ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1979

Seria: ENERGETYKA z. 74 Nr kol. 634

Józef FOLWARCZNY
Instytut Techniki Cieplnej

WYZNACZANIE ŚREDNICH PRĘDKOŚCI STRUMIENIA PŁYNU W KANALE PROSTYM O PRZEKROJU KOŁOWYM

Streszczenie. W pracy przedłożony został praktyczny sposób wykorzystania pomiaru wartości ciśnienia kinetycznego (dynamicznego) wzdłuż promienia rury do wyznaczenia średniej prędkości objętościowej i średniej prędkości masowej przepływającego czynnika.

1. Wstęp

Istnieją przypadki, w których stosowane są rurki spiętrzające PITOTA lub PRANDTLA do wyznaczania rozkładu prędkości lokalnych w rurze, a następnie objętości strumienia $\dot{V}$ lub masy strumienia $\dot{m}$ czynnika. Tak objętość jak i masa strumienia określane są przy użyciu tzw. średniej prędkości objętościowej w_v, której wartość wynika z wartości prędkości lokalnych tworzących profil prędkości płynu. Celem tej pracy jest przedłożenie sposobu wyznaczania wielkości średniej prędkości objętościowej, a także innych prędkości średnich strumienia, na podstawie zmierzonych wartości ciśnienia dynamicznego oraz parametrów termicznych czynnika.

Przedłożone rozważania nie uwzględniają ściśliwości płynu. Założona tu równość ciśnienia dynamicznego p_d oraz ciśnienia kinetycznego p_k jest spełniona przy przepływach płynów nieściśliwych. Założenie takie jest dopuszczalne również dla płynów ściśliwych, gdy prędkości strumieni są znacznie mniejsze od prędkości dźwięku.

2. Profil prędkości płynu w rurze

Po przejściu tzw. hydraulicznego odcinka rozbiegowego występuje w rurze ustabilizowany już profil prędkości w postaci bryły obrotowej. Dokonując pomiarów ciśnień dynamicznych wzdłuż średnicy rury równej dwom promieniom R, dochodzi się do wartości prędkości lokalnych

$$w = f(r) \tag{1}$$

występujących w płaszczyźnie przechodzącej przez oś rurociągu. W przypadku symetrycznego względem osi profilu prędkości wystarczyłoby dokonać pomiarów wartości ciśnienia dynamicznego tylko wzdłuż połowy średnicy rury, czyli dla promieni od $r = 0$ do $r = R$. Większa ilość pomiarów dokonanych na tej trasie pozwala dokładniej rozpoznać kształt profilu prędkości. Dokonanie pomiarów ciśnień dynamicznych wzdłuż całej średnicy rury dostarcza dwóch zależności określonych równaniem (1), z których każda może być użyta do wyznaczenia prędkości średniej. Sondowanie strumienia za pomocą rurki spiętrzającej również wzdłuż średnicy leżącej w płaszczyźnie prostopadłej do poprzedniej dostarcza drugiej pary zależności $w = f(r)$. Pomiary dokonane wzdłuż dwóch prostopadłych do siebie średnic rurociągu pozwalają upewnić się co do symetrii profilu prędkości względnie zbudować profil zastępczy zestawiony ze średnich prędkości lokalnych stwierdzonych dla promienia r.

Dla przepływu laminarnego równanie (1) przyjmuje postać

$$w = w_o(1 - \varepsilon) \tag{a}$$

gdzie:

w_o m/s - prędkość płynu w osi rurociągu,

$\varepsilon = (\frac{r}{R})^2$ - kwadrat stosunku promieni.

Profile prędkości spotykane w praktyce rzadko dotyczą przepływu laminarnego i dlatego na ogół różnią się od paraboloidy kwadratowej opisanej równaniem (a). W każdym jednakże przypadku, wśród prędkości tworzących cały profil znajduje się prędkość maksymalna, która najczęściej występuje w osi rury, ale może też wystąpić na promieniu większym od zera, przy czym bryła prędkości może pozostawać bryłą obrotową.

Dzieląc równanie (a) stronami przez prędkość w_o otrzymuje się postać bezwymiarową tego równania

$$\frac{w}{w_o} = 1 - \varepsilon \tag{b}$$

w którym stosunek prędkości lokalnej i maksymalnej jest funkcją stosunku ε. W podobny sposób można dojść do postaci bezwymiarowej równania (1)

$$\frac{w}{w_{max}} = f_1(\varepsilon) \tag{2}$$

Równanie to powstało przez podzielenie stronami równania (1) przez prędkość maksymalną oraz przez zastosowanie zdefiniowanego poprzednio stosunku

$$\varepsilon = (\frac{r}{R})^2 \tag{c}$$

Funkcja wyrażona równaniem (2), charakteryzująca dany profil prędkości, może być przedstawiona wykreślnie w układzie $(\frac{w}{w_{max}}, \mathcal{E})$. Odpowiednia krzywa mieści się w kwadracie o boku 1 (patrz rys. 1). Zależność taka, oparta na równaniu (b), daje linię prostą, będącą przekątną wspomnianego kwadratu.

3. Prędkości średnie

3.1. Średnia prędkość objętościowa w_v strumienia

Wielkość ta służy do obliczania masy strumienia

$$\dot{m} = A \cdot \frac{w_v}{v} \tag{3}$$

lub objętości strumienia

$$\dot{V} = A \cdot w_v \tag{4}$$

Inny sposób określenia powyższych wielkości polega na sumowaniu elementarnych strug:

$$\dot{m} = \int_A \frac{w}{v} \, dA \tag{3a}$$

$$\dot{V} = \int_A w \, dA \tag{4a}$$

Przy założeniu, że objętość właściwa płynu nie zależy od promienia r, porównanie zależności (3) i (3a) lub (4) i (4a) prowadzi do tego samego wzoru określającego wielkości średniej prędkości objętościowej

$$w_v = \int_A w \frac{dA}{A} \tag{5}$$

Wzór ten może być użyty do wyznaczenia średnich prędkości objętościowych strumienia.

3.2. Średnia prędkość masowa w_m

Prędkość ta wynika z równości energii kinetycznej strumienia i sumy energii kinetycznej elementarnych strug

$$\dot{m}\,\frac{w_m^2}{2} = \int\limits_A \frac{w^3}{2\,v}\,dA.$$

Po zastosowaniu równania (3) i przekształceniu powyższą zależność można przedstawić w postaci

$$w_m^2 = \frac{w^3}{w_v}\,\frac{dA}{A}. \tag{6}$$

W wywodzie tego równania ponownie skorzystano z założenia, że objętość właściwa płynu w dowolnym miejscu pola A jest taka sama.

3.3. Średnia prędkość pędowa w_p strumienia

Prędkość ta ma zastosowanie w przypadkach posługiwania się zasadą zachowania ilości ruchu. Prędkość ta wynika z równości

$$\dot{m}\,w_p = \int\limits_A \frac{w^2}{v}\,dA.$$

Z równania tego - po zastosowaniu równania (3) i uproszczeniu objętości właściwej - otrzymuje się wzór

$$w_p = \int\limits_A \frac{w^2}{w_v}\,\frac{dA}{A}. \tag{7}$$

Z równań (5), (6) i (7) wynika, że tylko w przypadku płaskiego profilu prędkości zachodzi równość omówionych trzech prędkości średnich.

4. Stosunki prędkości

W równaniu (b) - dotyczącym przepływu laminarnego - występuje stosunek prędkości lokalnej w do prędkości maksymalnej w_o. Podobny stosunek prędkości występuje w równaniu (2) odnoszącym się do dowolnego strumienia o symetrycznym względem osi profilu prędkości. Stosunki te można przedstawić w innej formie, jeżeli uwzględni się związek między prędkością a ciśnieniem kinetycznym p_k

$$w = \sqrt{2\, p_k \cdot v} \tag{d}$$

Maksymalnej prędkości w strumieniu towarzyszy maksymalna wartość ciśnienia kinetycznego $p_{k\ max}$. Można więc napisać, że

$$w_{max} = \sqrt{2\, p_{k\ max} \cdot v} \tag{e}$$

Dzieląc stronami ostatnie dwa równania, otrzymuje się stosunek prędkości w postaci

$$\frac{w}{w_{max}} = \sqrt{\frac{p_k}{p_{k\ max}}} = (\chi)^{\frac{1}{2}} \tag{8}$$

Przy niewielkich prędkościach płynów ściśliwych różnica między ciśnieniem dynamicznym p_d i ciśnieniem kinetycznym p_k praktycznie nie występuje. W tych przypadkach płyn traktowany jest jak czynnik nieściśliwy. Z rosnącymi prędkościami rośnie różnica między mierzoną wielkością p_d, będącą nadwyżką ciśnienia spoczynkowego nad ciśnieniem statycznym, a obliczeniową wielkością p_k. Stosowanie odpowiednich poprawek pozwala przejść od mierzonej nadwyżki ciśnienia nad ciśnieniem statycznym do wielkości p_k również w przypadku prędkości naddźwiękowych. Równania (d) i (e) można więc uważać za słuszne w całym obszarze zastosowań rurek spiętrzających. Pamiętać przy tym należy, że w obu tych równaniach występuje objętość właściwa wynikająca ze statycznych parametrów p i T czynnika.

Stosunek ciśnień kinetycznych w równaniu (8) oznaczono literą χ. Stosunek ten w przypadku małych prędkości lub w przypadku płynu nieściśliwego równy jest stosunkowi odpowiednich wychyłek cieczy manometrycznej w użytym do pomiaru manometrze lub mikromanometrze.

Stosunek prędkości wyrażony równaniem (8) występuje również w równaniu (2). Porównanie obu tych równań daje zależność

$$f_1(\varepsilon) = (\chi)^{\frac{1}{2}} \tag{9}$$

Dla przepływu laminarnego $w_{max} = w_o$, a $f_1(\varepsilon) = 1 - \varepsilon$, co wynika z porównania prawych stron równań (2) i (b).

4.1. Wyznaczenie stosunku średniej prędkości objętościowej

Poszukiwana prędkość średnia w_v jest mniejsza od prędkości maksymalnej. Można to zapisać, wprowadzając stosunek prędkości

$$\varphi_v = \frac{w_v}{w_{max}} \tag{10}$$

W przypadku obrotowych brył prędkości elementarne pole dA wyraża się wzorem

$$dA = 2\, r\pi dr,$$

podczas gdy pole A wynoi

$$A = \pi R^2.$$

Wynika stąd, że

$$\frac{dA}{A} = d\,\frac{r^2}{R^2} = d\varepsilon \tag{11}$$

Po wprowadzeniu równań (5),(8),(11) do równania (10) otrzymuje się inną postać stosunku średniej prędkości objętościowej

$$\varphi_v = \int_0^1 (\chi)^{\frac{1}{2}} d\varepsilon \tag{10a}$$

Zgodnie z równaniem (9) stosunek χ jest funkcją stosunku ε. Można więc napisać, że

$$\varphi_v = \int_0^1 f_1(\varepsilon) d\varepsilon \tag{10b}$$

Podobnie jak w równaniach podanych wcześniej, całkowanie dotyczy całego pola A, czemu odpowiadają granice całkowania $\varepsilon = 0$, $\varepsilon = 1$.

Funkcja $f_1(\varepsilon)$ wynika z danych pomiarowych. Po naniesieniu odpowiednich punktów w układzie $((\chi)^{\frac{1}{2}}, \varepsilon)$ można wykreślić zależność ciągłą, biegnącą przez kolejne punkty pomiarowe. W miejscu $\varepsilon = 1$ wartość tej funkcji wynosi 0, co wynika z zerowej wartości prędkości na ścianie kanału. Jak już wspomniano wcześniej, tak wykreślona krzywa mieści się w polu kwadratu o boku równym jedności. Pole leżące pod tą krzywą, którego wielkość może być wyznaczona przez planimetrowanie wykresu, jest równe poszukiwanej wielkości stosunku φ_v. Stosunek ten można też uzyskać dzieląc wielkość pola znajdującego się pod krzywą przez pole wspomnianego kwadratu, przy czym obie wielkości wyrażone są oczywiście w tych samych jednostkach.

Jeżeli - w oparciu o dane pomiarowe - funkcję $f_1(\varepsilon)$ przedstawi się w postaci szeregu potęgowego, to poszukiwany stosunek φ_v otrzymuje się po scałkowaniu równania (10b).

Po ustaleniu wielkości stosunku φ_v i po obliczeniu prędkości maksymalnej z równania

$$w_v = \varphi_v \cdot w_{max} \tag{10c}$$

wylicza się średnią prędkość objętościową strumienia.

4.2. Wyznaczanie stosunku średniej prędkości masowej

Jeżeli ostatnie równanie a także równania (8) i (11) zastosuje się we wzorze (6), to otrzyma się zależność

$$\left(\frac{w_m}{w_v}\right)^2 = \frac{1}{(\varphi_v)^3} \int_0^1 (\chi)^{\frac{3}{2}} d\varepsilon,$$

która przedstawia kwadrat stosunku prędkości

$$\varphi_m = \frac{w_m}{w_v}. \tag{12}$$

Poprzednie równanie można więc przepisać w postaci

$$\varphi_m^2 \cdot \varphi_v^3 = \int_0^1 (\chi)^{\frac{3}{2}} d\varepsilon = \Psi_m. \tag{13}$$

W równaniu tym występuje trzecia potęga funkcji $f_1(\varepsilon)$. W celu wyznaczenia stosunku φ_m należy najpierw sporządzić wykres funkcji podcałkowej równania (13), a następnie przeprowadzić całkowanie graficzne w sposób omówiony przy wyznaczaniu stosunku φ_v. Wynik tego całkowania oznaczony został symbolem Ψ_m. Z ostatnich trzech równań wynika, że

$$w_m = \sqrt{\frac{\Psi_m}{\varphi_v}} \cdot w_{max} \tag{14}$$

lub

$$\varphi_m = \frac{w_m}{w_v} = \sqrt{\frac{\Psi_m}{\varphi_v^3}} \tag{12a}$$

Równanie (14) podaje związek między średnią prędkością masową i prędkością maksymalną, a równanie (12a) wyraża stosunek średniej prędkości masowej do średniej prędkości objętościowej.

4.3. Wyznaczenie stosunku średniej prędkości pędowej

Stosunek średniej prędkości pędowej do średniej prędkości objętościowej

$$\varphi_p = \frac{w_p}{w_v} \tag{15}$$

można określić, dzieląc stronami równanie (7) przez prędkość w_v. Jeżeli nadto uwzględni się równania (8) i (10), to stosunek φ_p można przedstawić w postaci

$$\varphi_p = \frac{1}{\varphi_v^2}\int_0^1 (\chi)d\mathcal{E} = \frac{\Psi_p}{\varphi_v^2} \tag{16}$$

Wartość całki występującej w równaniu (16) oznaczono liczbą Ψ_p. Poszukiwaną wielkość średniej prędkości pędowej można więc wyrazić wzorem

$$w_p = w_v \cdot \frac{\Psi_p}{\varphi_v^2} \tag{17}$$

lub wzorem

$$w_p = w_{max} \cdot \frac{\Psi_p}{\varphi_v} \tag{17a}$$

Widać stąd, że wyznaczenie prędkości w_p poprzedzone być musi wyznaczeniem średniej prędkości objętościowej.

5. Przykłady

5.1. Stosunki prędkości dla przepływu laminarnego

Wyznaczenie tych stosunków jest bardzo proste i nie wymaga stosowania metody graficznej. Dla omawianego przypadku równanie (10b) przyjmuje postać

$$\varphi_v = \int_0^1 (1 - \varepsilon)d\varepsilon, \quad \text{gdyż} \quad (\chi)^{1/2} = (1 - \varepsilon),$$

stąd

$$\varphi_v = \frac{w_v}{w_o} = 0{,}5.$$

Stosunek Ψ_m wylicza się z równania (13) i wynosi

$$\Psi_m = \int_0^1 (1 - \varepsilon)^3 d\varepsilon = \frac{1}{4}.$$

Z równania (12a) otrzymuje się wartość stosunku prędkości

$$\varphi_m = \frac{w_m}{w_v} = \sqrt{2}, \quad \text{inaczej} \quad \left(\frac{w_m}{w_v}\right)^2 = 2.$$

Jak widać z równania (16), liczba pomocnicza Ψ_p dla przepływu laminarnego wynosi

$$\Psi_p = \int_0^1 (1 - \varepsilon)^2 d\varepsilon = \frac{1}{3}.$$

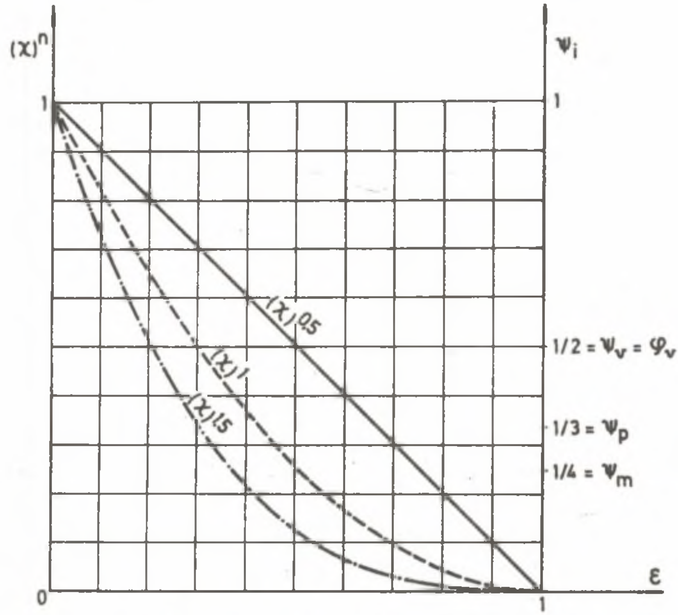
Zgodnie z równaniem (16) stosunek prędkości φ_p wyraża się liczbą

$$\varphi_p = \frac{4}{3} = \frac{w_p}{w_v}.$$

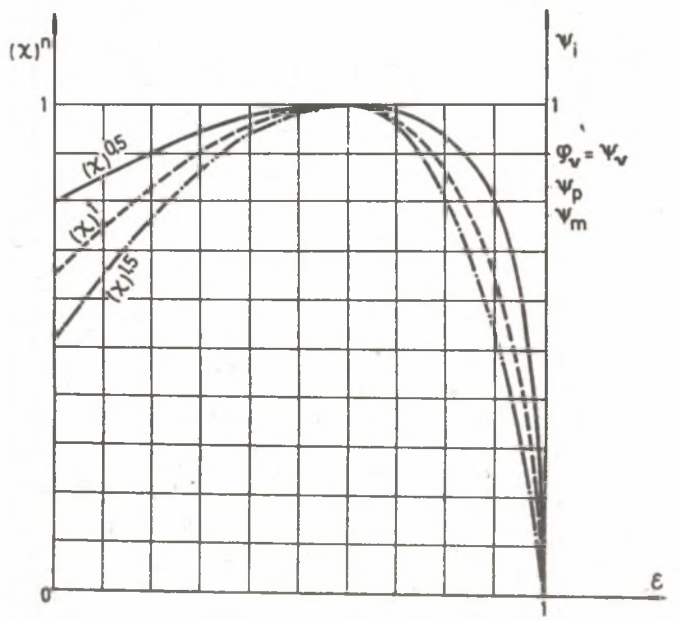
Z powyższego wynika, że omawiana prędkość średnia stanowi podane niżej ułamki prędkości maksymalnej

$$\frac{w_v}{w_o} = 0{,}5, \quad \frac{w_m}{w_o} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \frac{w_p}{w_o} = \frac{2}{3}.$$

Na rys. 1 przedstawiono funkcje podcałkowe równań (10a), (13) i (16) dla przepływu laminarnego.



Rys. 1. Pola stosunków Ψ_i dla przepływu laminarnego (patrz przykład 5.1)



Rys. 2. Pola stosunków Ψ_i dla przepływu burzliwego (patrz przykład 5.2)

5.2. Stosunki prędkości strumienia dla wybranego przypadku przepływu burzliwego

Na rysunku 2 naniesiono przykładowy przebieg funkcji $f_1(\varepsilon)$, a także drugą jej potęgę - jako funkcję podcałkową równania (16) - oraz potęgę trzecią tej funkcji (dla wyznaczenia liczby Ψ_m). Przebieg funkcji $f_1(\varepsilon)$ wzorowany jest na pomiarach strumienia powietrza w rurze w pewnej odległości przed wbudowanym w nią wentylatorem osiowym. Obecność wentylatora w rurociągu tłumaczy nietypowy kształt profilu prędkości.

6. Uwagi końcowe

Przykłady graficznego wyznaczania stosunków prędkości przedstawiają rysunki 1 i 2. Wartości stosunków Ψ_i, wyliczone dla przykładu przepływu laminarnego, zaznaczono na rys. 1. Rysunek 2 natomiast objaśnia graficzną metodę wyznaczania stosunków prędkości (poprzez stosunki Ψ_i) w przypadkach, gdy kształt profilu prędkości ustalany jest na drodze pomiarowej. Również na rys. 2 zostały zaznaczone wartości Ψ_i. Liczbowe wartości tych stosunków, a także stosunków prędkości podano w zamieszczonej niżej tabelce.

Zestawienie wartości liczbowych stosunków Ψ
oraz stosunków prędkości z przykładów ilustrowanych rysunkami 1 i 2

Stosunek	Przepływ laminarny	Przepływ burzliwy (jak na rys. 2)
Ψ_v	1/2	0,902
Ψ_p	1/3	0,842
Ψ_m	1/4	0,781
w_v/w_{max}	1/2	0,902
w_p/w_{max}	2/3	0,934
w_m/w_{max}	$\sqrt{2}/2$	0,931

Maksymalną prędkość w_{max} w przepływie laminarnym oznaczono wcześniej symbolem w_o.

Z zestawienia widać, że prędkość średnia w_p w przypadku przepływu laminarnego mieści się w przedziale $w_v < w_p < w_m$. Zapewne i w wielu przypadkach przepływu burzliwego będzie tak samo. Jednakże,w przytoczonym przykładzie przepływu burzliwego prędkość w_p przekracza nieco wartość średniej prędkości masowej.

Z podanych przykładów wyznaczania prędkości średnich widać, że różnica między wartościami średnimi może wynosić od kilku do kilkudziesięciu procent średniej prędkości objętościowej w_v. Dlatego zakładanie równości $w_v = w_m$ może być przyczyną błędów w obliczeniach energii kinetycznej strumienia.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СРЕДНИХ СКОРОСТЕЙ ПОТОКА ГАЗА В ПРЯМОМ ТРУБОПРОВОДЕ

Р е з ю м е

В статье предложен практический спооо6 использования измерения значения кинетического (динамического) давления вдоль диаметра трубы для определения средней объёмной скорости, а также срецней массовой скорости потока газа.

DETERMINING MEAN VELOCITIES OF FLUID CURRENT IN PIPES

S u m m a r y

The paper proposes a practical way of using kinetic (dynamic) pressure value measurements taken along pipe dia-meter (or radius) to determine the mean volumetric and mean mass velocities of the flowing fluid.