_{i=0}^{m}f_{m+1,m-i+1}(\tau-Fo\ Z)\frac{Z^i}{i!}\right.$$

$$+ (1-2^{n-1})\, C(BiK)^m\Big[e^{-CZ} f_{m,m+1}(\tau)$$

$$- e^{-KZ}\sum_{i=0}^{m} f_{m,m-i+1}(\tau - Fo\ Z)\frac{Z^i}{i!} \tag{18}$$

Występujące w (15) i (18) pomocnicze funkcje $f_{m,k}(\tau)$ wyznacza się z formuł rekurencyjnych (por. [3]), wykorzystując zależność ogólną na całkę typu (16). Zachodzą tu związki

$$f_{m+1,k}(\tau) = \int_0^{\tau} f_{m,k}(\vartheta)\, e^{-(Bi+Bi_{20})(\tau-\vartheta)} d\vartheta,$$

$$f_{m,k+1}(\tau) = \frac{1}{Fo^{k+1}}\int_0^{\tau} f_{m,k}(\vartheta) e^{-\frac{K-C}{Fo}(\tau-\vartheta)} d\vartheta, \tag{19}$$

gdzie:

$$f_{1,1}(\tau) = \frac{H(\tau)}{(Bi + Bi_{20})Fo - K + C}\left\{\frac{Fo}{K - C}\Big[1 - \exp(-\frac{K - C}{Fo}\tau)\Big]\right.$$

$$\left. - \frac{1}{Bi + Bi_{20}}\Big[1 - \exp[-\tau(Bi + Bi_{20})]\Big]\right\} \tag{20}$$

zaś występująca w równaniu (15) funkcja $f_{0,1}$ dana jest wzorem

$$f_{0,1}(\tau) = \frac{H(\tau)}{K - C}\Big[1 - \exp(-\frac{K - C}{Fo})\tau\Big]. \tag{21}$$

Stosując konsekwentnie formuły (19) można otrzymać ogólną zależność na funkcje $f_{m,k}$.

Celem uproszczenia zapisu wprowadźmy pomocnicze oznaczenia

$$a = Bi + Bi_{20}, \quad b = K - C, \quad x = \frac{K - C}{Fo}.$$

Ogólna formuła na $f_{m,k}$ przy $m > k > 1$ ma postać następującą

$$f_{m,k}(\tau) = \frac{1}{Fo^k}\left\{\frac{\alpha_{k,1}}{a(a-x)^{m+k-1}}(1 - e^{-a\tau}) + \frac{\beta_{k,1}}{x(a-x)^{m+k-1}}(1 - e^{-x\tau})\right.$$

$$- \sum_{i=1}^{m-1}\frac{\alpha_{k,i+1}}{i!(a-x)^{m+k-i-1}}\Big[e^{-a\tau}(\frac{\tau^i}{a} + \sum_{l=1}^{i}\frac{i(i-1)\ldots(i-l+1)}{a^{l+1}}\tau^{i-l})$$

$$- \frac{i!}{a^{i+1}}] +$$

$$- \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\beta_{k,i+1}}{i!(a-x)^{m+k-i-1}} [e^{-x\tau} \cdot (\frac{\tau^i}{x} + \sum_{l=1}^{i} \frac{i(i-1)\dots(i-l+1)}{x^{l+1}} \tau^{i-l})$$

$$- \frac{i!}{x^{i+1}}] \} . \tag{22}$$

Jeżeli $m < k$, to przez zamianę oznaczeń otrzymuje się przypadek $m \geqslant k$.

W zależności (22) $\alpha_{m,k}$ i $\beta_{m,k}$ są współczynnikami liczbowymi wyznaczanymi przy pomocy poniższego algorytmu (por. [3]).

Dla $i = 1,2,\dots,m$

$\gamma_{i,m} = 1$

$\gamma_{1,i} = 1$

Dla $i = 2,3,\dots,m$

Dla $j = m,m-1,\dots,2$

$\gamma_{i,j-1} = \gamma_{i-1,j-1} + \gamma_{i,j}$

Dla $j = 1,2,\dots,m$

$\alpha_{k,j} = (-1)^k \gamma_{k,j}$

Dla $i = 1,2,\dots,m$

$\beta_{1,i+1} = 0$

$\beta_{i,1} = (-1)^{i+1} \gamma_{i,1}$

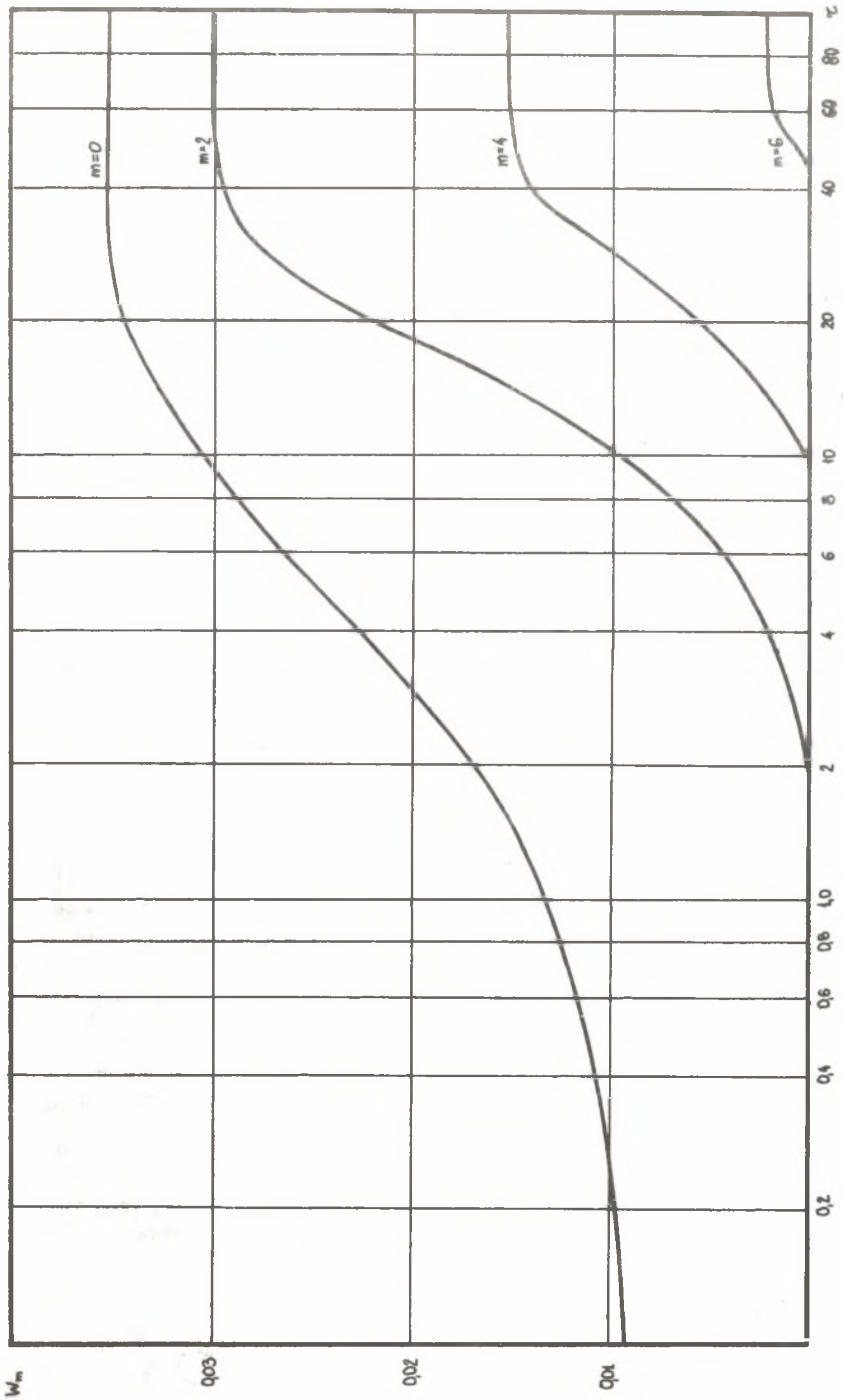
Dla $i,j = 1,2,\dots,m-1$

$\beta_{i+1,j+1} = \beta_{i,j}$

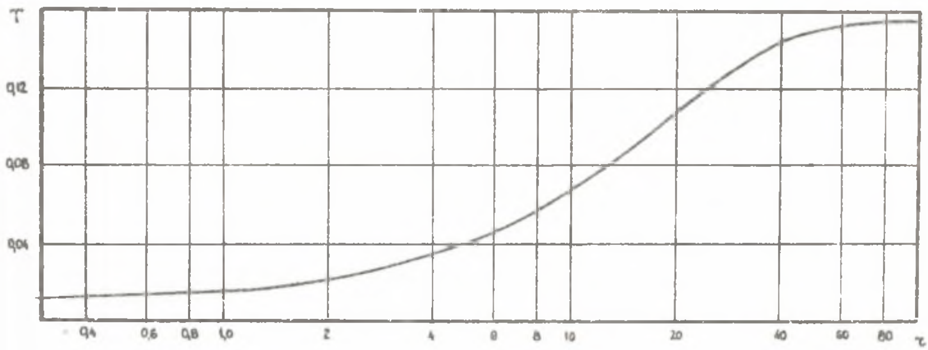
Na rys. 1 przedstawiono kolejne przybliżenia W_m dla typowego zbioru parametrów. Zbieżność ich można uznać za zadowalającą.

Na rys. 2 przedstawiono przebieg temperatury $T(1,\tau)$, tj. temperatury wylotowej czynnika o skończonej pojemności cieplnej. Temperatura ta jest zbieżna do wartości odpowiadającej nowemu stanowi ustalonemu.

Opisaną metodą zilustrowano bardzo prostym przykładem. Przypadki bardziej złożone nie wnoszą istotnych trudności merytorycznych (poza tymi, które uniemożliwiają rozwikłanie całki (11)), a tylko uzyskane formuły są bardziej skomplikowane pod względem formalnym.



Rys. 1. Kolejne przybliżenia funkcji $W_m(1,\tau)$ dla $K_o = 5$, $Fo_o = 0,45$, $Bi_o = 0,1$, $Bi_{20} = 0,01$



Rys. 2. Przebieg temperatury wylotowej czynnika zaburzonego dla $K_o = 5$ $Fo_o = 0{,}45$ $Bi_o = 0{,}1$ $Bi_{20} = 0{,}01$

LITERATURA

[1] Koszkin W. i in.: Niestacjonarnyj tiepłoobmien, Maszinostrojenije, Moskwa 1973.

[2] Gdula S.J., Kurpisz K.: Nieustalone pola temperatur w wymiennikach ciepła, Arch. Budowy Maszyn tom XXIII, z. 4, 576-586.

[3] Kurpisz K.: Ogólne rozwiązanie równań bilansu energii w stanie nieustalonym dla wymienników ciepła ZN Politechniki Śląskiej, Energetyka z. 63, 121-130.

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ТЕМПЕРАТУРНЫЕ ПОЛЯ В ТЕПЛООБМЕННИКАХ
ПРИ ПЕРЕМЕННОМ ПОТОКЕ РАБОЧЕГО ВЕЩЕСТВА

Р е з ю м е

В статье представлен метод определения распределения температур в теплообменнике в нестационарном состоянии, вызванном переменным потоком рабочего вещества. В рассуждениях учтена теплоёмкость диафрагмы. Метод проиллюстрирован простым примером.

NON-STEADY TEMPERATURE FIELDS IN HEAT-EXCHANGERS
WITH VARYING FLOW OF FLUID

S u m m a r y

This paper presents a method for the solution of temperature field in heat-exchangers in non-steady state, by varying the flow of fluid. The method is illustrated by a simple example.