

Adam ŻUCHOWSKI
Instytut Automatyki Przemysłowej
Politechnika Szczecińska

ODTWARZANIE STANU WEJŚCIA TORU POMIAROWEGO Z WYKORZYSTANIEM UŚREDNIONEGO RÓŻNICZKOWANIA I MODELU STREJCA

Streszczenie. Operacja tzw. uśrednionego różniczkowania z wykorzystaniem funkcji wagi $g(t)$ spełniającej określone warunki pozwala przenieść różniczkowanie z zakłóconego sygnału na funkcję wagi, zmniejszając wydatnie wpływ zakłóceń. Jeśli model dynamiki toru pomiarowego w postaci liniowego równania różniczkowego jest znany, zastosowanie tej operacji pozwala wyznaczyć sygnał wejściowy na podstawie wyników obserwacji sygnału wyjściowego. Wykorzystanie modelu Strejca umożliwia dodatkowe uproszczenie całej procedury obliczeniowej.

THE RESTORATION OF MEASURING SYSTEM INPUT STATE BY APPLICATION OF AVERAGED DIFFERENTIATION AND STREJC'S MODEL

Summary. Using method of averaged differentiation one can differentiate the suitably chosen weight function instead of differentiation of noisy signal. The above replacement allows to reduce considerably the influences of disturbances. If model of measuring system dynamics is known then the averaged input signal can be determined by application of averaged differentiation method to the results of observations of measuring system output signal. The utilization of Strejc's model significantly simplifies all calculation procedures necessary for implementation of averaged differentiation method.

1. WPROWADZENIE

Załóżmy, że $g(t)$ jest parzystą funkcją argumentu t spełniającą warunki $g^{(i)}(-d) = g^{(i)}(d) = 0$ dla $i = 0, 1, 2, \dots, k \geq n-1$ oraz warunek unormowania:

$$\int_{-d}^d g(t) dt = 1.$$

Wykonując całkowanie przez części łatwo sprawdzić, że obowiązuje zależność:

$$y^{(i)}(t_0)_g = \int_{-d}^d y^{(i)}(t_0 + v)g(v)dv = (-1)^i \int_{-d}^d y(t_0 + v)g^{(i)}(v)dv \quad (1)$$

dla $i = 0, 1, 2, \dots, n$, nazywana „uśrednionym różniczkowaniem” [1]. Przenosi ona operację różniczkowania z zaszumionego zwykle sygnału $y(t)_z = y(t) + z(t)$ na funkcję wagi $g(t)$ i tym samym zmniejsza wydatnie wpływ szumów, zwłaszcza przy zastosowaniu dostatecznie szerokiego przedziału uśredniania $(-d, d)$.

Jeśli dynamikę liniowego toru pomiarowego opisuje równanie różniczkowe:

$$\sum_{i=0}^n a_i y^{(i)} = x(t), \quad (2)$$

to dokonując uśredniania tego równania z wykorzystaniem funkcji wagi $g(t)$ i wzoru (1) można wyznaczyć uśredniony sygnał wejściowy $x(t_0)_g$ jako [2]:

$$x(t_0)_g = \int_{-d}^d \left(\sum_{i=0}^n (-1)^i a_i g^{(i)}(v) \right) y(t_0 + v) dv. \quad (3)$$

Ponieważ zgodnie ze wzorem (1):

$$x(t_0)_g = \int_{-d}^d x(t_0 + v)g(v)dv, \quad (4)$$

zatem w warunkach ciągłego i różniczkowalnego $x(t)$ po rozwinięciu $x(t_0 + v)$ w szereg Taylora w otoczeniu chwili t_0 , wykorzystaniu warunku parzystości funkcji $g(v)$ i warunku unormowania otrzymuje się:

$$x(t_0)_g = x(t_0) + \sum_{r=1}^n \frac{1}{(2r)!} m_{2r} x^{(2r)}(t_0) \quad (5)$$

gdzie $m_{2r} = \int_{-d}^d v^{2r} g(v) dv$.

Jeśli uwzględnić, że $y(t_0 + v)_z = y(t_0 + v) + z(t_0 + v)$, (6)

to łączny błąd odtwarzania sygnału wejściowego ma postać:

$$\hat{x}(t_0)_g - x(t_0) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{(2r)!} m_{2r} x^{(2r)}(t_0) + \int_{-d}^d \left(\sum_{i=0}^n (-1)^i \Delta a_i g^{(i)}(v) \right) y(t_0 + v)_z dv + \int_{-d}^d \left(\sum (-1)^i a_i g^{(i)}(v) \right) z(t_0 + v) dv \quad (7)$$

gdzie Δa_i określają błędy współczynników modelu (2) względem związków rzeczywistych. Poprzez odpowiedni dobór postaci funkcji wagi i optymalizację szerokości przedziału uśredniania można zminimalizować błąd (7), a przy zastosowaniu specjalnych metod korekcyjnych [3] można go dodatkowo wydatnie zmniejszyć.

2. WYKORZYSTANIE MODELU STREJCA

Załóżmy, że dynamikę toru pomiarowego opisuje tzw. model Strejca, a transmitancja toru posiada postać:

$$K(s) = \frac{k}{(1 + sT)^n} \quad (8)$$

Wykorzystując znany w rachunku różniczkowym wzór Newtona można wykazać, że obowiązuje związek:

$$\frac{d^n}{dt^n} \left\{ y(t) \exp\left(\frac{t}{T}\right) \right\} = kT^{-n} x(t) \exp\left(\frac{t}{T}\right), \quad (9)$$

zastępujący model (2). Wynika stąd możliwość wyznaczenia uśrednionego i obciążonego sygnału $\{x(t_0) \exp(t_0/T)\}_g$ na podstawie zależności:

$$\{x(t_0) \exp(t_0/T)\}_g = (-1)^n kT^{-n} \int_{-d}^d y(t_0 + v) \exp\left(\frac{t_0 + v}{T}\right) g^{(n)}(v) dv, \quad (10)$$

znacznie prostszej od wzoru (3), wystarczy bowiem wyznaczenie tylko jednej, najwyższej pochodnej obciążonego sygnału $y(t)$.

Warto zwrócić uwagę na fakt, że w przypadku modelu Strejca zależności typu (2) i (9) są równoważne, toteż trudno ocenić, czy wpływ zakłóceń przy stosowaniu wzoru (10) będzie większy niż w przypadku użycia modelu (2) i konieczne są badania modelowe. Wolno natomiast uznać, że w pewnych przypadkach (np. dla $x(t) = A \exp(-t_0/T)$) sygnał $x(t_0) \exp(t_0/T)$ jest bardziej gładki od sygnału $x(t_0)$ i tym samym deformacja (5) przez proces uśredniania może być mniejsza przy użyciu modelu (9).

3. DEKOMPOZYCJA MODELU

Rozważmy model o ogólnej postaci (2) i odpowiadającą mu transmitancję:

$$K(s) = \frac{1}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0}. \quad (11)$$

Wykorzystując mianownik modelu Strejca (8) obliczymy:

$$\sum_{i=0}^n a_i s^i - c_n \sum_{i=0}^n s^i T^i \binom{n}{n-i} = s^n (a_n - c_n T^n) + s^{n-1} (a_{n-1} - c_n n T^{n-1}) + R_{n-2}, \quad (12)$$

$$R_{n-2} = \sum_{i=0}^{n-2} s^i \left(a_i - c_n T^i \binom{n}{n-i} \right).$$

Można teraz przyjąć:

$$\begin{aligned} a_n - c_n T^n &= 0, \\ a_{n-1} - n c_n T^{n-1} &= 0, \end{aligned} \quad (13)$$

skąd:

$$T = n \frac{a_n}{a_{n-1}}, \quad c_n = a_n T^{-n}.$$

Wykonując odejmowanie:

$$R_{n-2} - c_{n-2} \sum_{i=0}^{n-2} s^i T^i \binom{n-2}{n-2-i} = s^{n-2} \left(a_{n-2} - c_n T^{n-2} \binom{n}{2} - c_{n-2} T^{n-2} \right) + R_{n-3} \quad (14)$$

przyjmiemy:

$$c_{n-2} = a_{n-2} T^{2-n} - \binom{n}{2} c_n, \quad (15)$$

by po kolejnych powtórzeniach takich działań otrzymać ostatecznie:

$$\sum_{i=0}^n a_i s^i = c_n W(s)_{s,n} + \sum_{j=0}^{n-2} c_j W(s)_{s,j}, \quad (16)$$

gdzie

$$W(s)_{s,n} = \sum_{i=0}^n s^i T^i \binom{n}{n-i} \quad (17)$$

są wielomianami jak w modelu Strejca.

Można także przyjąć $c_n = 1$ i dekompozycji dokonać nieco inaczej, wyznaczając odpowiednio T , c_{n-1} , c_{n-2} , ... c_0 . Wykorzystując wzór (10) otrzymuje się:

$$\left\{ x(t_0) \exp(t_0 / T) \right\}_s = \int_{-d}^d y(t_0 + v) \exp\left(\frac{t_0 + v}{T}\right) \sum_{j=0}^n (-1)^j c_j g^{(j)}(v) dv. \quad (18)$$

W szczególnych przypadkach suma (17) może zawierać niewielką liczbę składników i wtedy stosowanie dekompozycji może być opłacalne.

3.1. Przykład

Rozważmy tor pomiarowy o dynamice opisanej równaniem różniczkowym:

$$y^{(3)} + 3y^{(2)} + 3y^{(1)} + 2y = x(t).$$

Stosując opisaną metodę dekompozycji otrzymuje się:

$$y_{s,3} + y_{s,0} = x(t)$$

przy $T = 1s$, skąd oczywiście:

$$\{x(t_0) \exp(t_0 / T)\}_g = \int_{-d}^d y(t_0 + v) \exp\left(\frac{t_0 + v}{T}\right) \{g(v) - g^{(3)}(v)\} dv$$

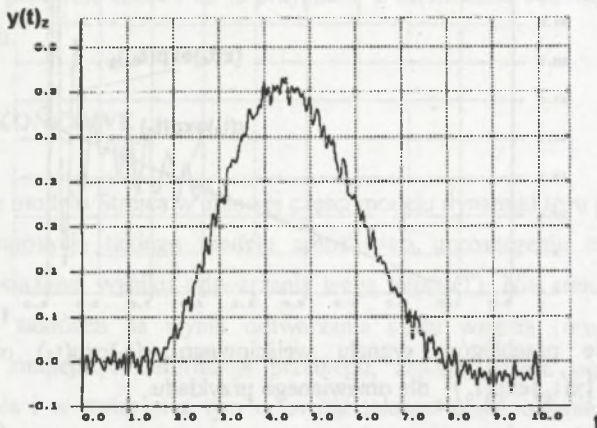
lub w warunkach modelu takich jak we wzorze (2):

$$\{x(t_0)\}_g = \int_{-d}^d y(t_0 + v) \{2g(v) - 3g^{(1)}(v) + 3g^{(2)}(v) - g^{(3)}(v)\} dv$$

Przyjmując okno Nuttalla [4] o postaci:

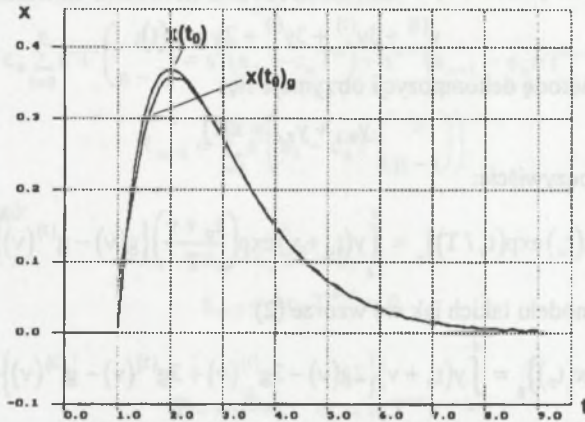
$$g(v) = \frac{8}{5d} \cos^6\left(\frac{v}{2d}\right)$$

oraz $x(t) = 0.5 \{1 + \text{sgn} \cdot (t-1)\} \exp(-t)$ i wprowadzając pseudolosowe zakłócenia sygnału $y(t)$ dla $d = 1s$ otrzymuje się przebiegi $y(t)_z$, $\{x(t_0)\}_g$ oraz $\{x(t_0) \exp(t_0 / T)\}_g$, pokazane na rysunkach 1, 2 i 3.



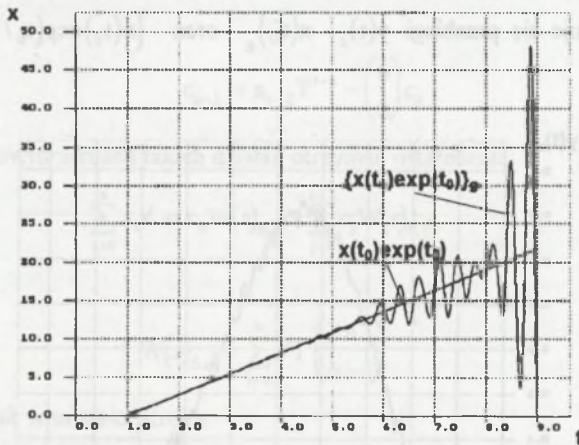
Rys. 1. Przebieg zakłóconego sygnału wyjściowego $y(t)_z$ w omawianym przykładzie
 Fig. 1. The disturbed output signal $y(t)_z$ - see example discussed in the paper

W wyniku uśredniania amplituda zakłóceń w przebiegu $x(t)_g$ (rys. 2) jest niewielka. Amplituda zakłóceń w przebiegu $\{x(t_0)\exp(t_0)\}_g$ (rys. 3) jest ogromna, ale jeśli uwzględnić obciążenie wagą $\exp(t_0)$, ma ona poziom zbliżony do zakłóceń pokazanych na rys. 2, na którym w początkowej fazie widać wyraźnie deformację przebiegu $x(t_0)$ spowodowaną procesem uśredniania.



Rys. 2. Porównanie przebiegów sygnału wejściowego $x(t_0)$ i sygnału odtworzonego $x(t_0)_g$ dla omawianego przykładu

Fig. 2. The comparison of input signal $x(t_0)$ and restored input signal $x(t_0)_g$ - see example discussed in the paper



Rys. 3. Porównanie przebiegów sygnału wejściowego $x(t_0)\exp(t_0)$ oraz odtworzonego przebiegu $\{x(t_0)\exp(t_0)\}_g$ dla omawianego przykładu

Fig. 3. The comparison of signal $x(t_0)\exp(t_0)$ and result of its restoration $\{x(t_0)\exp(t_0)\}_g$ - see example discussed in the paper

Odpowiednia deformacja przebiegu pokazana na rys. 3 jest zdecydowanie mniejsza, co stanowi wynik zgodny z przewidywaniami, gdyż w tym przypadku przebieg $x(t_0)\exp(t_0)$ jest bardziej gładki od przebiegu $x(t_0)$. Mimo tego pozytywnego efektu obciążenie wyniku odtwarzania wagą $\exp(t_0)$ właściwą modelowi Strejca w postaci (9) utrudnia korzystanie z wykresu, ogranicza czasowy przedział odtwarzania i wymaga stosowania dodatkowej matematycznej operacji (mnożenie wyniku odtwarzania przez funkcję $\exp(-t_0/T)$). Z tego względu stosowalność modelu Strejca przy odtwarzaniu stanu wejścia toru pomiarowego jest dyskusyjna.

4. MODELE WIENERA I HAMMERSTEINA

Model dynamiki opisany równaniami:

$$\sum_{i=0}^n a_i Y^{(i)} = F_1\{x(t)\}$$

$$y = F_2(Y)$$

nazywa się czasami modelem Wienera, jeśli $F_1(x) = x$, a ogólniej - modelem Hammersteina. Łatwo zauważyć, że odtwarzanie stanu wejścia przy takich modelach dynamiki toru pomiarowego i przy wykorzystaniu uśrednionego różniczkowania sprowadza wzór (3) do postaci:

$$F_1\{x(t_0)\}_x = \int_{-d}^d \left\{ \sum_{i=0}^n (-1)^i a_i g^{(i)}(v) \right\} F_2^{-1}\{y(t_0 + v)\} dv, \quad (20)$$

gdzie $F_2^{-1}(y)$ stanowi względem $F_2(Y)$ funkcję odwrotną. Tym samym poprzednie rozważania dają się z łatwością przenieść także i na te przypadki, a ewentualna dekompozycja obejmuje liniową część modelu.

5. UWAGI KOŃCOWE

Wykorzystanie modelu Strejca w liniowej części modelu dynamiki toru pomiarowego lub odpowiednia dekompozycja takiego modelu umożliwiają uproszczenie zależności (20) - niestety kosztem obciążenia wyniku odtwarzania wagą $\exp(t_0/T)$. Nie zmienia to w sposób zasadniczy wpływu zakłóceń na wynik odtwarzania stanu wejścia toru, a w pewnych przypadkach może zmniejszyć deformację przebiegu, zawsze jednak ogranicza czasowy przedział odtwarzania i w związku z tym celowość takiego postępowania jest dyskusyjna. Przytoczony przykład potwierdza przewidywania.

LITERATURA

1. Kordylewski W., Wach J. - Uśrednione różniczkowanie zakłóconych sygnałów pomiarowych. *Pomiary Automatyka Kontrola* 6/1988.
2. Orłowski M. - Odtwarzanie uśrednionych sygnałów wejściowych na podstawie zasumionych sygnałów wyjściowych. Rozprawa doktorska, Politechnika Szczecińska, Wydział Elektryczny, Szczecin 1992.
3. Boćkowska M., Żuchowski A. - Procedury korekcyjne przy odtwarzaniu stanu wejścia toru pomiarowego z wykorzystaniem uśrednionego różniczkowania. *Materiały VII Sympozjum „Modelowanie i Symulacja Systemów Pomiarowych”*. Krynica. 23-26 września 1997. Wyd. Zakładu Metrologii AGH, Kraków 1997.
4. Nuttall A.H. - Some windows with very good sidelobe behaviour. *IEEE Transaction on Acoustic, Speech and Signal Processing* (29) Nr 1, p. 84-91 1981.

Wpłynęło do redakcji dnia 1 grudnia 1998 r.

Recenzent: Dr hab. inż. Edward Layer prof. Politechniki Krakowskiej

Abstract

The operation of averaged differentiation (1) where weight function $g(t)$ has to fulfil certain conditions enables differentiation of weight function instead of differentiation of disturbed signal. That is why influences of disturbances are substantially reduced. If model of measuring system dynamics is known (2) then one can restore the averaged input signal $x(t_0)_g$ by application of relation (3) or relation (20) in case of more general Hammerstein's model to results of observations of disturbed output signal $y(t)_z$. The error of input restoration is given by formula (7). Using (7) one can determine the optimal weight function $g(t)$. The introduction of Strejc's model (8) and suitable decomposition of model (2) to the form (16) simplify the calculation procedure (3) to the form (18). The form (18) seems to be very advantageous for small number of addends. The result of proposed approach is biased by function $\exp(t_0/T)$. It makes that time interval for restoration process is narrowed. On the other hand there are certain conditions that bias function diminishes the deformation of signal restored by averaging. The example considered in the paper discusses both effects mentioned above.