ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1999
Seria: ELEKTRYKA z. 165 Nr kol. 1412

Adam ŻUCHOWSKI
Instytut Automatyki Przemysłowej
Politechnika Szczecińska

PRZYBLIŻONA OCENA WARTOŚCI BŁĘDU DYNAMICZNEGO $\sup\limits_{t\geq 0}|D(t)|$ W TORACH POMIAROWYCH O DZIAŁANIU LINIOWYM

Streszczenie. W liniowym torze pomiarowym o transmitancji K(s), w warunkach wejściowego sygnału x(s) obliczenie maksymalnej wartości błędu sup $|D(t)|$ dla $t \geq 0$ wymaga albo skomplikowanych analiz, albo symulacji komputerowej. Może ono być zastąpione zmajoryzowanym oszacowaniem opartym na ogół na znacznie prostszym obliczeniu wielkości sup $|sD(s)|$ dla $s \geq 0$ oraz obliczeniu współczynników rozkładu D(s) na ułamki proste.

APPROXIMATE ESTIMATION OF THE DYNAMIC ERROR $\sup\limits_{t\geq 0}|D(t)|$ FOR A LINEAR MEASURING SYSTEM

Summary. Calculation of the maximum value of the error sup $|D(t)|$ for $t \geq 0$ in case of a linear measuring system described by the transfer function K(s) can be done by either complicated analysis or computer simulation. The mentioned methods of error calculation can be replaced by relatively simple evaluation based on calculation of the value sup $|sD(s)|$ for $s \geq 0$ and application of the calculated of coefficients necessary for expansion of D(s) into partial fractions.

1. WPROWADZENIE

W liniowym torze pomiarowym o transmitancji K(s), w warunkach sygnału wejściowego x(s) błąd dynamiczny określa wzór:

$$D(s) = x(s)[1 - K(s)]. \tag{1}$$

Bezpośrednie obliczenie maksymalnej wartości błędu $\sup|D(t)|$ dla $t \geq 0$ wymaga zwykle skomplikowanych i żmudnych obliczeń, najczęściej wspomaganych komputerowo, dlatego też najprościej jest wykorzystać od razu komputerową symulację przebiegu D(t). Przekreśla to jednak możliwości ogólniejszych analiz, dlatego też poszukiwanie innych metod oceny wydaje się celowe, a szczególnie interesujące wydaje się wykorzystanie transformacji Laplace'a [1].

Z zależności:

$$D(s) = \int_0^\infty D(t)\exp(-st)dt \leq \sup_{t\geq 0}|D(t)|\int_0^\infty \exp(-st)dt = \frac{1}{s}\sup_{t\geq 0}|D(t)| \tag{2}$$

wynika jednak nierówność:

$$\sup_{t\geq 0} D(t) \geq \sup_{s\geq 0} sD(s), \tag{3}$$

nie pozwalająca na odpowiednie oszacowania i co najwyżej interesujący fakt, że jeżeli $\operatorname{sgn}_{s\geq 0} D(s) \neq \text{const}$ to $\operatorname{sgn}_{t\geq 0} D(t) \neq \text{const}$.

W większości przypadków D(s) jest funkcją wymierną operatora o skończonej liczbie biegunów i daje się rozłożyć na sumę ułamków prostych. Wykażemy, że w takich przypadkach możliwe jest zmajoryzowane oszacowanie maksymalnej wartości błędu $\sup|D(t)|$ dla $t \geq 0$ na podstawie wartości $\sup|sD(s)|$ dla $s \geq 0$ oraz znajomości współczynników rozkładu D(s) na ułamki proste [3].

2. PRZYPADEK NIEJEDNAKOWYCH, RZECZYWISTYCH BIEGUNÓW D(s)

Załóżmy, że D(s) posiada stabilne, rzeczywiste, niejednakowe bieguny i tym samym daje się przedstawić w postaci:

$$D(s) = \sum_i A_i \frac{1}{a_i + s}, \quad a_i \geq 0 \tag{4}$$

oraz:

$$D(t) = \sum_i A_i \exp(-a_i t). \tag{5}$$

Zauważymy, że dla dowolnego $a > 0$ zachodzi związek:

$$\sup_{s\geq 0}|sD(s)| = \sup_{s\geq 0}|asD(as)| = \sup_{s\geq 0}\left|\sum_i A_i \frac{a}{a + \frac{a_i}{s}}\right| = \sup_{t\geq 0}\left|\sum_i A_i \frac{a}{a + a_i t}\right| \tag{6}$$

i wzór (5) zapiszemy w następującej, równoważnej postaci:

$$D(t) = k\sum_i A_i \frac{a}{a+a_i t} - \sum_i A_i\left\{\frac{ka}{a+a_i t} - \exp(-a_i t)\right\}$$

skąd:

$$\sup_{t\geq 0}|D(t)| \leq k\sup_{t\geq 0}\left|\sum_i A_i \frac{a}{a+a_i t}\right| + \sum_i |A_i| \sup_{t\geq 0}\left|\frac{ka}{a+a_i t} - \exp(-a_i t)\right| \qquad (7)$$

Ponieważ, jak łatwo sprawdzić, zachodzi związek:

$$\min_{k,a}\sup_{z\geq 0}\left|\frac{ka}{a+z} - \exp(-z)\right| \cong 0.1 \quad \text{dla} \quad k = 1.00,\ a = 0.525,$$

zatem wykorzystując (6) otrzymuje się:

$$\sup_{t\geq 0}|D(t)| \leq \sup_{s\geq 0}|sD(s)| + 0.1\sum_i |A_i|. \qquad (8)$$

Wzór (8) pozwala oszacować maksymalną wartość błędu $|D(t)|$ na podstawie na ogół prostych obliczeń $\sup|sD(s)|$ dla $s \geq 0$ i znajomości współczynników rozkładu $D(s)$ na ułamki proste.

2.1. Przypadek biegunów rzeczywistych o zbliżonych wartościach

Założymy, że błąd $D(s)$ posiada dwa bieguny o zbliżonych wartościach, a pozostałe bieguny różnią się wyraźnie między sobą, przy czym wszystkie bieguny są rzeczywiste i stabilne:

$$D(s) = \frac{L(s)}{(s+a_1)(s+a_1+d)(s+a_2)\dots(s+a_n)} \equiv \frac{R(s)}{(s+a_1)(s+a_1+d)}. \qquad (9)$$

gdzie $a_i > 0$, $d << a_1$.

Przyjmując rozkład na ułamki proste:

$$D(s) \equiv \frac{A_0}{s+a_1} + \frac{A_1}{s+a_1+d} + \sum_n \frac{A_n}{s+a_n}$$

otrzymuje się: $A_0 = \dfrac{R(-a_1)}{d}$, $A_1 = \dfrac{R(-a_1-d)}{-d}$, a więc współczynniki o bardzo dużych, zbliżonych wartościach A_0 i A_1, co znacznie zawyża oszacowanie błędu na podstawie wzóru (8). W przypadku trzech lub większej liczby biegunów o zbliżonych wartościach sytuacja jeszcze bardziej się pogarsza i dlatego oszacowanie błędu należy wykonać inaczej. Wobec niewielkiej wartości d w stosunku do a_1 można przyjąć, że

$$A_1 \cong \frac{R(-a_1) - dR^{(1)}(-a_1)}{-d} = -A_0 + R^{(1)}(-a_1)$$

oraz:

$$\begin{aligned} A_0 \exp(-a_1 t) + A_1 \exp(-a_1 t - dt) &\cong A_0 \exp(-a_1 t)[1 - \exp(-dt)] + R^{(1)}(-a_1 t - dt) \cong \\ &\cong R(-a_1) t \ \exp(-a_1 t) + R^{(1)}(-a_1) \exp(-a_1 t) \end{aligned} \tag{10}$$

co pozwala traktować dwa rzeczywiste bieguny o zbliżonych wartościach jako jeden biegun podwójny i - uogólniając - traktować kilka biegunów rzeczywistych o zbliżonych wartościach jako biegun wielokrotny.

2.2. Przypadek rzeczywistych biegunów wielokrotnych

Załóżmy, że D(s) posiada rzeczywisty biegun r-krotny i pozostałe bieguny różniące się od siebie:

$$D(s) = \frac{L(s)}{(s+a_1)^r (s+a_2)\dots(s+a_n)}, \ a_i \geq 0, \tag{11}$$

co pozwala na dokonanie rozkładu:

$$D(s) = \sum_{i=2}^{r} \frac{A_{1i}}{(s+a_1)^i} + \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{(s+a_i)} \tag{12}$$

i wyznacza zależność:

$$D(t) = \sum_{i=2}^{r} A_{1i} \frac{t^{i-1}}{(i-1)!} \exp(-a_1 t) + \sum_{i=1}^{n} A_i \exp(-a_i t). \tag{13}$$

Ze wzoru (12) wynika:

$$\begin{aligned} \sup_{s \geq 0} |asD(as)| &= \sup_{s \geq 0} \left| \sum_{i=2}^{r} A_{1i} \frac{as^{i-1}}{(a + a_1 s^{-1})^i} + \sum_{i=1}^{n} A_i \frac{a}{(a + a_i s^{-1})} \right| = \\ &= \sup_{t \geq 0} \left| \sum_{i=2}^{r} A_{1i} \frac{at^{i-1}}{(a + a_1 t)^i} + \sum_{i=1}^{n} A_i \frac{a}{(a + a_i t)} \right| = \sup_{s \geq 0} |sD(s)| \quad \text{dla} \quad a > 0 \end{aligned} \tag{14}$$

Zapisując wzór (13) w równoważnej postaci:

$$\begin{aligned} D(t) = k \left\{ \sum_{i=2}^{r} A_{1i} \frac{at^{i-1}}{(a + a_1 t)^i} + \sum_{i=1}^{n} A_i \frac{a}{(a + a_i t)} \right\} - \left\{ \sum_{i=2}^{r} A_{1i} \left[\frac{akt^{i-1}}{(a + a_1 t)^i} - \frac{t^{i-1}}{(i-1)!} \exp(-a_1 t) \right] + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^{n} A_i \left[\frac{ak}{(a + a_i t)} - \exp(-a_i t) \right] \right\} \end{aligned} \tag{15}$$

otrzymuje się po wykorzystaniu wzoru (14):

$$\sup_{t\geq 0}|D(t)| \leq k\sup_{s\geq 0}|sD(s)| + \sum_{i=2}^{r}|A_{1i}||a_1|^{1-i}\sup_{z\geq 0} z^{i-1}\left|\frac{ak}{(a+z)^i} - \frac{\exp(-z)}{(i-1)!}\right| + \\ +\sum_{i=1}^{n}|A_i|\sup_{z\geq 0}\left|\frac{ak}{(a+z)} - \exp(-z)\right| \tag{16}$$

Ostatni człon wzoru dla k = 1.00, a = 0.525 został oszacowany jak we wzorze (8). Wykorzystując te same wartości k i a otrzymuje się:

$$\sup_{t\geq 0}|D(t)| \leq \sup_{s\geq 0}|sD(s)| + 0.15\sum_{i=2}^{r}|A_{1i}||a_1|^{1-i} + 0.1\sum_{i=1}^{n}|A_i|, \tag{17}$$

gdyż dla k = 1.00, a = 0.525 funkcja $U(i) = \sup_{z\geq 0}\left|\frac{ak}{(a+z)^i} - \frac{\exp(-z)}{(i-1)!}\right| z^{i-1}$

przyjmuje wartości zestawione w tabeli 1.

Tabela 1

Wartości funkcji U(i)

1	2	3	4	5	6	7
U(i)	0.150	0.142	0.133	0.125	0.118	0.112

3. PRZYPADEK NIEJEDNAKOWYCH BIEGUNÓW ZESPOLONYCH

W przypadku istnienia niejednakowych stabilnych biegunów zespolonych $s = -a_i \pm jb_i$ błąd D(s) można rozłożyć na sumę ułamków o postaci:

$$D(s) = \sum_i \left\{B_i\frac{s+a_i}{(s+a_i)^2 + b_i^2} + C_i\frac{b_i}{(s+a_i)^2 + b_i^2}\right\} \tag{18}$$

i tym samym:

$$D(t) = \sum_i \left\{B_i \exp(-a_i t)\cos\, b_i t + C_i\, \exp(-a_i t)\sin(b_i t)\right\}. \tag{19}$$

Ponieważ:

$$\sup_{s\geq 0}|sD(s)| = \sup_{s\geq 0}|asD(as)| = \sup_{s\geq 0}\left|\sum_i\left\{B_i\frac{a(a+a_is^{-1})}{(a+a_is^{-1})^2 + (b_is^{-1})^2} + C_i\frac{a(b_is^{-1})}{(a+a_is^{-1})^2 + (b_is^{-1})^2}\right\}\right| = \\ = \sup_{t\geq 0}\left|\sum_i\left\{B_i\frac{a(a+a_it)}{(a+a_it)^2 + (b_it)^2} + C_i\frac{ab_it}{(a+a_it)^2 + (b_it)^2}\right\}\right| \tag{20}$$

dla a > 0 oraz:

$$D(t)=\sum_i\left\{B_i\frac{a(a+a_it)}{(a+a_it)^2+(b_it)^2}+C_i\frac{ab_it}{(a+a_it)^2+(b_it)^2}\right\}-\sum_i B_i\left\{\frac{a(a+a_it)}{(a+a_it)^2+(b_it)^2}-\right.$$
$$\left.-\exp(-a_it)\cos\ b_it\right\}-\sum_i C_i\left\{\frac{ab_it}{(a+a_it)^2+(b_it)^2}-\exp(-a_it)\sin\ b_it\right\} \quad ,(21)$$

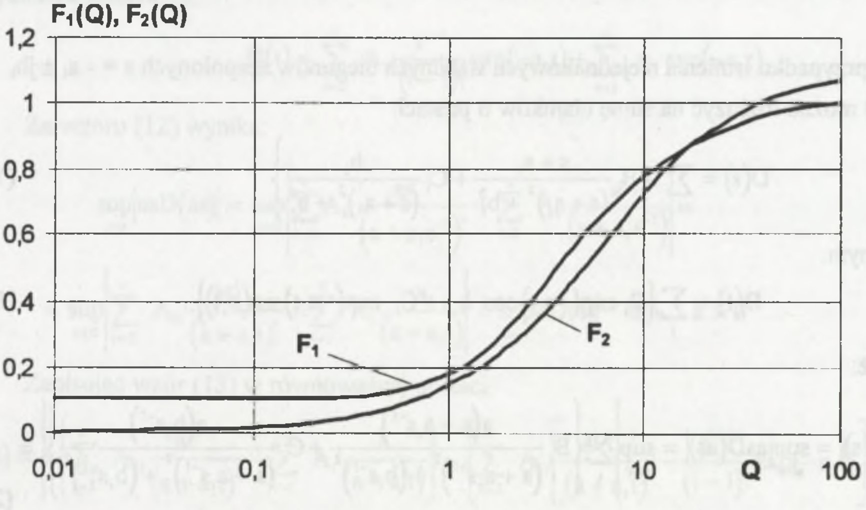
zatem po wprowadzeniu oznaczeń $a_it=x,\quad \frac{b_i}{a_i}=Q_i$

$$\sup_{t\geq 0}|D(t)|\leq\sup_{s\geq 0}|sD(s)|+\sum_i\left\{|B_i|F_1(Q_i)+|C_i|F_2(Q_i)\right\}, \tag{22}$$

gdzie:

$$F_1(Q_i)+\sup_{x\geq 0}\ \min_a\left|\frac{(1+a^{-1}x)}{(1+a^{-1}x)^2+(Q_ia^{-1}x)^2}-\exp(-x)\cos(Q_ix)\right|,$$
$$F_2(Q_i)=\sup_{x=0}\ \min_a\left|\frac{Q_ia^{-1}x}{(1+a^{-1}x)^2+(Q_ia^{-1}x)^2}-\exp(-x)\sin(Q_ix)\right|. \tag{23}$$

Wykresy funkcji $F_1(Q)$ i $F_2(Q)$ pokazano na rys. 1, gdzie dla nawiązania do poprzednich obliczeń przyjęto a = 0.525



Rys. 1. Wykresy funkcji $F_1(Q)$ i $F_2(Q)$ omawianych w tekście
Fig. 1. Functions $F_1(Q)$ and $F_2(Q)$

4. REGUŁY PRZYBLIŻONE

Jeżeli w sytuacji opisanej w rozdziale 2 dwa bieguny a_i oraz a_{i+1} różnią się znacznie od siebie, to szanse na wystąpienie maksimów obu członów wzoru (7) przy tej samej wartości t są znikome i we wzorze (7) wystarczy uwzględnić tylko jeden składnik sumy (8) o większej wartości $|A_i|$.

Jeżeli występuje kilka rzeczywistych biegunów mało różniących się od siebie, to można je zastąpić jednym biegunem wielokrotnym:

$$a_{iz} = \left(a_1 a_2 \ldots a_r\right)^{\frac{1}{r}} \tag{24}$$

i oszacowania dokonać na podstawie wzoru (17).

Przypadek wielokrotnych biegunów zespolonych nie będzie w tej pracy rozpatrywany.

5. PRZYKŁADY

Niech $D(s) = \dfrac{b}{(s+a)^2 + b^2}$, $D(t) = \exp(-at)\sin\ bt$.

Jak łatwo sprawdzić, zachodzi związek $\sup\limits_{s\geq 0}|sD(s)| = \dfrac{Q}{2\left(1+\sqrt{1+Q^2}\right)}$, gdzie $Q = \dfrac{b}{a}$. Wobec $C_i = 1$ wykorzystując wzór (22) i dane z rys. 1 otrzymuje się:

- dla Q = 1 $\sup\limits_{t\geq 0}|D(t)| \leq 0.359$ wobec dokładnej wartości 0.322,
- dla Q = 2 $\sup\limits_{t\geq 0}|D(t)| \leq 0.59$ wobec dokładnej wartości 0.515,
- dla Q = 5 $\sup\limits_{t\geq 0}|D(t)| \leq 0.913$ wobec dokładnej wartości 0.745.

Niech teraz $D(s) = \dfrac{s}{(1+s)(1+2s)(1+3s)} = \dfrac{-0.5}{1+s} + \dfrac{2}{1+2s} - \dfrac{1.5}{1+3s}$.

Wobec $\sup\limits_{s\geq 0}|sD(s)| = 0.0762$ wykorzystując wzór (8) otrzymuje się: $\sup\limits_{t\geq 0}|D(t)| \leq 0.276$ wobec dokładnej wartości 0.0643. Uwzględniając, że bieguny $s = -1$, $s = -\frac{1}{2}$ i $s = -\frac{1}{3}$ różnią się znacznie i stosując regułę przybliżoną jak w rozdziale 4 otrzymuje się: $\sup\limits_{t\geq 0}|D(t)| \cong 0.176$, co i tak daje oszacowanie ze znacznym zapasem.

6. UWAGI KOŃCOWE

Przytoczone przykłady dowodzą, że omawiana metoda pozwala na oszacowanie sup $|D(t)|$ dla $t \geq 0$ najczęściej ze znacznym zapasem. Wprawdzie współczesne metody symulacji komputerowej umożliwiają szybkie i bardzo dokładne obliczenia błędu bez potrzeby uciekania się do jakichkolwiek przybliżeń, ale wzory (8), (17) i (22) pokazują, jakie wielkości w zależności D(s) mają wpływ na kres górny tego błędu. Znajduje to zastosowanie np. przy wyznaczaniu uproszczonych modeli dynamiki [2], [3].

LITERATURA

1. Mikusiński J. - Rachunek operatorów. Monografie matematyczne, Warszawa 1953.
2. Żuchowski A. - O pewnej metodzie wyznaczania uproszczonych, liniowych modeli dynamiki obiektów. Pomiary Automatyka Kontrola 5/1998 str. 166-169
3. Żuchowski A. - Uproszczone modele dynamiki. Skrypt. Wydawnictwo Politechniki Szczecińskiej, Szczecin 1998.

Wpłynęło do redakcji dnia 1 grudnia 1998 r.

Recenzent: Dr hab. inż. Edward Layer prof. Politechniki Krakowskiej

Abstract

Application of unique relation between time representation of the measuring system error D(t) and its Laplace's transform D(s) to evaluation of sup $|D(t)|$ for $t \geq 0$ on the base of D(s) cannot be done in a simple way. The expansion of D(s) into partial fractions is proposed in the paper. The paper deals with the following cases: D(s) contains different poles which are real and stable (4), D(s) contains multiple, real, stable poles (12), D(s) contains stable complex poles (18). For each case mentioned above the excessive value of sup $|D(t)|$ for $t \geq 0$ can be calculated by using the result of calculation sup $|D(t)|$ for $t \geq 0$ as well as coefficients necessary for decomposition of D(s) into partial franctions. The suitable formulae are denoted by numbers (8), (17) and (22), respectively. The presented examples prove that excess in evaluating of sup $|D(t)|$ is usually considerable. There are certain approximate rules (see Chapter 4) which can be applied in order to make the excess in evaluation smaller.