

INTERNATIONAL CONFERENCE: DYNAMICS OF MINING MACHINES
DYNAMACH '89

Михаил Львович ПОМИНОВ

Московский горный институт

СТРУКТУРНЫЕ МОДЕЛИ В ДИНАМИКЕ ГОРНЫХ МАШИН

Резюме. Рассматривается метод структурных моделей (МСМ) для формирования матриц инерции (а), демпфирования (в) и жесткости (с), необходимых для исследования колебаний линейных механических систем горных машин. Матрицы (а), (в) и (с) строятся по естественным образом построенной векторной модели системы, характеризующей ее геометрическую структуру и связанной с выбранными обобщенными координатами. Анализируются плоские и пространственные системы с сосредоточенными параметрами, состоящие из твердых тел, образующих вращательные и поступательные кинематические пары и связанных между собой произвольным образом расположенными пружинами и демферами. Такие системы часто встречаются в горной технике. Метод эффективен, как для простых, так и для сложных систем сложной структуры и большой размерности. Еще большая формализация достигается использованием теории графов. МСМ легко поддается алгоритмизации и программированию на ЭВМ. Приводятся примеры расчета модельных систем и механических систем горных машин.

I. Сложные механические системы

Дифференциальные уравнения движения линейной механической системы с сосредоточенными параметрами имеют вид

$$(a)(\ddot{q}_x) + (b)(\dot{q}_x) + (c)(q_x) = (Q'_x)$$

$$x = 1, \dots, k,$$

где (а), (в), (с) - соответственно матрицы инерции, демпфирования и жесткости системы; (\ddot{q}_x) , (\dot{q}_x) , (q_x) - соответственно матрицы-столбцы обобщенных ускорений, скоростей и координат; (Q'_x) - матрица-столбец обобщенных непотенциальных и недиссипативных сил; k - число степеней свободы системы.

Матрицы (а), (в) и (с) являются важнейшими динамическими характеристиками линейной механической системы, необходимыми для исследования собственных, затухающих и вынужденных колебаний, для исследования устойчивости, для определения необходимых (оптимальных) параметров системы при ее анализе и синтезе.

Для составления и решения дифференциальных уравнений движения линейных механических систем небольшой размерности (до двух) все

известные методы являются одинаково эффективными. Если же система является сложной, т. е. имеет большое число степеней свободы и имеет сложную структуру, так что ее элементы взаимосвязаны сложным образом между собой и с произвольно расположенными упругими и демпфирующими элементами, то многие методы оказываются одинаково мало эффективными, так как необходимы большие, как рутинные, так и нетривиальные математические выкладки, требуются большие затраты труда и времени, в том числе и машинного, как при составлении дифференциальных уравнений, так и при их решении, при анализе решений, при анализе вариантов структуры системы и варьировании ее параметров. Таким образом имеет место так называемое "проклятие размерности".

2. Метод структурных моделей

В этой работе предлагается аналитический универсальный высокоформализованный метод структурных моделей (МСМ) формирования матриц (\mathbf{A}) , (\mathbf{B}) и (\mathbf{C}) для часто встречающихся в технике линейных (линеаризованных) механических систем с сосредоточенными параметрами, в том числе механических систем горных машин. Алгоритм МСМ оказывается эффективным, как для простейших, так и для сложных систем.

В МСМ используется один важный принцип — если система имеет какую-либо особенность, то всегда есть надежда, что эта особенность может привести к существенному упрощению некоего общего метода решения задач, например, метода обобщенных координат Лагранжа. Т. е. имеет смысл попытаться "сдвинуть" особенность максимально к началу расчета, чтобы использовать ее с наибольшей полнотой в дальнейшем. В рассматриваемых задачах к такого рода особенностям относятся прежде всего линейность системы, класс связей между телами, сосредоточенные параметры, а также плоский тип систем.

Итак все упрощения, имеющие место благодаря линейности системы и другим перечисленным выше особенностям, используются в самом начале расчета, сразу; в связи с этим не составляются выражения для кинетической T и потенциальной Π энергий, а также для диссипативной функции Φ Релея, нет необходимости в операциях дифференцирования и линеаризации (они выполняются неявно), система не выводится из положения равновесия, что существенно упрощает и чертеж, не надо показывать на схеме системы векторы скоростей и вычислять их для характерных точек, не надо явно вычислять деформации пружин; достаточно знать всего лишь геометрию (схему) системы в положении равновесия (т. е. структуру системы и геометрические размеры), а также заданные инерционные, диссипативные и упругие параметры элементов системы.

Все зависимости получены в инвариантной форме относительно систем координат. Метод является аналитическим, поскольку элементы матриц (\mathbf{a}) , (\mathbf{b}) , (\mathbf{c}) являются алгебраическими выражениями в функции параметров системы (в общем случае), а не числами, что позволяет использовать все преимущества аналитического подхода при решении задачи в общем виде наряду с численным анализом.

Отметим высокую формализацию и стандартизацию операций и действий в МСМ, отводящую исследователю лишь (всегда необходимый) простой ввод исходных данных и оставляющую все остальные промежуточные и окончательные операции алгоритмизированным процедурам полностью или (по желанию) частично выполняемых на ЭВМ; эти процедуры хорошо известны, запрограммированы и являются операциями над матрицами в линейной алгебре: перемножение, сложение, транспонирование и обращение матриц, определение собственных значений и собственных векторов и т. д. Здесь речь идет об автоматизации, как формирования матриц (\mathbf{a}) , (\mathbf{b}) , (\mathbf{c}) , так и о решении дифференциальных уравнений движения. Наряду с указанными преимуществами автоматизация всех промежуточных вычислений резко снижает количество возможных математических ошибок по вине исследователя. МСМ легко поддается алгоритмизации и программированию для ЭВМ.

В МСМ матрицы (\mathbf{a}) , (\mathbf{b}) , (\mathbf{c}) формируются по естественным образом построенной векторной модели системы, характеризующей ее геометрическую структуру и связанной с выбранными обобщенными координатами, т. е. для решения задачи как бы не нужна система как таковая, а только нужна ее структура, скелет. Анализируются в основном голономные склерономные плоские системы с сосредоточенными параметрами, состоящие из твердых тел, образующих вращательные и поступательные кинематические пары, находящихся под действием потенциальных сил и сил вязкого сопротивления и связанных между собой произвольным образом расположенными пружинами и демпферами.

Суть метода структурных моделей состоит в том, что характерным точкам системы — центрам масс тел и точкам крепления пружин и демпферов — ставится в соответствие набор (множество) векторов, по которым путем только алгебраических операций формируются (\mathbf{a}) , (\mathbf{b}) и (\mathbf{c}) . Другими словами здесь каждая характеристическая точка как бы порождает, индуцирует соответствующий ей набор векторов.

За обобщенные координаты, отсчитываемые от положения равновесия системы (рис. 1), принимаются для основных тел — угловые координаты (φ_1, φ_2) тел и линейные смещения (S_4, S_7) центров масс (смещения не обязательно ортогональны между собой), для присоединенных тел — относительные линейные смещения (S_2, S_3) и угловые координаты (φ_4, φ_5) . Основными будем называть тела (1, 6) системы или подсистемы, с которыми мы связываем сис-

тены отсчета других, присоединенных тел. За основное удобно принять тело подсистемы, входящее в состав кинематической пары с неподвижным телом; если таких тел нет, то основным можно выбрать любое тело подсистемы. Выбранные указанным выше способом обобщенные координаты обеспечивают следующие упрощения. Таким образом вводится некое особое описание механической системы, "особая технология", особый язык.

Используя для определения Т теорему Кеннига, получаем для инерционных коэффициентов следующее выражение

$$A_{\alpha\lambda} = \sum_{\nu=1}^n \left(m_{\nu} \frac{\partial \bar{z}_{\lambda\nu}}{\partial q_{\alpha}} \cdot \frac{\partial \bar{z}_{\lambda\nu}}{\partial q_{\lambda}} + I_{A_{\nu}} \frac{\partial \psi_{\nu}}{\partial q_{\alpha}} \cdot \frac{\partial \psi_{\nu}}{\partial q_{\lambda}} \right); \quad (I)$$

$$\alpha, \lambda = 1, \dots, k,$$

где n - число тел; m_{ν} - масса тела; $I_{A_{\nu}}$ - момент инерции тела относительно его центральной оси, перпендикулярной плоскости движения; $\bar{z}_{\lambda\nu}$ - радиус-вектор центра масс тела; ψ_{ν} - угловая координата тела относительно неподвижной системы координат. Для определения $A_{\alpha\lambda}$ надо знать $\bar{z}_{\lambda\nu}$ и ψ_{ν} в функции q_{α} , однако можно упростить вычисления, если поставить точку A_{ν} в

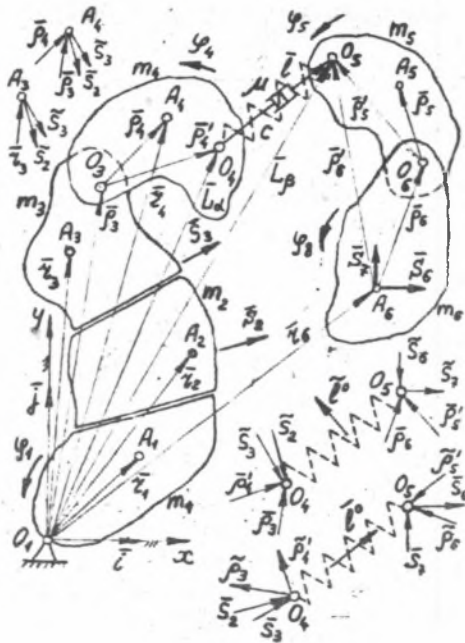


Рис. 1

Таблица 1

Н ↓ р	$\frac{\partial \bar{z}_A}{\partial \varphi_r} \frac{\partial \bar{z}_A}{\partial \varphi_s}$	$\frac{\partial \bar{z}_A}{\partial \varphi_r} \frac{\partial \bar{z}_A}{\partial s_\pi}$	$\frac{\partial \bar{z}_A}{\partial s_\pi} \frac{\partial \bar{z}_A}{\partial s_\theta}$	$\bar{j} \cdot \frac{\partial \bar{z}_A}{\partial \varphi_r}$	$\bar{j} \cdot \frac{\partial \bar{z}_A}{\partial s_\pi}$	$\bar{j} \cdot \frac{\partial^2 \bar{z}_A}{\partial \varphi_r^2}$	$\bar{j} \cdot \frac{\partial^2 \bar{z}_A}{\partial \varphi_r \partial s_\pi}$	$\bar{j} \cdot \frac{\partial^2 \bar{z}_A}{\partial s_\pi^2}$
	\bar{p}, \bar{s}	$\bar{p}_r \cdot \bar{p}_s$	$\bar{p}_r \cdot \bar{s}_\pi$	$\bar{s}_\pi \cdot \bar{s}_\theta$	$\bar{l} \cdot \bar{p}_r$	$\bar{l} \cdot \bar{s}_\pi$	$-\bar{j} \cdot \bar{p}_r$	$-\bar{j} \cdot \bar{s}_\pi$
\bar{p}, \bar{s}	$\bar{p}_r \cdot \bar{p}_s$	$\bar{p}_r \cdot \bar{s}_\pi$	$\bar{s}_\pi \cdot \bar{s}_\theta$	$\bar{j} \cdot \bar{p}_r$	$\bar{j} \cdot \bar{s}_\pi$	$\bar{l} \cdot \bar{p}_r$	$\bar{l} \cdot \bar{s}_\pi$	0
Н ↓ р	$\frac{\partial l}{\partial \varphi_r}$	$\frac{\partial l}{\partial s_\pi}$	$\frac{\partial^2 l}{\partial \varphi_r^2}$	$\frac{\partial^2 l}{\partial \varphi_r \partial \varphi_s}$	$\frac{\partial^2 l}{\partial \varphi_r \partial s_\pi}$	$\frac{\partial^2 l}{\partial \varphi_r \partial s_\pi}$	$\frac{\partial^2 l}{\partial s_\pi \partial s_\theta}$	$\frac{\partial^2 l}{\partial s_\pi^2}$
\bar{p} \bar{s}	$\pm \bar{p}_r$	$\pm \bar{s}_\pi$	$\frac{\bar{p}_r^2}{l} \pm \bar{p}_r$	$(+\bar{p}_r)(+\bar{p}_s)$	$\frac{\bar{p}_r \bar{s}_\pi}{l} \pm \bar{s}_\pi$	$(+\bar{p}_r)(+\bar{s}_\pi)$	$\frac{(+\bar{s}_\pi)(+\bar{s}_\theta)}{l}$	$\frac{\bar{s}_\pi}{l}$
\bar{p} \bar{s}	$+\bar{p}_r$	$+\bar{s}_\pi$	$\frac{\bar{p}_r^2}{l} \pm \bar{p}_r$	$(+\bar{p}_r)(+\bar{p}_s)$	$\frac{\bar{p}_r \bar{s}_\pi}{l} \pm \bar{s}_\pi$	$(+\bar{p}_r)(+\bar{s}_\pi)$	$\frac{(+\bar{s}_\pi)(+\bar{s}_\theta)}{l}$	$\frac{\bar{s}_\pi}{l}$

соответствие векторный многоугольник (ориентированную ломаную линию, цепочку, граф). Начальной, корневой вершиной цепочки является неподвижно закрепленная точка (0_T) основного тела, а конечной, висячей - A_y; промежуточные вершины - шарнирные сочленения. Если закрепленных точек нет, то первый вспомогательный вектор (\bar{z}_c) цепочки проводится в центр масс основного тела. Теперь \bar{z}_{A_y} можно представить в виде суммы векторов цепочки.

Учитывая, что производная вектор-функции $\bar{z}_{A_y}(q_1, \dots, q_k)$ по аргументу q_i есть вектор, направленный по касательной к голографу q_i , вычислим коэффициенты при m_y в (I)

$$\frac{\partial \bar{z}_{A_y}}{\partial \varphi_r} \frac{\partial \bar{z}_{A_y}}{\partial s_\pi} = \frac{\partial \bar{p}_r}{\partial \varphi_r} \cdot \bar{s}_\pi = \bar{p}_r \cdot \bar{s}_\pi = (\bar{e}_r \times \bar{p}_r) \bar{s}_\pi = (\bar{s}_\pi \times \bar{e}_r) \bar{p}_r = \bar{s}_\pi \bar{p}_r \quad (2)$$

Остальные коэффициенты приводятся в таблице 1.

$\varphi_r, \varphi_s, \varphi_\theta, s_\pi, s_2, s_\theta$ - обобщенные координаты, от которых явно зависит \bar{z}_{A_y} ; p_r, p_s, p_θ - векторы цепочки, зависящие явно от соответствующих φ ; \bar{p} - векторы, равные по модулю соответствующим \bar{p} и повернуты относительно них на 90° против часовой стрелки (будем называть векторы со значком " ~ " сопряженными); $\bar{s}_\pi, \bar{s}_2, \bar{s}_\theta$ - орты, направленные в сторону возрастания соответствующих s ; \bar{s} - сопряженные орты, повернуты относительно соответствующих s на 90° по часовой стрелке; \bar{e}_r - орт оси поворота, соответствующей φ_r , равный для плоских систем орту \bar{k} координатной оси z .

Следовательно для получения коэффициентов при m_y надо каждому A_y поставить в соответствие набор векторов, причем имеется две основные возможности: использовать набор \bar{p}, \bar{s} (рис. I, 3, 4, 6, 7, 8, 10, II) или набор \bar{p}, \bar{s} (рис. 2, 5, 6, 9, 10), векто-

ры которого направлены, как составляющие скоростей и элементарных перемещений. В таблице значки "-" и "~" перестановочны при переходе от одного набора к другому. Число векторов в наборе равно числу обобщенных координат, от которых явно зависит \bar{z}_{A_j} . При расчетах бывает удобно показать набор непосредственно у точки A_j (рис. 1, 4, 10). Коэффициенты при I_{A_j} равны символу Кронекера для непоступательно движущихся тел.

Как следует из определения для произведения матриц, совокупность $A_{x\lambda}$ можно записать в виде симметричной $k \times k$ матрицы инерции (\bar{a}) , равной произведению трех матриц:

$$(\bar{a}) = (\bar{L}_a)(\bar{m})(\bar{L}_a)^T \quad \text{или} \quad (\bar{a}) = (\bar{L}_a)(m)(\bar{L}_a)^T, \quad (3)$$

где (\bar{m}) и (m) - диагональные матрицы масс и моментов инерции; t - знак транспонирования матрицы. Для набора \bar{p}, S

$$(\bar{L}_a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{z}_{A_1}}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial \bar{z}_{A_n}}{\partial q_1} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & \\ \frac{\partial \bar{z}_{A_1}}{\partial q_k} & \dots & \frac{\partial \bar{z}_{A_n}}{\partial q_k} & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}; \quad (m) = \begin{pmatrix} m_1 & \dots & 0 \\ & m_n I_1 & \\ 0 & & I_n \end{pmatrix}$$

Число строк (\bar{L}_a) равно k , а число столбцов - числу масс и моментов инерции. Элементами (\bar{L}_a) , относящимися к m , являются векторы набора для m_v , соответствующие данной обобщенной координате. Элементами (\bar{L}_a) являются проекции этих векторов на координатные оси (рис. 4, 10), поэтому число столбцов (\bar{L}_a) и (m) в два раза больше, чем в (\bar{L}_a) . Моментам инерции в (\bar{L}_a) и (\bar{L}_a) соответствуют единицы.

Потенциальная энергия системы имеет вид (ось y направлена вверх)

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N c_i f_i^2 + \sum_{j=1}^n P_j y_j = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N c_i (l_i - l_{0i})^2 + \sum_{j=1}^n P_j \bar{z}_{A_j}, \quad (4)$$

где c_i - коэффициент жесткости пружины; f_i - деформация пружины при колебаниях; l_i - длина пружины при колебаниях; $l_{0i} = (l_{\Delta i} - \Delta_i)$ - длина недеформированной пружины; $l_{\Delta i}$ - длина пружины в положении равновесия системы; Δ_i - статическая деформация пружины (в частности, предварительный натяг, рис. 9); N - число пружин; P_j - сила тяжести.

Зависимость между параметрами системы, в частности знаки и величины незадаанных Δ_i , определяются для статически определенных и статически неопределенных (рис. 3) систем из условий равновесия

$$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_x} \right)_0 = \sum_{i=1}^N c_i \Delta_i \left(\frac{\partial l_i}{\partial q_x} \right)_0 + \sum_{j=1}^n P_j \bar{j} \left(\frac{\partial \bar{z}_{A_j}}{\partial q_x} \right)_0 = 0; \quad x = 1, \dots, k. \quad (5)$$

Если положения равновесия системы заранее неизвестны, то они находятся из уравнений:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_x} = \sum_{i=1}^N c_i (\ell_i - \ell_{oi}) \left(\frac{\partial \ell_i}{\partial q_x} \right) + \sum_{j=1}^n P_{ij} \bar{j} \left(\frac{\partial \bar{z}_{Aj}}{\partial q_x} \right) = 0, \quad x=1, \dots, k. \quad (6)$$

Квазиупругие коэффициенты вычисляются следующим образом:

$$c_{x\lambda} = \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_x \partial q_\lambda} \right)_0 = \sum_{i=1}^N c_i \left[\left(\frac{\partial \ell_i}{\partial q_x} \right)_0 \left(\frac{\partial \ell_i}{\partial q_\lambda} \right)_0 + \Delta_i \left(\frac{\partial^2 \ell_i}{\partial q_x \partial q_\lambda} \right)_0 \right] + \sum_{j=1}^n P_{ij} \bar{j} \left(\frac{\partial^2 \bar{z}_{Aj}}{\partial q_x \partial q_\lambda} \right)_0; \quad x, \lambda=1, \dots, k. \quad (7)$$

Поставим в соответствие подвижным точкам крепления каждой пружины (см. рис. 1) наборы векторов, построенных так же, как для A_j , и вычислим производные в (5), (6) и (7):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell_i}{\partial q_x} &= \frac{\partial \bar{\ell}_i}{\partial q_x} \bar{\ell}_i^0 = \frac{\partial}{\partial q_x} (\bar{L}_\beta - \bar{L}_\alpha) \bar{\ell}_i^0 = \mp \bar{p}_x \bar{\ell}_i^0 = \mp \bar{p}_x = \\ &= \mp (\bar{e}_x \times \bar{p}_x) \bar{\ell}_i^0 = \mp \begin{vmatrix} e_x^r & e_y^r & e_z^r \\ p_x^r & p_y^r & p_z^r \\ e_x^0 & e_y^0 & e_z^0 \end{vmatrix} = \pm (\bar{e}_x \times \bar{e}_i^0) \bar{p}_x = \pm \bar{e}_i^0 \bar{p}_x = \pm \bar{p}_x \end{aligned} \quad (8)$$

Остальные производные приводятся в таблице: $\bar{\ell}_i^0$ — орт вектора $\bar{\ell}_i$; $\bar{\ell}_i^0$ — сопряженный орт, повернутый относительно $\bar{\ell}_i^0$ на 90° против часовой стрелки; \bar{L}_α и \bar{L}_β — радиус-векторы начала α и конца β вектора $\bar{\ell}_i$, направление которого выбирается произвольно по оси пружины; \bar{p}_x — проекция \bar{p}_x на $\bar{\ell}_i^0$; \bar{p}_x — проекция \bar{p}_x на $\bar{\ell}_i^0$. В таблице: верхние знаки (+ и -) в формулах относятся к α , а нижние — к β ; σ — номер тела, угловая координата которого не определяется величиной φ_σ .

Коэффициенты при Δ_i и P_{ij} в (7) могут не учитываться в некоторых конструкциях при $\Delta_i \ll \ell_j$, где ℓ_j — характерный размер конструкции. В этом случае совокупность $c_{x\lambda}$ можно представить в виде матрицы жесткости (с):

$$(c) = (L_c) (\bar{C}_c) (L_c)^T = (\bar{L}_c) (\bar{e}^0) (\bar{C}_c) ((\bar{e}^0)^T (\bar{L}_c)^T) = (L_c') (e^0) (C_c) ((e^0)^T (L_c')^T) \quad (9)$$

где (\bar{C}_c) и (C_c) — диагональные матрицы коэффициентов жесткости пружин; (\bar{e}^0) — диагональная матрица ортов $\bar{\ell}_i^0$; (e^0) — матрица направляющих косинусов $\bar{\ell}_i^0$; (\bar{L}_c) и (L_c') — векторная и координатная матрицы для набора \bar{p}_i^0 , \bar{z} :

$$(L_c) = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial \ell_1}{\partial q_1} \right)_0 & \dots & \left(\frac{\partial \ell_N}{\partial q_1} \right)_0 \\ \vdots & & \vdots \\ \left(\frac{\partial \ell_1}{\partial q_k} \right)_0 & \dots & \left(\frac{\partial \ell_N}{\partial q_k} \right)_0 \end{pmatrix}; \quad (\bar{L}_c) = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial \bar{\ell}_1}{\partial q_1} \right)_0 & \dots & \left(\frac{\partial \bar{\ell}_N}{\partial q_1} \right)_0 \\ \vdots & & \vdots \\ \left(\frac{\partial \bar{\ell}_1}{\partial q_k} \right)_0 & \dots & \left(\frac{\partial \bar{\ell}_N}{\partial q_k} \right)_0 \end{pmatrix}$$

Вс.	Абсолютная система и ее структурная модель	$\{L_c\}$	$\{L_a\}, \{L_a\}$
2		$S_i \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & C_5 & C_6 & C_7 \\ 0,5 & 1 & 0,5 & -0,5 & 1 & 0 & 0 \\ -0,87 & 0 & 0,87 & 0,87 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,5 & 0,5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -0,87 & -0,87 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4,5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,87 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -0,5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \\ S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
3		$S_i \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \\ -0,5 & 0,87 & \dots & \dots \\ 0,87 & 0,5 & \dots & \dots \\ -0,5 & 0,5 & \dots & \dots \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} m & J_A & m & J_A \\ S_1 & 0 & S_2 & 0 \\ S_3 & 0 & S_4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_1 & J_A \\ S_2 & 0 \\ S_3 & 0 \\ S_4 & 1 \end{pmatrix}$
4		$y_i \begin{pmatrix} C_1 & -C_2 \\ 4l_1 \sin 30^\circ & 4l_2 \cos 30^\circ \\ -4l_2 \sin 30^\circ & 4l_2 \cos 30^\circ \end{pmatrix}$ $C_2 \rightarrow \infty$	$\begin{pmatrix} x & y & x & y \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \\ 13l_1 & 2l_1 & 2l_1 & 2\sqrt{3}l_1 \\ 0 & 0 & \sqrt{3}l_2 & -l_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 & S_2 \\ S_3 & S_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_1 & S_2 \\ S_3 & S_4 \end{pmatrix}$
5		$S_i \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & C_5 \\ 0 & S_1 & S_2 & 0 & 0 \\ S_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -S_3 & 0 & 0 & S_3 \\ 0 & 0 & -S_4 & S_4 & -S_4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \\ S_1 & S_2 & 0 & 0 \\ 0 & S_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_4 \end{pmatrix}$
6		$S_i \begin{pmatrix} m_1 g & m_2 g \\ 0 & m_2 g \cos \varphi_2 \end{pmatrix} = (C)$	$\begin{pmatrix} m_1 & m_2 & J_A & m_1 & m_2 & J_A \\ S_1 & S_2 & 0 & S_1 & S_2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_1 & S_2 \\ S_1 & S_2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
7		$y_i \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ -R & 0,5\sqrt{3}R \\ R & R \end{pmatrix}$ $C_1 \rightarrow \infty$	$\begin{pmatrix} m & J_A \\ 0 & 1 \\ R & 0 \end{pmatrix}$
8		$C = C_1 L^2 \sin^2(\alpha + \beta) + C_2 \Delta \left(\frac{L^2}{L} \cos^2(\alpha + \beta) - L \cos(\alpha + \beta) \right) - mgL \sin \alpha; \Delta = \frac{mg \cos \alpha}{C_1 \sin(\alpha + \beta)}$	$\begin{pmatrix} m \\ L \end{pmatrix}$
9		$C = C_1 \frac{\Delta}{L}$	$\begin{pmatrix} m \\ S \end{pmatrix}$
10		$y_i \begin{pmatrix} C_2 & C_1 \\ 2l \sin 30^\circ & l \\ -\cos 30^\circ & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} m & x & y & m & x & y \\ 2l & 2l & 0 & 2l & 0 & 0 \\ S_1 & 0 & -1 & S_2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2l & 0 \\ S_1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2l \\ S_1 & 1 \end{pmatrix}$
11		$y_i \begin{pmatrix} C_1 & m_1 g & m_2 g \\ 2l_1 \cos 30^\circ & m_1 g 2l_1 & 0 \\ C_2 \cos 30^\circ & 0 & m_2 g 2l_2 \end{pmatrix} = (C)$	$\begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ 2l_1 & 0 \\ 0 & 2l_2 \end{pmatrix}$

(\bar{L}_c) и (L_c) строятся аналогично (\bar{L}_a) по формулам таблицы 1, (L'_c) аналогична (L_a) . Так же получаются матрицы (\bar{L}'_c) , (L'_c) , (\bar{L}''_c) , (L''_c) для набора \bar{p} , \bar{s} . При наборе \bar{p} , \bar{s} векторы для (L_c) проектируются на ось, перпендикулярную оси пружины (рис. I, 3, 4, 6, 7, 8, 10, II), а при наборе \bar{p} , \bar{s} - на ось пружины (рис. I, 2, 5, 6, 7, 10). Число векторов набора, соответствующих одной из точек крепления пружины, равно числу обобщенных координат, от которых зависит положение этой точки. При расчетах бывает удобно показать набор непосредственно у точки крепления пружины (рис. I, 3, 7, 10).

Формулы таблицы можно использовать и для других потенциальных сил; нетрудно получить формулы для упругих элементов кручения. Выражения (5), (6) и (7) также допускают матричное представление.

На рис. 2-II на модельных примерах дана иллюстрация составления матриц (a) и (c) для плоских механических систем горных машин: решетчатые металлоконструкции, маятниковые системы, шарнирно-рычажные и планетарные механизмы, цепные системы, стрелы на упругих подвесках и т. д.

Если в системе есть вязкое трение (см. рис. I), то коэффициенты демпфирования вычисляются следующим образом:

$$B_{\alpha\lambda} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \dot{q}_\alpha \partial \dot{q}_\lambda} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \dot{q}_\alpha \partial \dot{q}_\lambda} \left(\sum_{j=1}^h \mu_j (\dot{v}'_j - \dot{u}'_j)^2 \right), \quad \alpha, \lambda = 1, \dots, k;$$

$$(\dot{v}'_j - \dot{u}'_j)^2 = (\bar{e}'_j (\dot{\bar{v}}_j - \dot{\bar{u}}_j))^2 = (\bar{e}'_j \frac{d}{dt} (\bar{L}_j - L_j))^2 = \sum_{\alpha=1}^k \sum_{\lambda=1}^k \frac{\partial e_j}{\partial q_\alpha} \cdot \frac{\partial e_j}{\partial q_\lambda} \dot{q}_\alpha \dot{q}_\lambda,$$

где Φ - диссипативная функция Релея; μ_j - коэффициент вязкости демпфера; \dot{v}'_j и \dot{u}'_j - проекции скоростей точек крепления демпфера на его ось; h - число демпферов. Окончательно

$$B_{\alpha\lambda} = \sum_{j=1}^h \mu_j \frac{\partial e_j}{\partial q_\alpha} \frac{\partial e_j}{\partial q_\lambda} \quad (10)$$

Таким образом, $B_{\alpha\lambda}$ и матрица демпфирования (в) вычисляются аналогично $c_{\alpha\lambda}$ и (с).

Можно получить (a), (в) и (с) суммированием матриц, вычисленных соответственно для каждого тела, каждой пружины и каждого демпфера.

Описанный способ вычисления $A_{\alpha\lambda}$, $c_{\alpha\lambda}$, $B_{\alpha\lambda}$, (a), (в), (с) и формулы (5), (6), (7) можно применить и для нелинейных систем рассматриваемого класса (рис. 4) при больших перемещениях. При малых колебаниях \bar{p} , \bar{p} , \bar{s} , \bar{s} определяются в положении равновесия системы. Достаточно знать геометрию системы в этом положении, что значительно упрощает вычисления (рис. 2-5, 7-II).

Структурные модели строятся описанным способом для систем, представляющих собой незамкнутую кинематическую цепь. От замкнутой цепи к незамкнутой можно перейти, освободив систему от соответствующих связей и заменив их упругими элементами с $c_i \rightarrow \infty$, при этом число степеней свободы системы повышается (рис. 4, 7). Если \bar{z}_i , ψ_i и \bar{e}_i найдены в функции q_x , то в переходе к незамкнутой системе нет необходимости. Отметим, что практически незамкнутых систем не существует, так как абсолютно жесткая опора реально деформируема, т. е. имеет некий, хотя и достаточно большой коэффициент жесткости; при расчетах он принимается на несколько порядков больше имеющихся в задаче коэффициентов жесткостей.

При построении модели бывает полезно представить систему в виде незамкнутой шарнирно-рычажной кинематической цепи, в том числе в виде цепи с фиктивными стержнями, у которых $m = 0$, но $\rho \neq 0$. В некоторых задачах удобно принять $\rho \rightarrow \infty$, например, по рис. 7 при $R \rightarrow \infty$ получим одну из моделей диска, колеблющегося на прямой.

Можно использовать данный метод и для расчета систем с распределенными параметрами в сочетании с методом конечных элементов.

Описанный метод определения (а), (в) и (с) может использоваться и как проверочный при решении задачи другим методом. Например, для системы на рис. 2, другим способом может быть вычислена матрица коэффициентов влияния (α); вычисляя затем произведение (с)·(α), мы должны получить единичную матрицу.

Если рассматривать наборы (цепочки) векторов для всей системы как граф, то после нумерации вершин графа (рис. 4) в соответствии с определением для произведения матриц можно вычислить (L_a) по формуле

$$(L_a) = (q_c^m)(x_m, y_m)(m_c)^T, \quad (II)$$

где (q_c^m) - структурная матрица, в которой число строк равно числу обобщенных координат, а число столбцов - удвоенному числу вершин графа. Элементами матрицы являются единицы, если данному q_x соответствует вершина графа, причем перед одной из единиц в строке ставится знак "-", если вершина графа является "нижней", считая от корневой вершины. Остальные элементы (q_c^m) - нули.

(m_c) - структурная матрица, получаемая перечислением путей графа из корневых вершин висячие по изображению графа или по матрице (q_c^m). Число строк (m_c) равно удвоенному числу масс, а число столбцов - удвоенному числу вершин. Элементами (m_c) являются 1, -1 или 0.

(x_m, y_m) - диагональная матрица координат вершин графа.

Аналогично получают матрицы (L_c''), (L_c'), (L_c^e), например, (L_c'') = (q_c^e)(x_c, y_c)(c_c)^T. По рис. 4 для столбцов абсцисс (без удвоения) получаем:

$$(L_a)_x = \begin{pmatrix} -I & I & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I & I & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 & 0 \\ & x_3 \\ & & x_4 \\ & & & x_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & I & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & I & I & 0 \\ I & 0 & I & 0 & I \end{pmatrix}^T;$$

$$(L_c)_x (e^{00})_x = \begin{pmatrix} -I & I & 0 \\ 0 & -I & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_3 & 0 \\ 0 & x_3 & x_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & I & I \\ I & I & I \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}.$$

Таким образом, для составления одной из матриц преобразования (L) достаточно знать координаты вершин соответствующего графа и матрицу (q_c), являющуюся матричным представлением графа.

Из (II) следует, что метод структурных моделей позволяет отделить математически структуру системы, описываемую матрицами (q_c^m) и (m_c), от ее геометрических параметров, описываемых матрицей (x_m, y_m), а из формул (3) и (9) следует, что МСМ позволяет отделить геометрические характеристики и структуру, описываемые матрицами (L_a) и (L_c), от инерционных и упругих характеристик, описываемых матрицами (m) и (\bar{c}).

3. Метод структурных моделей для пространственных систем

Использование МСМ эффективно и для пространственных систем рассматриваемого класса; расчеты удобнее вести в координатной форме при наборе \bar{p} , \bar{s} , используя формулы (2)–(II) и формулы таблицы 1, обведенные рамкой, а также учитывая, что при определении сопряженных векторов в общем случае $e_y \neq \bar{k}$.

За обобщенные координаты удобно принять: для опорных тел – углы Эйлера–Крылова $\alpha_\lambda, \beta_\lambda, \delta_\lambda$, и линейные перемещения центров масс тел, а для присоединенных тел – относительные линейные смещения и углы Эйлера–Крылова. В пространстве задается положительная правая ориентация.

Для инерционных коэффициентов получаем

$$A_{x\lambda} = \sum_{\nu=1}^n (m_{\lambda\nu} \frac{\partial \bar{x}_{\lambda\nu}}{\partial q_\lambda} \frac{\partial \bar{x}_{\lambda\nu}}{\partial q_\lambda} + A^\nu \frac{\partial \omega_\lambda^\nu}{\partial q_\lambda} \frac{\partial \omega_\lambda^\nu}{\partial q_\lambda} + B^\nu \frac{\partial \omega_\beta^\nu}{\partial q_\lambda} \frac{\partial \omega_\beta^\nu}{\partial q_\lambda} + C^\nu \frac{\partial \omega_c^\nu}{\partial q_\lambda} \frac{\partial \omega_c^\nu}{\partial q_\lambda}); \lambda=1, \dots, \kappa,$$

где A^ν, B^ν, C^ν – главные центральные моменты инерции тела, $\omega_\lambda^\nu, \omega_\beta^\nu, \omega_c^\nu$ – проекции вектора угловой скорости тела на связанные с телом главные центральные оси инерции.

$$\omega_\lambda = \dot{\alpha}_\lambda \cos \beta \cos \delta + \dot{\beta} \sin \delta; \quad \frac{\partial \omega_\lambda}{\partial \dot{\alpha}} = \cos \beta \cos \delta; \quad \frac{\partial \omega_\lambda}{\partial \dot{\beta}} = -\cos \beta \sin \delta; \quad \frac{\partial \omega_\lambda}{\partial \dot{\delta}} = \sin \beta;$$

$$\omega_\beta = \dot{\alpha} \cos \beta \sin \delta + \dot{\beta} \cos \delta; \quad \frac{\partial \omega_\beta}{\partial \dot{\alpha}} = \cos \beta \sin \delta; \quad \frac{\partial \omega_\beta}{\partial \dot{\beta}} = \cos \delta; \quad \frac{\partial \omega_\beta}{\partial \dot{\delta}} = 0;$$

$$\omega_c = \dot{\alpha} \sin \beta + \dot{\delta}; \quad \frac{\partial \omega_c}{\partial \dot{\alpha}} = 0; \quad \frac{\partial \omega_c}{\partial \dot{\beta}} = 0; \quad \frac{\partial \omega_c}{\partial \dot{\delta}} = 1.$$

Зная $\bar{r}_{A\gamma}$ в функции обобщенных координат, можно определить $A_{\alpha\lambda}$, однако можно упростить вычисления, если поставить в соответствие характерным точкам цепочку векторов также как это было сделано для плоских систем в п. 2.

Для линейных систем $\omega_A = \alpha$, $\omega_B = \beta$, $\omega_C = \gamma$ и

$$A_{\alpha\lambda} = \sum_{\nu=1}^n (m_{A\nu} \frac{\partial \bar{r}_{A\nu}}{\partial q_\lambda} + A^\nu \delta_A + B^\nu \delta_B + C^\nu \delta_C),$$

где $\delta_A, \delta_B, \delta_C$ - символы Кронекера.

Вычислим коэффициенты при $m_{A\nu}$,

$$\frac{\partial \bar{r}_{A\nu}}{\partial q_\lambda} = \frac{\partial \bar{r}_\nu}{\partial q_\lambda} = \bar{e}_\nu \times \bar{r}_\nu = \tilde{r}_\nu = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ e_x^\nu & e_y^\nu & e_z^\nu \\ r_x^\nu & r_y^\nu & r_z^\nu \end{vmatrix}; \quad \frac{\partial \bar{r}_{A\nu}}{\partial s_\lambda} = \frac{\partial \bar{r}_\nu}{\partial s_\lambda} = \bar{s}_\nu,$$

где \bar{e}_ν - орт нормали к плоскости, перпендикулярной оси поворота.

Если в положении равновесия системы оси неподвижной системы координат $Oxyz$ совпадают с главными центральными осями инерции тела (или удастся их так сориентировать), т. е. если, например, $\bar{e}_1 = \bar{i}$, $\bar{e}_2 = \bar{j}$, $\bar{e}_3 = \bar{k}$, то в этом случае выражения для сопряженного вектора \tilde{r}_ν упрощаются (таблица 2).

Так же, как и для плоских систем удобно записать совокупность $A_{\alpha\lambda}$ в матричной форме; матрицы строятся так же, как и для плоских систем.

Таблица 2

	Проекции \bar{r}		
	\bar{i}	\bar{j}	\bar{k}
	$\partial \epsilon / \partial \varphi$		
	$\bar{e}^0 = \bar{i}$	$\bar{e}^0 = \bar{j}$	$\bar{e}^0 = \bar{k}$
$\bar{e} = \bar{i}$	0	$-r_z$	r_y
$\bar{e} = \bar{j}$	r_z	0	$-r_x$
$\bar{e} = \bar{k}$	$-r_y$	r_x	0

Если оси пружин располагаются параллельно осям неподвижной системы координат (или удастся их так сориентировать), то можно использовать более простые формулы, чем (8)

$$\begin{aligned} \bar{e}^0 &= \bar{i} \\ \bar{e}^0 &= \bar{j} \\ \bar{e}^0 &= \bar{k} \end{aligned} \quad \frac{\partial \epsilon}{\partial \varphi} = \begin{cases} e_y r_z - e_z r_y \\ e_z r_x - e_x r_z \\ e_x r_y - e_y r_x \end{cases}$$

Если кроме того оси неподвижной системы координат совпадают с главными центральными осями инерции тела, то $\partial \mathcal{L} / \partial \varphi$ проще определить, пользуясь таблицей 2.

Формулы для определения $\partial^2 \mathcal{L} / \partial q_x \partial q_x$ и $\partial^2 \bar{\mathcal{L}}_A / \partial q_x \partial q_x$ аналогичны формулам для плоских систем (таблица I), но становятся более громоздкими, например,

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{\epsilon} (\bar{p}^2 - \bar{p}^2) + (\bar{\epsilon} \times \bar{p}) \bar{\epsilon} = \frac{1}{\epsilon} ((\bar{\epsilon} \times \bar{p})^2 - ((\bar{\epsilon} \times \bar{p}) \bar{\epsilon})^2 + (\bar{\epsilon} \times (\bar{\epsilon} \times \bar{p})) \bar{\epsilon}^0);$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \varphi \partial \psi} = (\bar{p}_\varphi / \epsilon) (\bar{p}_\psi - \bar{\epsilon}^0 (\bar{p}_\psi \bar{\epsilon}^0)) + \bar{\epsilon}^0 ((\bar{\epsilon}_\varphi \times \bar{\epsilon}_\psi) \times \bar{p}_\varphi + \bar{\epsilon}_\varphi \times (\bar{\epsilon}_\psi \times \bar{p}_\psi));$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \bar{s}^2} = \frac{1}{\epsilon} (1 - \bar{s}^2); \quad \bar{k} \frac{\partial^2 \bar{\mathcal{L}}_A}{\partial \bar{p}^2} = \bar{k} (\bar{\epsilon} \times \bar{p}) = \bar{k} (\bar{\epsilon} \times (\bar{\epsilon} \times \bar{p})).$$

Все формулы для плоских систем являются частным случаем формул для пространственных систем при $\bar{\epsilon} \perp \bar{p}$, $\bar{\epsilon} \perp \bar{p}$, $\bar{\epsilon} \perp \bar{\epsilon}^0$.

Этим методом можно исследовать и нелинейные системы рассматриваемого класса, если использовать исходные формулы для ω_A , ω_B , ω_C .

4. Алгоритм расчета по методу структурных моделей

1. Нарисовать схему механической системы в положении равновесия.
2. Ввести обобщенные координаты.
3. Обозначить характерные точки (центры масс тел, точки крепления пружин и демпферов).
4. Выбрать основные тела.
5. Составить структурную модель, выбрав тип набора векторов.
6. Выбрать ориентацию упругих и демпфирующих элементов.
7. Составить матрицы (L) преобразования координат в векторной или координатной формах.
8. Составить матрицы (m), (μ), (\bar{c}_i).
9. Вычислить матрицы (a), (b), (c).

Если структурная модель составляется с использованием графов, то дополнительно следует отметить корневые вершины графа, пронумеровать характерные точки (корневые вершины, промежуточные "шарниры", центры масс тел, точки крепления пружин и демпферов), составить структурные матрицы и матрицы направляющих косинусов.

5. Примеры из горной техники

5.1. Плоская модель роторной стрелы с приводом ротора на упругой подвеске при стопорении ротора.

Рассмотрим малые колебания роторной стрелы в вертикальной плоскости с учетом вязкого сопротивления в канатной подвеске стрелы и в упруго-демпфирующей подвеске привода ротора (рис. 12).

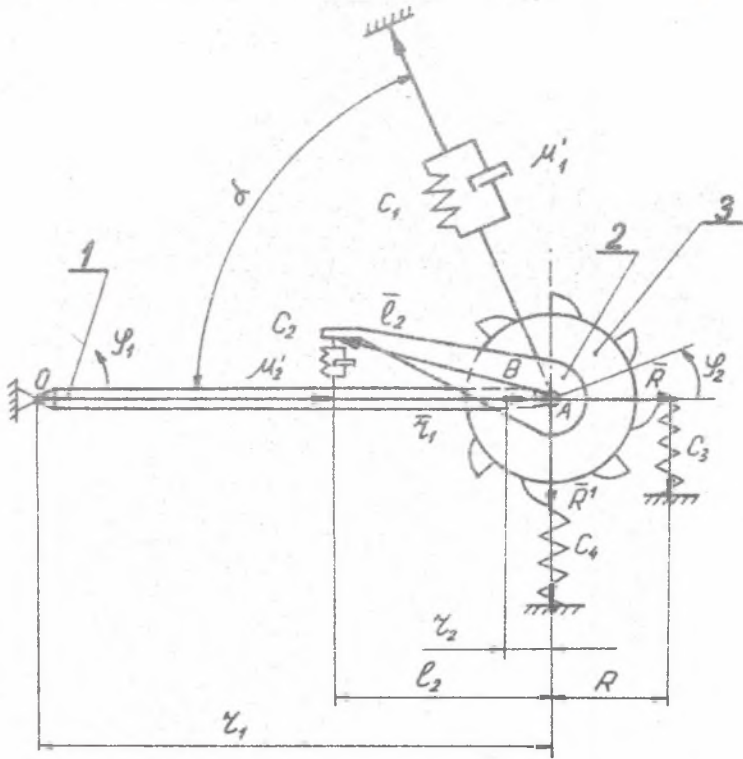


Рис. 12

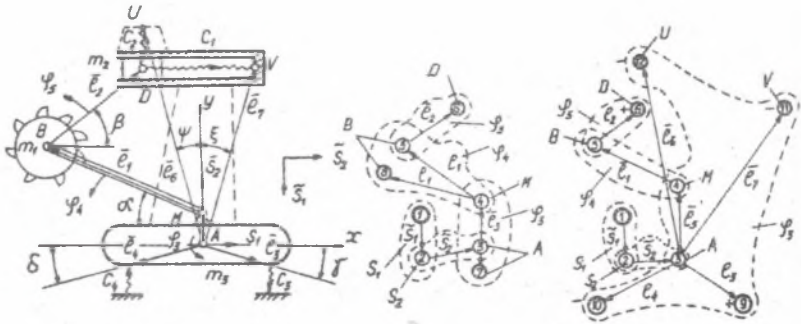


Рис. 13

Система имеет две степени свободы. За обобщенные координаты принимаем углы поворота φ_1 стрелы 1 и φ_2 привода 2 с роторным колесом 3 относительно горизонтальной оси.

$$(L_a) = \begin{matrix} & I_1 & m_2 & I_2 \\ \varphi_1 & \begin{pmatrix} 1 & \bar{r}_1 & 0 \\ 0 & \bar{r}_2 & 1 \end{pmatrix} & ; & (m) = \begin{pmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & m_2 I_2 \end{pmatrix} ; & (\bar{c}_i) = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & 0 \\ 0 & c_3 & c_4 \end{pmatrix} ; \end{matrix}$$

$$(L_c) = \begin{matrix} & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ \varphi_1 & \begin{pmatrix} -r_1 \sin \delta & l_2 & r_1 & r_1 \\ 0 & -l_2 & R & 0 \end{pmatrix} & ; & (\alpha) = \begin{pmatrix} I_1 + m_2 r_1^2 & -m_2 r_1 r_2 \\ -m_2 r_1 r_2 & I_2 + m_2 r_2^2 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

5.2. Плоская модель механической системы роторного экскаватора.

На рис. 13 показана схема машины в положении равновесия, а также графы масс и жесткостей. Корневые вершины обведены двойными кружками. Пунктиром обведены вершины графа, связанные с определенной обобщенной координатой. Объект, обведенный пунктиром, является звеном при представлении системы в виде незамкнутой шарнирно-рычажной кинематической цепи.

Считаем, что роторная стрела и подвеска стрелы являются невесомыми жесткими стержнями. Экскаватор считается свободным твердым телом на опорах, учитывающих упругость грунтового основания.

Система имеет пять степеней свободы. За обобщенные координаты принимаются линейные смещения точки А, а также углы φ_3 , φ_4 и φ_5 поворота соответственно экскаватора, стрелы и подвески.

За основное тело принимается тело 3. Для массы m_1 структурной цепочкой является АМВ, для m_2 — АМВД. Пружина c_2 введена искусственно для перехода от замкнутой кинематической цепи к незамкнутой.

$$(L_a) = \begin{matrix} & m_1 & m_2 & m_3 & \bar{I}_3 \\ s_1 & \begin{pmatrix} \bar{s}_1 & \bar{s}_1 & \bar{s}_1 & 0 \\ \bar{s}_2 & \bar{s}_2 & \bar{s}_2 & 0 \\ \bar{e}_5 & \bar{e}_5 & 0 & 1 \\ \bar{e}_1 & \bar{e}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{e}_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} & ; \end{matrix}$$

$$(L_c) = \begin{matrix} & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ s_1 & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ e_5 - l_2 \cos \delta ; -l_2 \sin \delta & l_3 \cos \delta & -l_4 \cos \delta \\ l_1 \sin \delta & l_1 \cos \delta & 0 & 0 \\ l_2 \sin \beta & l_2 \cos \beta & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

MODELE STRUKTURALNE W DYNAMICE URZĄDZEŃ GÓRNICZYCH

S t r e s z c z e n i e

Analizuje się metodę modeli strukturalnych (MSM) do kształtowania macierzy inercji (a), tłumienia (b) i sztywności (c), które są niezbędne do badania drgań liniowych układów mechanicznych urządzeń górniczych. Macierze (a), (b), (c) formują się wg naturalnie zbudowanego modelu wektorowego układu charakteryzującego jej geometryczną strukturę i związane z wybranymi uogólnionymi współrzędnymi. Analizuje się układy płaskie i przestrzenne o parametrach skupionych, składające się z ciał sztywnych tworzących kinematyczne pary obrotowe i o ruchu postępowym i połączonych między sobą w dowolny sposób rozmieszczonymi sprężynami i tłumikami drgań. Takie układy często spotyka się w technice górniczej. Metoda jest efektywna zarówno w odniesieniu do prostych, jak i skomplikowanych systemów złożonej struktury i dużej równomierności. Jeszcze większą formalizację osiąga się przy wykorzystaniu teorii grafów. Metoda modeli strukturalnych (MSM) łatwo poddaje się algorytmizacji i programowaniu na komputerze. Przytacza się przykłady obliczeń układów modelowych i układów mechanicznych urządzeń górniczych.

STRUCTURAL MODELS IN THE DYNAMICS OF MINING DEVICES

S u m m a r y

The paper presents the analysis of the structural models method (SMM) applied to forming the inertia matrix (a), the attenuation matrix (b) and rigidity matrix (c) which are necessary when performing the studies of vibrations of the linear mechanical systems of the mining devices. The matrices (a,b,c) are formed according to a naturally created vector model of the system which characterizes the geometrical structure and is related to the selected generalized coordinates. Both planar and special concentrated-parameter systems are analyzed consisting of the hard bodies forming the kinematic rotary pairs and advancing pairs which are interconnected with freely located springs and attenuators. The systems of this type are often met in the mining technology. The method is effective when applied both to simple and to complex systems with complex structure and great uniformity. The application of the theory of graphs allows even greater formalization. The structural models method (SMM) is easily algorithmised and implemented in the computers. The examples of the model systems as well as of the mechanical systems of mining apparatus are presented.