

Zygmunt PIĄTEK

Bernard BARON

INDUKCYJNOŚCI KABLA KONCENTRYCZNEGO

Streszczenie. W zależności od wzajemnego położenia obszaru źródłowego Y (w którym gęstość prądu jest różna od zera) i obszaru obserwacji X dokonano różnych rozwinięć funkcji $\ln(r)$ i wyznaczono analitycznie logarytmiczny potencjał wektorowy A we wszystkich obszarach kabla koncentrycznego. Następnie wyznaczono indukcyjności własne żyły i osłony oraz indukcyjność wzajemną między żyłą kabla a jego osłoną dla przypadku prądu przemiennego o stałej gęstości prądu oraz z uwzględnieniem zjawisk naskórkowości i zbliżenia.

INDUCTANCES OF THE COAXIAL CABLE

Summary. According to the position of the source area Y (in which current density is non-zero) towards the observation area X different developments of function $\ln(r)$ are executed and the logarithmic vector potential A is analytically determined in the whole area of a coaxial cable. Afterwards the self-inductances of the core and the sheath along with the mutual inductance between the cable core and its sheath are determined for an alternating current of a constant current density taking skin and proximity effects into consideration.

1. WSTĘP

Jednym z problemów obliczeniowych jednofazowych, elektroenergetycznych kabli koncentrycznych jest obliczenie napięć indukowanych w ich osłonach oraz prądów tam płynących w przypadku zwarć osłon kabli na ich końcach między sobą lub do ziemi. Wtedy konieczna staje się znajomość indukcyjności wzajemnej między żyłą roboczą a osłoną.

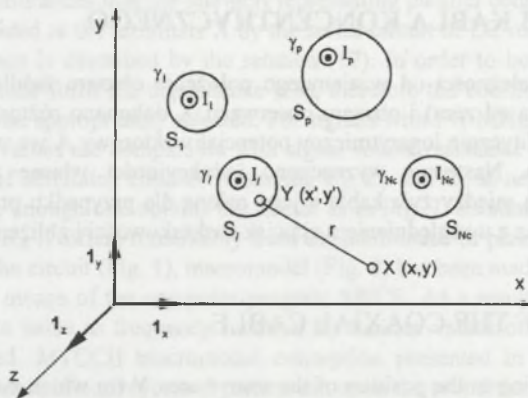
W licznych pracach poświęconych kablom koncentrycznym podaje się indukcyjność całkowitą kabla obliczaną dla prądu stałego [12,14,15,23] oraz dla prądu przemiennego z uwzględnieniem zjawiska naskórkowości [7,8,9,23]. Nie rozdziela się przy tym indukcyjności całkowitej na indukcyjności własne żyły i osłony oraz indukcyjności wzajemne między żyłą a osłoną. W pracy [1] Ametani podaje wzory na indukcyjności wzajemne żyła-osłona, ale bez uwzględnienia zjawiska naskórkowości.

Pole elektromagnetyczne w kablu koncentrycznym analizowane jest w wymienionych pracach jak również w [2,3,10,18,22]. Indukcyjność całkowitą kabla oblicza się dla prądu stałego obliczając strumienie magnetyczne skojarzone [10,12,14,22] bądź też z jej postaci całkowitej [15]. Dla prądu przemiennego indukcyjność całkowitą oblicza się z prawa Faradaya. [8,9].

Celem tej pracy jest obliczenie przede wszystkim indukcyjności wzajemnej między żyłą kabla a jego osłoną dla prądu przemiennego o stałej gęstości prądu, jak również z uwzględnieniem zjawisk naskórkowości i zbliżenia. Zakłada się przy tym, że przewidywany zakres częstotliwości prądu pozwala na pominięcie w rozważaniach prądów przesunięcia.

2. RÓWNANIE CAŁKOWE ORAZ IMPEDANCJE WŁASNE I WZAJEMNE UKŁADU PRZEWODÓW RÓWNOLEGLYCH

Zakłada się, że w układzie N_c przewodów równoległych (rys.1) płyną prądy sinusoidalne o zespolonych wartościach skutecznych $I_1, I_2, \dots, I_l, \dots, I_p, \dots, I_{N_c}$. Zwrot tych prądów jest zgodny ze zwrotem osi Oz .



Rys.1. Układ N_c przewodów równoległych

Fig.1. System of N_c parallel conductors

Prąd przemienny w przewodzie odosobnionym indukuje własne prądy wirowe o gęstości równoległej do osi Oz . Wektorowy potencjał magnetyczny wytworzony przez te prądy jest również równoległy do osi Oz i jako rozwiązanie równania Poissona (np. dla każdego l -tego przewodu odosobnionego; $X \in S_l$)

$$\nabla^2 A_l(X) = -\mu_0 J_l(X) \quad (1)$$

jest dany całką powierzchniową [11, 27]

$$A_l(X) = \frac{\mu_0}{2\pi} \int_{S_l} J_l(Y) \ln \frac{1}{r_{XY}} dx' dy' \quad (2)$$

gdzie: $X = X(x, y)$ - punkt obserwacji,

$Y = Y(x', y')$ - punkt źródłowy,

$J_l(X)$ - całkowita zespolona gęstość prądu; $X \in S_l$,

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$ - przenikalność magnetyczna próżni,

r_{XY} - odległość między punktem źródłowym a punktem obserwacji dana wzorem:

$$r_{XY} = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2} \quad (3)$$

Całkowite pole elektromagnetyczne w przewodzie określone jest przez sumę potencjałów A_{l0} i A_l , tj. przez sumę pola pierwotnego i pola wtórnego indukowanego przez prądy wirowe [11,27]. Wtedy natężenie pola elektrycznego

$$E_l(X) = -j\omega A_l(X) - j\omega A_{l0}(X) \quad (4)$$

Z równania [10]

$$\text{rot}(\mathbf{E}_l + j\omega \mathbf{A}_l) = 0 \quad (5)$$

otrzymuje się (dla $E_l = \mathbf{1}_z E_l$ i $A_l = \mathbf{1}_z A_l$), że

$$E_l(\mathbf{X}) = E_{l,i}(\mathbf{X}) + E_{l,st}(\mathbf{X}), \quad (6)$$

gdzie:

- pole elektryczne indukcji

$$E_{l,i}(\mathbf{X}) = -j\omega A_l(\mathbf{X}), \quad (7)$$

- pole elektryczne statyczne

$$E_{l,st}(\mathbf{X}) = -j\omega A_{l0}(\mathbf{X}) = -\frac{dV}{dz} = U_l = \text{const} \quad (8)$$

l jest równe jednostkowemu napięciu U_l w $V \cdot m^{-1}$ w l -tym przewodzie odosobnionym.

Wtedy równanie (4) można zapisać następująco:

$$E_l(\mathbf{X}) + j\omega A_l(\mathbf{X}) = U_l. \quad (9)$$

Uwzględniając uogólnione prawo Ohma z równania (9) i wzoru (2) otrzymuje się równanie całkowe Fredholma drugiego rodzaju dla przewodu odosobnionego

$$\frac{J_l(\mathbf{X})}{\gamma_l} + j\omega \frac{\mu_0}{2\pi} \int_{S_l} J_l(\mathbf{Y}) \ln \frac{1}{r_{XY}} dS_l = U_l. \quad (10)$$

Można wykazać, że równanie to ma jednoznaczne rozwiązanie dla dowolnej (nie tylko stałej) prawej strony [4,28]. Zatem dla danej gęstości prądu równanie (10) jednoznacznie określa jednostkowe napięcie U_l , a tym samym stałą A_{l0} . Gdy dane jest jednostkowe napięcie U_l , to stała A_{l0} w sposób oczywisty jest jednoznacznie określona (wzór (8)) i w konsekwencji gęstość prądu $J_l(\mathbf{X})$ jest również jednoznacznie określona.

W układzie N_c przewodów równoległych (rys.1) z prądami zespolonymi I_p ($p = 1, 2, \dots, N_c$) zachodzi wzajemne oddziaływanie pól elektromagnetycznych wszystkich przewodów [13, 16, 28] i wtedy równanie (9) dla l -tego przewodu ($\mathbf{X} \in S_l$) ma postać:

$$E_l(\mathbf{X}) + j\omega \sum_{p=1}^{N_c} A_p(\mathbf{X}) = U_l, \quad (11)$$

zaś równanie całkowe

$$\frac{J_l(\mathbf{X})}{\gamma_l} + j\omega \sum_{p=1}^{N_c} \frac{\mu_0}{2\pi} \int_{S_p} J_p(\mathbf{Y}_p) \ln \frac{1}{r_{XY_p}} dS_p = U_l, \quad (12)$$

gdzie $J_p(\mathbf{Y}_p)$ jest całkowitą gęstością prądu w p -tym przewodzie.

W przypadku ogólnym całkowite pole elektryczne $E_l(\mathbf{X})$ i całkowita gęstość prądu $J_l(\mathbf{X})$ zależą zatem od prądów $I_1, I_2, \dots, I_p, I_{N_c}$. Analogicznie jest dla gęstości prądu $J_p(\mathbf{Y}_p)$ w p -tym przewodzie i potencjału $A_p(\mathbf{X})$, wytworzonego przez $J_p(\mathbf{Y}_p)$.

Równanie (11) przedstawia się następująco:

$$\frac{J_l(\mathbf{X})}{\gamma_l} + j\omega \sum_{p=1}^{N_c} A_p(\mathbf{X}) = U_l, \quad (13)$$

gdzie potencjał magnetyczny

$$A_p(\mathbf{X}) = \frac{\mu_0}{2\pi} \int_{S_p} J_p(\mathbf{Y}_p) \ln \frac{1}{r_{XY_p}} dS_p. \quad (14)$$

Następnie w równaniu (13) należy odseparować gęstość prądu pochodzącą od prądu I_l od pozostałych gęstości, tzn. pochodzących od prądów I_k dla $k \neq l$, $k = 1, 2, \dots, N_c-1$.

Wtedy

$$J_l(X) = \sum_{p=1}^{N_c} J_{lp}(X) = J_{ll}(X) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^{N_c-1} J_{lk}(X), \quad (15)$$

gdzie: $J_{lp}(X)$ - gęstość prądu w l -tym przewodzie, pochodząca od prądu I_p ($p = 1, 2, \dots, N_c$),

$J_{ll}(X)$ - gęstość prądu w l -tym przewodzie, pochodząca od prądu I_l ($l = 1, 2, \dots, N_c$),

$J_{lk}(X)$ - gęstość prądu w l -tym przewodzie, pochodząca od prądu I_k ($k \neq l$;

$k = 1, 2, \dots, N_c-1$),

Analogicznie postępuje się w odniesieniu do potencjału magnetycznego $A_p(X)$ odseparowując potencjały zależne tylko od prądu I_l od wszystkich pozostałych (zależnych od prądów I_k , gdzie $k \neq l$; $k = 1, 2, \dots, N_c-1$). Dokonuje się tego w dwóch krokach. W pierwszym kroku rozdziela się potencjał całkowity w l -tym przewodzie na potencjał pochodzący od całkowitej gęstości prądu w l -tym przewodzie i potencjał pochodzący od całkowitych gęstości prądu w przewodach pozostałych. W następnym kroku w każdym z dwóch członów tak otrzymanego potencjału dokonuje się separacji potencjałów pochodzących od prądu I_l od wszystkich pozostałych. W wyniku takiego postępowania równanie (13) przyjmuje postać:

$$\begin{aligned} & \frac{J_{ll}(X)}{\gamma_l} + j\omega A_{ll}(X, Y_l) + j\omega \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^{N_c-1} A_{kl}(X, Y_k) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^{N_c-1} \frac{J_{lk}(X)}{\gamma_l} + \\ & + j\omega \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^{N_c-1} A_{lk}(X, Y_l) + j\omega \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^{N_c-1} \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq l}}^{N_c-1} A_{ks}(X, Y_k) = U_l, \end{aligned} \quad (16)$$

gdzie $s \neq l$; $s = 1, 2, \dots, N_c-1$, potencjał $A_{ll}(X, Y_l)$ jest potencjałem w l -tym przewodzie wytworzonym przez gęstość prądu J_{ll} w l -tym przewodzie, pochodzącą od prądu I_l

$$A_{ll}(X, Y_l) = \frac{\mu_0}{2\pi} \int_{S_l} J_{ll}(Y_l) \ln \frac{1}{r_{XY_l}} dS_l, \quad (17)$$

potencjał $A_{lk}(X, Y_l)$ w l -tym przewodzie wytworzony jest przez gęstość prądu J_{lk} w l -tym przewodzie, pochodzącą od prądu I_k

$$A_{lk}(X, Y_l) = \frac{\mu_0}{2\pi} \int_{S_l} J_{lk}(Y_l) \ln \frac{1}{r_{XY_l}} dS_l, \quad (18)$$

potencjał $A_{kl}(X, Y_k)$ w l -tym przewodzie wytworzony jest przez gęstość prądu J_{kl} w k -tym przewodzie, pochodzącą od prądu I_l

$$A_{kl}(X, Y_k) = \frac{\mu_0}{2\pi} \int_{S_k} J_{kl}(Y_k) \ln \frac{1}{r_{XY_k}} dS_k, \quad (19)$$

potencjał

$$A_{ks}(X, Y_k) = \frac{\mu_0}{2\pi} \int_{S_k} J_{ks}(Y_k) \ln \frac{1}{r_{XY_k}} dS_k \quad (20)$$

jest potencjałem w l -tym przewodzie wytworzonym przez gęstość prądu J_{ks} w k -tym przewodzie, pochodzącym od prądu I_s ($s \neq l$, $s = 1, 2, \dots, N_c-1$).

Istnienie każdego z sześciu członów lewej strony równania (16) uwarunkowane jest wzajemną konfiguracją przewodów i stanu prądowego w przewodach.

W ostatnim członie lewej strony równania (16) można zamienić miejscami k oraz s . Wtedy pierwsze trzy człony zależą od prądu I_l , zaś pozostałe od prądu I_k .

Mając na uwadze określenie związków między całkowitymi, jednostkowymi spadkami napięć U_l ($l = 1, 2, \dots, N_c$) w przewodach a wszystkimi prądami I_k ($k = 1, 2, \dots, N_c$), tzn. określenie macierzy impedancji jednostkowych (własnych i wzajemnych), mnoży się stronami równanie (16) przez $J_{ll}^*(X)$ i całkuje po powierzchni S_l otrzymując:

$$\int_{S_l} U_l J_{ll}^*(X) dS_l = \left\{ \frac{1}{|I_l|^2} \int_{S_l} \left[\frac{J_{ll}(X)}{\gamma_l} + j\omega A_{ll}(X, Y_l) + j\omega \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^{N_c-1} A_{kl}(X, Y_k) \right] J_{ll}^*(X) dS_l \right\} |I_l|^2 + \\ + \left\{ \frac{1}{I_l^* I_k} \int_{S_l} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^{N_c-1} \left[\frac{J_{lk}(X)}{\gamma_l} + j\omega A_{lk}(X, Y_l) + j\omega \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq l}}^{N_c-1} A_{sk}(X, Y_s) \right] J_{ll}^*(X) dS_l \right\} I_l^* I_k \quad (21)$$

Jednostkowe napięcie U_l nie zależy od zmiennej x i y , więc

$$\int_{S_l} U_l J_{ll}^*(X) dS_l = U_l I_l^* \quad (22)$$

Następnie równanie (21) dzieli się stronami przez sprzężoną wartość prądu I_l^* otrzymując:

$$U_l = Z_{ll} I_l + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^{N_c-1} Z_{lk} I_k \quad (23)$$

gdzie jednostkowa impedancja własna (w $\Omega \cdot m^{-1}$) l -tego przewodu

$$Z_{ll} = \frac{1}{|I_l|^2} \int_{S_l} \left[\frac{J_{ll}(X)}{\gamma_l} + j\omega A_{ll}(X, Y_l) + j\omega \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^{N_c-1} A_{kl}(X, Y_k) \right] J_{ll}^*(X) dS_l \quad (23a)$$

oraz jednostkowa impedancja wzajemna (w $\Omega \cdot m^{-1}$) między l -tym a k -tym przewodem

$$Z_{lk} = \frac{1}{I_l^* I_k} \int_{S_l} \left[\frac{J_{lk}(X)}{\gamma_l} + j\omega A_{lk}(X, Y_l) + j\omega \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq l}}^{N_c-1} A_{sk}(X, Y_s) \right] J_{ll}^*(X) dS_l \quad (23b)$$

Jeżeli zatem założy się, że gęstości prądów są rozwiązaniem równań Helmholtza przy określonych warunkach brzegowych, to wtedy ze wzoru (2) można obliczyć wszystkie potencjały (w sposób analityczny lub numeryczny). W konsekwencji będzie można obliczyć jednostkową impedancją własną - wzór (23a) oraz jednostkową impedancję wzajemną - wzór (23b). Tak można postąpić dla każdego z układu N_c przewodów. Otrzymane ogólne formuły (23a) i (23b) wyznaczania elementów macierzy impedancji jednostkowych nadają się do zastosowania niezależnie od sposobu rozwiązania pola elektromagnetycznego, czy to bezpośrednio metodami analitycznymi lub numerycznymi z równania Helmholtza, czy też równoważnymi równaniami całkowitymi. W dalszym ciągu pracy pokazane będzie zastosowanie analitycznego rozwiązania równania Helmholtza dla kabla koncentrycznego do wyznaczania macierzy impedancji jednostkowych.

Jednostkowa rezystancja własna (w $\Omega \cdot m^{-1}$) l -tego przewodu

$$R_{ll} = \operatorname{Re}\{Z_{ll}\}, \quad (24)$$

zaś jednostkowa indukcyjność własna (w $H \cdot m^{-1}$)

$$L_{ll} = \frac{1}{\omega} \operatorname{Im}\{Z_{ll}\}. \quad (24a)$$

W ogólnym przypadku jednostkowa indukcyjność własna nie jest liniową funkcją pulsacji ω . Wzór (24a) określa ją jako parametr stojący przy $j\omega$ we wzorze (23a) określającym impedancję własną przewodu i z punktu widzenia teorii obwodów nazywa się ją [5,13,25] jednostkową indukcyjnością własną. Nie należy kojarzyć jej z konturem zamkniętym obwodu (wg klasycznego pojmowania indukcyjności własnej obwodu zamkniętego).

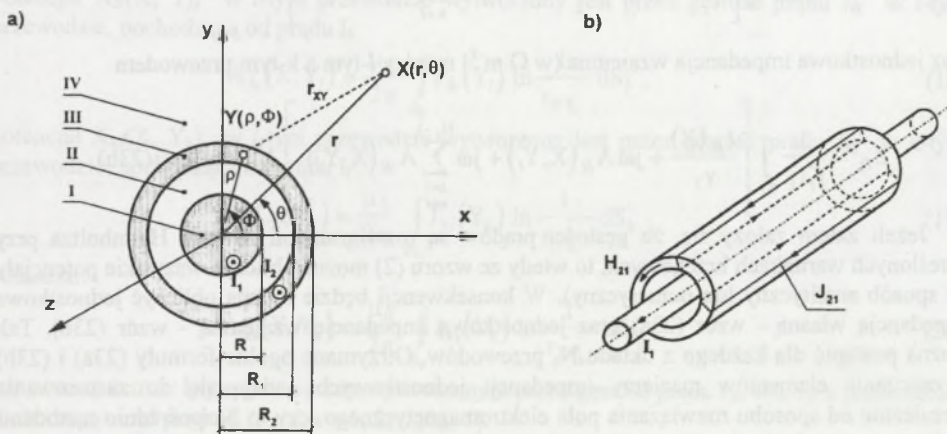
Część urojona, podzieloną przez ω , jednostkowej impedancji wzajemnej

$$M_{lk} = \frac{1}{\omega} \operatorname{Im}\{Z_{lk}\} \quad (25)$$

nazywa się jednostkową indukcyjnością wzajemną (w $H \cdot m^{-1}$) zastrzegając, że jest to parametr określony przez wzór (25), którego nie należy łączyć z klasycznym określeniem indukcyjności wzajemnej dwóch obwodów (dwóch cewek) sprzężonych magnetycznie. Parametr ten określa składową napięcia, indukowaną w l -tym przez prąd w k -tym przewodzie, przesuniętą w fazie względem prądu I_k dokładnie o $+\frac{\pi}{2}$ (całkowite napięcie indukowane przez prąd I_k jest przesunięte w fazie względem tego prądu o argument jednostkowej impedancji wzajemnej Z_{lk}).

3. LOGARYTMICZNY, WEKTOROWY POTENCJAŁ MAGNETYCZNY PRZEWODU RUROWEGO

Osłona kabla koncentrycznego (rys.2) jest przewodnikiem rurowym, przez który płynie zespolony prąd I_2 o zwrocie zgodnym ze zwrotem osi Oz.



Rys.2. Kabel koncentryczny; a) przekrój poprzeczny, b) prądy wirowe J_{21} indukowane w osłonie
Fig.2. Coaxial cable; a) cross-section, b) eddy currents J_{21} induced in the screen

Wektorowy potencjał magnetyczny ma tylko jedną składową wzdłuż osi Oz. Spełnia on dwuwymiarowe równanie Poissona w obszarze przewodzącym i dwuwymiarowe równanie Laplace'a na zewnątrz tego obszaru. Podstawowym rozwiązaniem tych dwóch równań jest zależność nazywana logarytmicznym potencjałem wektorowym [10] i w układzie współrzędnych walcowych r, θ, z wyraża się wzorem:

$$A_2(X) = \frac{\mu_0}{2\pi} \int_{S_V} J_2(Y) \ln \frac{1}{r_{XY}} \rho d\rho d\Phi, \quad (26)$$

gdzie: $X=X(r,\theta)$ - punkt obserwacji,

$Y=Y(\rho,\Phi)$ - punkt źródłowy gdzie $J \neq 0$,

$J_2(Y)$ - całkowita zespolona gęstość prądu w osłonie,

(r,θ) oraz (ρ,Φ) - współrzędne punktów X i Y w walcowym układzie współrzędnych,

r_{XY} - odległość między punktem źródłowym a punktem obserwacji; we współrzędnych walcowych jest dana wzorem:

$$r_{XY}^2 = r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos(\Phi - \Theta). \quad (27)$$

Obliczenie wektorowego potencjału magnetycznego sprowadza się więc do obliczenia całki (26). W tym celu rozważa się dwa przypadki wzajemnych związków między współrzędną r oraz współrzędną ρ walcowego układu współrzędnych.

Dla $r \geq \rho$

$$\ln \frac{1}{r_{XY}} = - \left(\ln \frac{r_{XY}}{r} + \ln r \right) \quad (28)$$

i ponadto, rozwijając w szereg Fouriera [6] funkcję

$$\ln \frac{r_{XY}}{r} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{\rho}{r} \right)^n \cos[n(\Phi - \Theta)], \quad (29)$$

otrzymuje się:

$$- \ln r_{XY} = - \left\{ \ln r - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{\rho}{r} \right)^n \cos[n(\Phi - \Theta)] \right\}. \quad (30)$$

Wtedy zespolony, wektorowy potencjał magnetyczny

$$A_2^{IV}(r, \Theta) = - \frac{\mu_0}{2\pi} \int_{S_V} J_2(\rho, \Phi) \left\{ \ln r - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{\rho}{r} \right)^n \cos[n(\Phi - \Theta)] \right\} \rho d\rho d\Phi. \quad (31)$$

Dla układu o symetrii walcowej i obszaru całkowania będącego pierścieniem o promieniu wewnętrznym R_1 i zewnętrznym R_2 otrzymuje się dla $r \geq R_2$

$$A_2^{IV}(r) = -\mu_0 \ln r \int_{R_1}^{R_2} J_2(\rho) \rho d\rho. \quad (32)$$

Ze wzoru (32) wynika, że wektorowy potencjał magnetyczny w obszarze zewnętrznym przewodu rurowego, tj. dla $r \geq R_2$, jest funkcją zmiennej r walcowego układu współrzędnych.

Dla $r \leq \rho$

$$\ln \frac{1}{r_{XY}} = - \left[\ln \frac{r_{XY}}{\rho} + \ln \rho \right] \quad (33)$$

i po rozwinięciu w szereg Fouriera funkcji

$$\ln \frac{r_{XY}}{\rho} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r}{\rho} \right)^n \cos[n(\Phi - \Theta)] \quad (34)$$

$$\ln \frac{r_{XY}}{\rho} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r}{\rho} \right)^n \cos[n(\Phi - \Theta)] \quad (34)$$

otrzymuje się :

$$- \ln r_{XY} = - \left\{ \ln \rho - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r}{\rho} \right)^n \cos[n(\Phi - \Theta)] \right\}. \quad (35)$$

Wtedy wektorowy potencjał magnetyczny

$$A_2^{\text{II}}(r, \Theta) = - \frac{\mu_0}{2\pi s_v} \int J_2(\rho, \Phi) \left\{ \ln \rho - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r}{\rho} \right)^n \cos[n(\Phi - \Theta)] \right\} \rho d\rho d\Phi. \quad (36)$$

Dla układu o symetrii walcowej i dla $r \leq R_1$ otrzymuje się:

$$A_2^{\text{II}}(r) = A_2^{\text{I}}(r) = -\mu_0 \int_{R_1}^{R_2} J_2(\rho) \rho \ln \rho d\rho = \text{const.}, \quad (37)$$

tzn., że w obszarze wewnętrznym przewodu rurowego, tj. dla $r \leq R_1$ wektorowy potencjał magnetyczny jest stały, niezależny od zmiennej r walcowego układu współrzędnych.

Dla $R_1 \leq r \leq R_2$, tj. w przewodzie rurowym między r a ρ , zachodzą dwa wyżej rozpatrywane przypadki. Dlatego obliczanie wektorowego potencjału magnetycznego w tym obszarze sprowadza się do obliczania dwóch różnych całek : typu (32) oraz typu (37). Otrzymuje się wtedy, że

$$A_2^{\text{III}}(r) = -\mu_0 \ln r \int_{R_1}^r J_2(\rho) \rho d\rho - \mu_0 \int_r^{R_2} J_2(\rho) \rho \ln \rho d\rho. \quad (38)$$

Występująca we wzorach (26), (32), (37) i (38) gęstość prądu J_2 jest gęstością całkowitą w osłonie kabla. Jest ona sumą zespoloną gęstości prądu J_{21} , tj. prądu wirowego indukowanego przez przemienne pole magnetyczne H_{21} prądu I_1 (rys.2b) oraz gęstości J_{22} , pochodzącej od prądu I_2 osłony.

4. LOGARYTMICZNY WEKTOROWY POTENCJAŁ PRZEWODU WALCOWEGO

Żyłą roboczą kabla koncentrycznego (rys.2) jest przewodem walcowym, przez który płynie zespolony prąd I_1 o zwrocie zgodnym ze zwrotem osi Oz . Wektorowy potencjał magnetyczny takiego przewodu wyznacza się ze wzorów: (32) dla obszaru zewnętrznego oraz (38) wewnątrz przewodu. W ten sposób otrzymuje się :

- dla $r \geq R$

$$A_1^{\text{II}}(r) = A_1^{\text{III}}(r) = A_1^{\text{IV}}(r) = -\mu_0 \ln r \int_0^R J_1(\rho) \rho d\rho, \quad (39)$$

- dla $0 \leq r \leq R$

$$A_1^{\text{I}}(r) = -\mu_0 \ln r \int_0^r J_1(\rho) \rho d\rho - \mu_0 \int_r^R J_1(\rho) \rho \ln \rho d\rho. \quad (40)$$

Pole magnetyczne wytworzone przez prąd I_2 osłony w obszarze wewnętrznym ($r \leq R_1$) jest równe zeru (prawo przepływu). W żyłce roboczej brak jest zatem prądów wirowych i gęstość prądu J_1 dotyczy wyłącznie prądu I_1 .

5. INDUKCYJNOŚĆ KABLA KONCENTRYCZNEGO DLA CZĘSTOTLIWOŚCI PRZEMYSŁOWEJ

Dla prądu przemiennego o częstotliwości przemysłowej można pominąć prądy wirowe J_{21} indukowane w osłonie przez prąd I_1 i założyć, że zespolone gęstości prądów są w przybliżeniu stałe i wynoszą :

$$J_1 \cong \frac{I_1}{\pi R^2} \quad (41)$$

oraz

$$J_2 \cong \frac{I_2}{\pi(R_2^2 - R_1^2)}. \quad (42)$$

Zespolony potencjał magnetyczny wytworzony przez prąd I_1 żyły roboczej oblicza się ze wzorów (39) i (40) po podstawieniu do nich wzoru (41). W ten sposób otrzymuje się :

- dla $0 \leq r \leq R$, tj. wewnątrz żyły roboczej

$$A_1^I(r) \cong -\frac{\mu_0 I_1}{2\pi} \left(\ln R - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{r^2}{R^2} \right), \quad (43)$$

- dla $r \geq R$, tj. na zewnątrz żyły roboczej

$$A_1^{II}(r) = A_1^{III}(r) = A_1^{IV}(r) = -\frac{\mu_0 I_1}{2\pi} \ln r. \quad (44)$$

Zespolony potencjał magnetyczny wytworzony przez prąd I_2 osłony kabla oblicza się ze wzorów (32), (37) i (38) po podstawieniu do nich wzoru (42). Wtedy otrzymuje się :

- dla $r \geq R_2$, tj. na zewnątrz osłony

$$A_2^{IV}(r) = -\frac{\mu_0 I_2}{2\pi} \ln r, \quad (45)$$

- dla $R_1 \leq r \leq R_2$, tj. w osłonie

$$A_2^{III}(r) \cong -\frac{\mu_0 I_2}{2\pi(R_2^2 - R_1^2)} \left[R_2^2 \ln R_2 - R_1^2 \ln r - \frac{1}{2}(R_2^2 - r^2) \right], \quad (46)$$

- dla $r \leq R_1$, tj. wewnątrz osłony

$$A_2^{III}(r) = A_2^I(r) \cong -\frac{\mu_0 I_2}{2\pi(R_2^2 - R_1^2)} \left[R_2^2 \ln R_2 - R_1^2 \ln R_1 - \frac{1}{2}(R_2^2 - R_1^2) \right] = \text{const.} \quad (47)$$

Jest łatwe do sprawdzenia, że każdy z potencjałów, zarówno $A_1(r)$ jak również $A_2(r)$, spełnia warunki ciągłości na odpowiednich powierzchniach granicznych. Ponadto odpowiednie zespolone natężenia pól magnetycznych obliczone wg wzoru:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \text{rot} \mathbf{A}, \quad (48)$$

który w tym przypadku sprowadza się do wzoru:

$$H_\theta = -\frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{dA(r)}{dr}, \quad (49)$$

są zgodne z odpowiednimi zespolonymi natężeniami pól magnetycznych obliczonymi z prawa przepływu.

Całkowity zespolony potencjał wektorowy w każdym z obszarów przewodu koncentrycznego jest superpozycją odpowiednich zespolonych potencjałów wytworzonych przez prąd I_1 oraz prąd I_2 . Spełnia on warunki ciągłości na powierzchniach granicznych i obliczone na jego podstawie, zgodnie ze wzorem (49), natężenia całkowitych pól magnetycznych w

poszczególnych obszarach są zgodne z odpowiednimi natężeniami tych pól obliczonych z prawa przepływu.

W przypadku kabla koncentrycznego z rys.2 i pominięciu prądów wirowych J_{21} z równania (16) otrzymuje się :

– dla żyły roboczej

$$U_1 = E^I(r) + j\omega A_1^I(r) + j\omega A_2^I(r), \quad (50)$$

– dla osłony

$$U_2 = E^{III}(r) + j\omega A_2^{III}(r) + j\omega A_1^{III}(r), \quad (51)$$

gdzie z prawa Ohma natężenia pól elektrycznych:

$$E^I(r) = \frac{1}{\gamma_1} J_1(r) \quad (52)$$

oraz

$$E^{III}(r) = \frac{1}{\gamma_2} J_2(r), \quad (53)$$

w których γ_1 i γ_2 są konduktywnościami odpowiednio żyły i osłony.

Następnie równanie (50) mnoży się stronami przez zespoloną sprzężoną gęstość prądu $J_1^*(r)$ i całkuje się je po obszarze S^I ; równanie (51) mnoży się przez $J_2^*(r)$ i całkuje się je po obszarze S^{III} . W ten sposób otrzymuje się :

$$\int_{S^I} U_1 J_1^*(r) dS^I = \frac{1}{\gamma_1} \int_{S^I} J_1(r) J_1^*(r) dS^I + j\omega \int_{S^I} A_1^I(r) J_1^*(r) dS^I + j\omega \int_{S^I} A_2^I(r) J_1^*(r) dS^I \quad (54)$$

oraz

$$\int_{S^{III}} U_2 J_2^*(r) dS^{III} = \frac{1}{\gamma_2} \int_{S^{III}} J_2(r) J_2^*(r) dS^{III} + j\omega \int_{S^{III}} A_2^{III}(r) J_2^*(r) dS^{III} + j\omega \int_{S^{III}} A_1^{III}(r) J_2^*(r) dS^{III}. \quad (55)$$

Napięcia U_1 i U_2 nie zależą od zmiennej r , więc całki z lewych stron równań (54) i (55) są odpowiednimi iloczynami tych napięć i prądów I_1^* oraz I_2^* . Równania te można więc zapisać w postaci :

$$U_1 I_1^* = R_1 |I_1|^2 + j\omega \left[\frac{1}{|I_1|^2} \int_{S^I} A_1^I(r) J_1^*(r) dS^I \right] |I_1|^2 + j\omega \left[\frac{1}{I_2^* I_1^*} \int_{S^I} A_2^I(r) J_1^*(r) dS^I \right] I_2 I_1^*, \quad (56)$$

gdzie rezystancja jednostkowa żyły roboczej (w $\Omega \cdot m^{-1}$)

$$R_1 = \frac{2\pi}{\gamma_1 |I_1|^2} \int_0^R J_1(r) J_1^*(r) r dr \quad (57)$$

oraz

$$U_2 I_2^* = R_2 |I_2|^2 + j\omega \left[\frac{1}{|I_2|^2} \int_{S^{III}} A_2^{III}(r) J_2^*(r) dS^{III} \right] |I_2|^2 + j\omega \left[\frac{1}{I_1^* I_2^*} \int_{S^{III}} A_1^{III}(r) J_2^*(r) dS^{III} \right] I_1 I_2^*, \quad (58)$$

gdzie rezystancja jednostkowa osłony (w $\Omega \cdot m^{-1}$)

$$R_2 = \frac{2\pi}{\gamma_2 |I_2|^2} \int_{R_1}^{R_2} J_2(r) J_2^*(r) r dr. \quad (59)$$

Dzieląc stronami równanie (56) przez I_1^* zaś równanie (58) przez I_2^* otrzymuje się :

$$U_1 = R_1 I_1 + j\omega \left[\frac{1}{|I_1|^2} \int_{S^I} A_1^I(r) J_1^*(r) dS^I \right] I_1 + j\omega \left[\frac{1}{I_2^* I_1^*} \int_{S^I} A_2^I(r) J_1^*(r) dS^I \right] I_2 \quad (60)$$

oraz

$$U_2 = R_2 I_2 + j\omega \left[\frac{1}{|I_2|^2} \int_{S^{\text{III}}} A_2^{\text{III}}(r) J_2^*(r) dS^{\text{III}} \right] I_2 + j\omega \left[\frac{1}{I_1 I_2} \int_{S^{\text{III}}} A_1^{\text{III}}(r) J_2^*(r) dS^{\text{III}} \right] I_1. \quad (61)$$

Po uwzględnieniu wzorów (23a), (23b), (24a) i (25) powyższe równania można zapisać następująco:

$$U_1 = R_1 I_1 + j\omega L_1 I_1 + j\omega M_{12} I_2 \quad (62)$$

oraz

$$U_2 = R_2 I_2 + j\omega L_2 I_2 + j\omega M_{21} I_1. \quad (63)$$

W ten sposób wyznacza się jednostkowe indukcyjności własne (w $\text{H}\cdot\text{m}^{-1}$)

$$L_1 = \frac{2\pi}{|I_1|^2} \int_0^R A_1^{\text{I}}(r) J_1^*(r) r dr \quad (64)$$

oraz

$$L_2 = \frac{2\pi}{|I_2|^2} \int_{R_1}^{R_2} A_2^{\text{III}}(r) J_2^*(r) r dr, \quad (65)$$

zaś jednostkowe indukcyjności wzajemne (w $\text{H}\cdot\text{m}^{-1}$)

$$M_{12} = \frac{2\pi}{I_2 I_1} \int_0^R A_2^{\text{I}}(r) J_1^*(r) r dr \quad (66)$$

oraz

$$M_{21} = \frac{2\pi}{I_1 I_2} \int_{R_1}^{R_2} A_1^{\text{III}}(r) J_2^*(r) r dr. \quad (67)$$

Przybliżoną wartość indukcyjności własnej na jednostkę długości żyły roboczej oblicza się ze wzoru ogólnego (64) podstawiając do niego wzory (41) i (43). Po wykonaniu całkowania otrzymuje się :

$$L_{10} \cong \frac{\mu_0}{8\pi} + \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{1}{R}. \quad (68)$$

Podstawiając do wzoru (65) wzory (42) i (46) oraz wykonując całkowanie oblicza się przybliżoną wartość indukcyjności własnej na jednostkę długości osłony kabla

$$L_{20} \cong \frac{\mu_0}{2\pi} \left[\ln \frac{1}{R_2} + \frac{R_1^4}{(R_2^2 - R_1^2)^2} \ln \frac{R_2}{R_1} - \frac{1}{4} \frac{3R_1^2 - R_2^2}{(R_2^2 - R_1^2)} \right]. \quad (69)$$

Po podstawieniu wzorów (41) i (47) do wzoru (66) otrzymuje się przybliżoną wartość indukcyjności wzajemnej M_{12} na jednostkę długości kabla koncentrycznego (w $\text{H}\cdot\text{m}^{-1}$)

$$M_{12} = M_{21} = M_0 \cong \frac{\mu_0}{2\pi} \left[\frac{R_1^2 \ln R_1 - R_2^2 \ln R_2}{R_2^2 - R_1^2} + \frac{1}{2} \right], \quad (70)$$

gdzie M_{21} obliczono ze wzoru (67) po podstawieniu do niego wzorów (42) i (44).

6. INDUKCYJNOŚĆ KABLA KONCENTRYCZNEGO Z UWZGLĘDNIENIEM ZJAWISK NASKÓRKOWOŚCI I ZBLIŻENIA

Niech zadane są całkowite wartości zespolone prądów sinusoidalnych w żyły I_1 oraz w osłonie I_2 . Dla częstotliwości pozwalającej na pominięcie prądów przesunięcia Maxwella

gęstości prądów w żyły oraz osłonie otrzymuje się z równania Helmholtza [3,10,12,17,18,22] w postaci klasycznych, następujących wzorów :

– całkowita gęstość prądu w żyły roboczej

$$J_1(r) = \frac{\sqrt{-j} m_1 I_1}{2\pi R} \cdot \frac{J_0(\sqrt{-j} m_1 r)}{J_1(\sqrt{-j} m_1 R)}, \quad (71)$$

gdzie : $m_1 = \sqrt{\omega \mu_0 \gamma_1}$,

– całkowita gęstość prądu w osłonie

$$J_2(r) = J_{22}(r) + J_{21}(r), \quad (72)$$

gdzie $J_{22}(r)$ jest gęstością prądu związaną z prądem I_2 , zaś $J_{21}(r)$ jest gęstością prądów wirowych indukowanych w osłonie przez przemienne pole magnetyczne prądu I_1 żyły roboczej - rys.2b. Te dwie ostatnie gęstości prądów dane są wzorami :

$$J_{22}(r) = \frac{\sqrt{-j} m_2 I_2}{2\pi R_2} \cdot \frac{K_1(\sqrt{j} m_2 R_1) J_0(\sqrt{-j} m_2 r) - j J_1(\sqrt{-j} m_2 R_1) K_0(\sqrt{j} m_2 r)}{J_1(\sqrt{-j} m_2 R_2) K_1(\sqrt{j} m_2 R_1) - J_1(\sqrt{-j} m_2 R_1) K_1(\sqrt{j} m_2 R_2)}, \quad (73)$$

$$J_{21}(r) = \frac{\sqrt{-j} m_2 I_1}{2\pi R_1 R_2} \cdot \frac{\alpha J_0(\sqrt{-j} m_2 r) - j\beta K_0(\sqrt{j} m_2 r)}{J_1(\sqrt{-j} m_2 R_2) K_1(\sqrt{j} m_2 R_1) - J_1(\sqrt{-j} m_2 R_1) K_1(\sqrt{j} m_2 R_2)}, \quad (74)$$

gdzie : $\alpha = [R_1 K_1(\sqrt{j} m_2 R_1) - R_2 K_1(\sqrt{j} m_2 R_2)]$,
 $\beta = [R_1 J_1(\sqrt{-j} m_2 R_1) - R_2 J_1(\sqrt{-j} m_2 R_2)]$,
 $m_2 = \sqrt{\omega \mu_0 \gamma_2} \text{ w m}^{-1}$,

J_0 i J_1 - funkcje Bessela pierwszego rodzaju odpowiednio rzędu zerowego i pierwszego,
 K_0 i K_1 - funkcje zmodyfikowane Bessela drugiego rodzaju (funkcjami Kelvina) odpowiednio rzędu zerowego i pierwszego.

Wzór (74) wyprowadza się tak jak wzór (73) z następującymi warunkami brzegowymi dla pola magnetycznego : dla $r = R_1$ pole $H(R_1) = I_1/2\pi R_1$, dla $r = R_2$ pole $H(R_2) = I_1/2\pi R_2$.

Podstawiając gęstości prądów (71), (72), (73) i (74) do wzorów (32), (37), (38), (39) i (40) oraz wykonując całkowanie funkcji Bessela zgodnie ze wzorami zawartymi w pracy [17] otrzymuje się zespolone, wektorowe potencjały magnetyczne wytworzone przez prądy I_1 i I_2 we wszystkich obszarach przewodu koncentrycznego.

Wektorowy potencjał magnetyczny wytworzony przez zespolony prąd I_1 żyły roboczej :

– dla $r \leq R$

$$A_1^I(r) = -\frac{\mu_0 I_1}{2\pi} \left[\ln R + \frac{j\sqrt{-j}}{m_1 R} \cdot \frac{J_0(\sqrt{-j} m_1 R) - J_0(\sqrt{-j} m_1 r)}{J_1(\sqrt{-j} m_1 R)} \right], \quad (75)$$

– dla $r \geq R$

$$A_1^{II}(r) = A_1^{III}(r) = A_1^{IV}(r) = -\frac{\mu_0 I_1}{2\pi} \ln r. \quad (76)$$

Wektorowy potencjał magnetyczny osłony :

– dla $r \geq R_2$

$$A_2^{IV}(r) = -\frac{\mu_0 I_2}{2\pi} \ln r, \quad (77)$$

- dla $R_1 \leq r \leq R_2$

$$A_2^{\text{III}}(r) = A_{22}^{\text{III}}(r) + A_{21}^{\text{III}}(r), \quad (78)$$

w którym potencjał wektorowy wytworzony przez prąd I_2 osłony :

$$A_{22}^{\text{III}}(r) = -\frac{\mu_0 I_2}{2\pi} \left\{ \ln R_2 + \frac{j\sqrt{-j}}{m_2 R_2} \cdot \frac{K_1(\sqrt{j} m_2 R_1) \left[J_0(\sqrt{-j} m_2 R_2) - J_0(\sqrt{-j} m_2 r) \right] - j J_1(\sqrt{-j} m_2 R_1) \left[K_0(\sqrt{j} m_2 R_2) - K_0(\sqrt{j} m_2 r) \right]}{J_1(\sqrt{-j} m_2 R_2) K_1(\sqrt{j} m_2 R_1) - J_1(\sqrt{-j} m_2 R_1) K_1(\sqrt{j} m_2 R_2)} \right\} \quad (79)$$

i potencjał wektorowy wytworzony przez prądy wirowe J_{21} w osłonie :

$$A_{21}^{\text{III}}(r) = -\frac{\mu_0 I_1}{2\pi} \left\{ \ln \frac{R_2}{r} + \frac{j\sqrt{-j}}{R_1 R_2 m_2} \cdot \frac{\alpha \left[J_0(\sqrt{-j} m_2 R_2) - J_0(\sqrt{-j} m_2 r) \right] - j \beta \left[K_0(\sqrt{j} m_2 R_2) - K_0(\sqrt{j} m_2 r) \right]}{J_1(\sqrt{-j} m_2 R_2) K_1(\sqrt{j} m_2 R_1) - J_1(\sqrt{-j} m_2 R_1) K_1(\sqrt{j} m_2 R_2)} \right\}, \quad (80)$$

- dla $r \leq R_1$

$$A_2^{\text{II}}(r) = A_2^{\text{I}}(r) = A_{22}^{\text{II}}(r) + A_{21}^{\text{II}}(r), \quad (81)$$

w którym potencjał wytworzony przez prąd I_2 osłony :

$$A_{22}^{\text{II}}(r) = A_{22}^{\text{I}}(r) = -\frac{\mu_0 I_2}{2\pi} \left\{ \ln R_2 + \frac{j\sqrt{-j}}{m_2 R_2} \cdot \frac{K_1(\sqrt{j} m_2 R_1) \left[J_0(\sqrt{-j} m_2 R_2) - J_0(\sqrt{-j} m_2 R_1) \right] - j J_1(\sqrt{-j} m_2 R_1) \left[K_0(\sqrt{j} m_2 R_2) - K_0(\sqrt{j} m_2 R_1) \right]}{J_1(\sqrt{-j} m_2 R_2) K_1(\sqrt{j} m_2 R_1) - J_1(\sqrt{-j} m_2 R_1) K_1(\sqrt{j} m_2 R_2)} \right\} \quad (82)$$

i potencjał wytworzony przez prądy wirowe J_{21} w osłonie :

$$A_{21}^{\text{II}}(r) = A_{21}^{\text{I}}(r) = -\frac{\mu_0 I_1}{2\pi} \left\{ \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{j\sqrt{-j}}{R_1 R_2 m_2} \cdot \frac{\alpha \left[J_0(\sqrt{-j} m_2 R_2) - J_0(\sqrt{-j} m_2 R_1) \right] - j \beta \left[K_0(\sqrt{j} m_2 R_2) - K_0(\sqrt{j} m_2 R_1) \right]}{J_1(\sqrt{-j} m_2 R_2) K_1(\sqrt{j} m_2 R_1) - J_1(\sqrt{-j} m_2 R_1) K_1(\sqrt{j} m_2 R_2)} \right\}. \quad (83)$$

Całkowity, zespolony wektorowy potencjał magnetyczny w każdym z obszarów przewodu koncentrycznego jest superpozycją odpowiednich zespolonych potencjałów wytworzonych przez gęstości prądów J_1 oraz J_2 . Spełnia on warunki ciągłości i po wykonaniu operacji różniczkowania funkcji Bessela wg wzoru (49) otrzymuje się klasyczne wzory na natężenie pola magnetycznego dla przewodu koncentrycznego z prądem przemiennym dane w pozycjach [3,10,12,17,22].

Spadek napięcia w zylie roboczej na jednostkę długości dany jest wzorem (16), który w przypadku uwzględnienia prądów wirowych indukowanych w osłonie przyjmuje postać :

$$U_1 = E_1^{\text{I}}(r) + j\omega A_1^{\text{I}}(r) + j\omega A_{21}^{\text{I}}(r) + j\omega A_{22}^{\text{I}}(r), \quad (84)$$

w którym $E_1^{\text{I}}(r)$ i $A_1^{\text{I}}(r)$ związane są z prądem I_1 , $A_{21}^{\text{I}}(r)$ z prądem wirowym o gęstości J_{21} , a więc także z prądem I_1 oraz $A_{22}^{\text{I}}(r)$ związany jest z prądem I_2 .

Analogiczne równanie otrzymuje się dla osłony wychodząc ze wzoru ogólnego (16)

$$U_2 = E_{22}^{\text{III}}(r) + E_{21}^{\text{III}}(r) + j\omega A_{22}^{\text{III}}(r) + j\omega A_{21}^{\text{III}}(r) + j\omega A_1^{\text{III}}(r). \quad (85)$$

W równaniu tym wielkości $E_{22}^{\text{III}}(r)$ i $A_{22}^{\text{III}}(r)$ związane są z prądem I_2 osłony; pozostałe z prądem I_1 żyły roboczej.

Następnie równanie (84) mnoży się stronami przez $J_1^*(r)$, zaś równanie (85) przez $J_{22}^*(r)$. Wykonując podobne operacje, jak zrobiono to dla równań (50) i (51), otrzymuje się :

$$U_1 = \left[\frac{1}{\gamma_1 |I_1|^2} \int_{S^I} J_1(r) J_1^*(r) dS^I \right] I_1 + j\omega \left[\frac{1}{|I_1|^2} \int_{S^I} A_1^I(r) J_1^*(r) dS^I \right] I_1 + \\ + \left[\frac{j\omega}{|I_1|^2} \int_{S^I} A_{21}^I(r) J_1^*(r) dS^I \right] I_1 + \left[\frac{j\omega}{I_2 I_1^*} \int_{S^I} A_{22}^I(r) J_1^*(r) dS^I \right] I_2, \quad (86)$$

$$U_2 = \left[\frac{1}{\gamma_2 |I_2|^2} \int_{S^{\text{III}}} J_{22}(r) J_{22}^*(r) dS^{\text{III}} \right] I_2 + j\omega \left[\frac{1}{|I_2|^2} \int_{S^{\text{III}}} A_{22}^{\text{III}}(r) J_{22}^*(r) dS^{\text{III}} \right] I_2 + \\ + \left[\frac{1}{\gamma_2 I_1 I_2^*} \int_{S^{\text{III}}} J_{21}(r) J_{22}^*(r) dS^{\text{III}} \right] I_1 + \left[\frac{j\omega}{I_1 I_2^*} \int_{S^{\text{III}}} A_{21}^{\text{III}}(r) J_{22}^*(r) dS^{\text{III}} \right] I_1 + \left[\frac{j\omega}{I_1 I_2^*} \int_{S^{\text{III}}} A_1^{\text{III}}(r) J_{22}^*(r) dS^{\text{III}} \right] I_1. \quad (87)$$

Powyższe równania można zapisać następująco :

$$U_1 = R_{11}^{(0)} I_1 + j\omega L_{11}^{(0)} I_1 + Z_{11}^{(2)} I_1 + Z_{12} I_2 \quad (88)$$

oraz

$$U_2 = R_{22} I_2 + j\omega L_{22} I_2 + Z_{21}^{(0)} I_1 + Z_{21}^{(2)} I_1 + Z_{21}^{(3)} I_1. \quad (89)$$

Wielkość

$$R_{11}^{(0)} = \frac{2\pi}{\gamma_1 |I_1|^2} \int_0^R J_1(r) J_1^*(r) r dr \quad (90)$$

jest rezystancją jednostkową (w $\Omega \cdot m^{-1}$) żyły roboczej z uwzględnieniem zjawiska naskórkowości.

Następnie

$$L_{11}^{(0)} = \frac{2\pi}{|I_1|^2} \int_0^R A_1^I(r) J_1^*(r) r dr \quad (91)$$

jest jednostkową indukcyjnością własną (w $H \cdot m^{-1}$) żyły roboczej z uwzględnieniem naskórkowości.

Wielkość

$$Z_{11}^{(2)} = \frac{2\pi j\omega}{|I_1|^2} \int_0^R A_{21}^I(r) J_1^*(r) r dr \quad (92)$$

jest jednostkową (w $\Omega \cdot m^{-1}$) impedancją dodatkową żyły roboczej, która ilustruje transmisję mocy czynnej i biernej z przewodu roboczego do osłony dając prąd wirowy J_{21} i związane z tym straty zespolonej mocy pozornej. Część rzeczywista tej impedancji jest proporcjonalna do ciepła wydzielonego w osłonie (przy $I_2 = 0$). Impedancja ta wynika ze zjawiska zbliżenia.

Impedancja

$$Z_{12} = \frac{2\pi j\omega}{I_2 I_1^*} \int_0^{R_2} A_{22}^I(r) J_1^*(r) r dr \quad (93)$$

jest jednostkową impedancją wzajemną między przewodem roboczym a osłoną. Jej część urojona, podzielona przez ω , jest równa jednostkowej indukcyjności wzajemnej

$$M_{12} = \frac{1}{\omega} \text{Im}\{Z_{12}\}. \quad (94)$$

Niezerowa część rzeczywista impedancji Z_{12} wynika z faktu, że w poszczególnych punktach wybranego przewodu (roboczy lub osłona) nie tylko moduły gęstości prądów są różne, ale również ich fazy różnią się między sobą.

Rezystancja

$$R_{22} = \frac{2\pi}{\gamma_2 |I_2|^2} \int_{R_1}^{R_2} J_{22}^*(r) J_{22}(r) r dr \quad (95)$$

jest rezystancją jednostkową osłony z uwzględnieniem naskórkowości.

Indukcyjność

$$L_{22} = \frac{2\pi}{|I_2|^2} \int_{R_1}^{R_2} A_{22}^{III}(r) J_{22}^*(r) r dr \quad (96)$$

jest jednostkową indukcyjnością własną osłony z uwzględnieniem naskórkowości.

Suma impedancji

$$Z_{21}^{(1)} = \frac{2\pi}{\gamma_2 I_1 I_2^*} \int_{R_1}^{R_2} J_{21}(r) J_{22}^*(r) r dr, \quad (97)$$

$$Z_{21}^{(2)} = \frac{2\pi j\omega}{I_1 I_2^*} \int_{R_1}^{R_2} A_{21}^{III}(r) J_{22}^*(r) r dr \quad (98)$$

oraz

$$Z_{21}^{(3)} = \frac{2\pi j\omega}{I_1 I_2^*} \int_{R_1}^{R_2} A_1^{III}(r) J_{22}^*(r) r dr \quad (99)$$

jest całkowitą jednostkową impedancją wzajemną

$$Z_{21} = Z_{21}^{(1)} + Z_{21}^{(2)} + Z_{21}^{(3)}. \quad (100)$$

Równania (88) i (89) można zapisać następująco:

$$U_1 = Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2, \quad (101)$$

$$U_2 = Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2, \quad (102)$$

gdzie:

$$Z_{11} = R_{11}^{(1)} + j\omega L_{11}^{(1)} + Z_{11}^{(2)}, \quad (103)$$

$$Z_{22} = R_{22} + j\omega L_{22}. \quad (104)$$

Impedancje jednostkowe Z_{11} , Z_{12} , Z_{21} i Z_{22} we wzorach (101) i (102) są elementami macierzy impedancji jednostkowych wiążących całkowite, jednostkowe spadki napięć z prądami w przewodzie koncentrycznym. Określone są one następującymi wzorami:

$$Z_{11} = j\omega \frac{\mu_0}{2\pi} \left\{ \ln \frac{R_1}{R R_2} - \frac{j\sqrt{-j}}{m_1 R} \cdot \frac{J_0(\sqrt{-j} m_1 R)}{J_1(\sqrt{-j} m_1 R)} - \frac{j\sqrt{-j}}{R_1 R_2 m_2} \cdot \frac{\alpha [J_0(\sqrt{-j} m_2 R_2) - J_0(\sqrt{-j} m_2 R_1)] - j\beta [K_0(\sqrt{j} m_2 R_2) - K_0(\sqrt{j} m_2 R_1)]}{J_1(\sqrt{-j} m_2 R_2) K_1(\sqrt{j} m_2 R_1) - J_1(\sqrt{-j} m_2 R_1) K_1(\sqrt{j} m_2 R_2)} \right\}, \quad (105)$$

(wielkości α i β podano w objaśnieniu wzoru (74))

$$Z_{22} = j\omega \frac{\mu_0}{2\pi} \left\{ \ln \frac{1}{R_2} - \frac{j\sqrt{-j}}{m_2 R_2} \cdot \frac{K_1(\sqrt{j} m_2 R_1) J_0(\sqrt{-j} m_2 R_2) - j J_1(\sqrt{-j} m_2 R_1) K_0(\sqrt{j} m_2 R_2)}{J_1(\sqrt{-j} m_2 R_2) K_1(\sqrt{j} m_2 R_1) - J_1(\sqrt{-j} m_2 R_1) K_1(\sqrt{j} m_2 R_2)} \right\}, \quad (106)$$

$$Z_{12} = j\omega \frac{\mu_0}{2\pi} \left\{ \ln \frac{1}{R_2} - \frac{j\sqrt{-j}}{m_2 R_2} \cdot \frac{K_1(\sqrt{j} m_2 R_1) [J_0(\sqrt{-j} m_2 R_2) - J_0(\sqrt{-j} m_2 R_1)] - j J_1(\sqrt{-j} m_2 R_1) [K_0(\sqrt{j} m_2 R_2) - K_0(\sqrt{j} m_2 R_1)]}{J_1(\sqrt{-j} m_2 R_2) K_1(\sqrt{j} m_2 R_1) - J_1(\sqrt{-j} m_2 R_1) K_1(\sqrt{j} m_2 R_2)} \right\}, \quad (107)$$

$$Z_{21} = j\omega \frac{\mu_0}{2\pi} \left\{ \ln \frac{1}{R_2} - \frac{j\sqrt{-j}}{R_1 R_2 m_2} \cdot \frac{\alpha J_0(\sqrt{-j} m_2 R_2) - j\beta K_0(\sqrt{j} m_2 R_2)}{J_1(\sqrt{-j} m_2 R_2) K_1(\sqrt{j} m_2 R_1) - J_1(\sqrt{-j} m_2 R_1) K_1(\sqrt{j} m_2 R_2)} \right\}. \quad (108)$$

Struktura Z_{21} jest inna niż Z_{12} . Ze względu jednak na własności funkcji Bessela niezależnie od parametrów $m_2 R_2$ oraz $m_2 R_1$, otrzymuje się, że

$$Z_{12} = Z_{21}, \quad (109)$$

co potwierdzają obliczenia numeryczne. Stąd też

$$M_{21} = \frac{1}{\omega} \text{Im}\{Z_{21}\} = M_{12} = \frac{1}{\omega} \text{Im}\{Z_{12}\} = M. \quad (110)$$

Jednostkowa indukcyjność własna przewodu roboczego wyraża się wzorem:

$$L_{11} = \frac{1}{\omega} \text{Im}\{Z_{11}\} = L_{11}^{(1)} + \frac{1}{\omega} \text{Im}\{Z_{11}^{(2)}\}, \quad (111)$$

gdzie indukcyjność jednostkowa

$$L_{11}^{(1)} = \frac{\mu_0}{2\pi} \left[\ln \frac{1}{R} - \frac{j\sqrt{-j}}{2m_1 R} \cdot \frac{J_0(\sqrt{-j} m_1 R) J_1(\sqrt{-j} m_1 R) - j J_0^2(\sqrt{-j} m_1 R) J_1(\sqrt{-j} m_1 R)}{J_1(\sqrt{-j} m_1 R) J_1(\sqrt{-j} m_1 R)} \right]. \quad (112)$$

Jeżeli obliczy się wartość $L_{11}^{(1)}$ w granicy $m_1 \rightarrow s$ przy $s \cong 0$, to otrzymuje się wzór przybliżony (68).

Jednostkowa indukcyjność własna osłony wyraża się wzorem:

$$L_{22} = \frac{1}{\omega} \operatorname{Im}\{Z_{22}\} = \frac{\mu_0}{2\pi} \left\{ \ln \frac{1}{R_2} - \frac{j\sqrt{-j}}{m_2 R_2 b} \left[\mathcal{K}_1(\sqrt{j} m_2 R_1) \mathcal{J}_0(\sqrt{-j} m_2 R_2) - \right. \right. \\ \left. \left. - j \mathcal{J}_1(\sqrt{-j} m_2 R_1) \mathcal{K}_0(\sqrt{j} m_2 R_2) \right] - \frac{a}{2b^*} \right\}, \quad (113)$$

gdzie:

$$a = \mathcal{K}_1(\sqrt{j} m_2 R_1) \mathcal{K}_1^*(\sqrt{j} m_2 R_1) \left[\mathcal{J}_0(\sqrt{-j} m_2 R_2) \mathcal{J}_1^*(\sqrt{-j} m_2 R_2) + j \mathcal{J}_0^*(\sqrt{-j} m_2 R_2) \mathcal{J}_1(\sqrt{-j} m_2 R_2) \right] + \\ + \mathcal{J}_1(\sqrt{-j} m_2 R_1) \mathcal{J}_1^*(\sqrt{-j} m_2 R_1) \left[\mathcal{K}_0^*(\sqrt{j} m_2 R_2) \mathcal{K}_1(\sqrt{j} m_2 R_2) + j \mathcal{K}_0(\sqrt{j} m_2 R_2) \mathcal{K}_1^*(\sqrt{j} m_2 R_2) \right] - \\ - \mathcal{K}_1(\sqrt{j} m_2 R_1) \mathcal{J}_1^*(\sqrt{-j} m_2 R_1) \left[\mathcal{K}_0^*(\sqrt{j} m_2 R_2) \mathcal{J}_1(\sqrt{-j} m_2 R_2) + \mathcal{J}_0(\sqrt{-j} m_2 R_2) \mathcal{K}_1^*(\sqrt{j} m_2 R_2) \right] - \\ - j \mathcal{J}_1(\sqrt{-j} m_2 R_1) \mathcal{K}_1^*(\sqrt{j} m_2 R_1) \left[\mathcal{K}_0(\sqrt{j} m_2 R_2) \mathcal{J}_1^*(\sqrt{-j} m_2 R_2) + \mathcal{J}_0^*(\sqrt{-j} m_2 R_2) \mathcal{K}_1(\sqrt{-j} m_2 R_2) \right], \\ b = \mathcal{J}_1(\sqrt{-j} m_2 R_2) \mathcal{K}_1(\sqrt{j} m_2 R_1) - \mathcal{J}_1(\sqrt{-j} m_2 R_1) \mathcal{K}_1(\sqrt{j} m_2 R_2), \\ b^* = \mathcal{J}_1^*(\sqrt{-j} m_2 R_2) \mathcal{K}_1^*(\sqrt{j} m_2 R_1) - \mathcal{J}_1^*(\sqrt{-j} m_2 R_1) \mathcal{K}_1^*(\sqrt{j} m_2 R_2).$$

We wzorach (112), (113) funkcje Bessela oznaczone gwiazdką są funkcjami sprzężonymi, np. $\mathcal{J}_0^*(\sqrt{-j} m_2 R_2)$ jest funkcją Bessela sprzężoną względem funkcji $\mathcal{J}_0(\sqrt{-j} m_2 R_2)$.

Jeżeli obliczy się wartość indukcyjności L_{22} w granicy $m_2 \rightarrow s$ przy $s \equiv 0$, to otrzymuje się wzór przybliżony (69).

Dla przykładu obliczeniowego przyjęto następujące dane: $R = 1,95 \cdot 10^{-2}$ m, $R_1 = 3,55 \cdot 10^{-2}$ m, $R_2 = 4 \cdot 10^{-2}$ m, $\gamma_1 = 5,5248 \cdot 10^7$ S·m⁻¹ i $\gamma_2 = 3,7037 \cdot 10^7$ S·m⁻¹.

Dla każdej częstotliwości prądu przemiennego indukcyjności kabla koncentrycznego obliczono ze wzorów (110), (111) i (113) i odniesiono je do odpowiednich wartości obliczonych ze wzorów (68), (66) i (67) traktując te ostatnie jako wartości indukcyjności dla prądu stałego. Wyniki obliczeń zestawiono w tabeli 1.

Rezystancje R_{10} i R_{20} są rezystancjami odpowiednio żyły i osłony dla prądu stałego. Rezystancja $R_{11} = \operatorname{Re}\{Z_{11}\}$, $R_{11}^{(2)} = \operatorname{Re}\{Z_{11}^{(2)}\}$, $R_{12} = \operatorname{Re}\{Z_{12}\}$. Indukcyjność $L_{11}^{(2)} = \frac{1}{\omega} \operatorname{Im}\{Z_{11}^{(2)}\}$.

Tabela 1

Indukcyjności kabla koncentrycznego

f	R_{11}/R_{10}	$R_{11}^{(2)}/R_{10}$	L_{11}/L_{10}	$L_{11}^{(2)}/L_{10}$	R_{22}/R_{20}	L_{22}/L_{20}	M/M ₀	R_{12}/R_{10}
Hz	—	—	—	—	—	—	—	—
0	1	0	1	0	1	1	1	0
50	1,2924	0,0121	0,9918	-0,00002	1,0018	0,9999	0,9999	0,0059
500	4,6041	1,1201	0,9587	-0,00190	1,1692	0,9994	0,9988	0,5421
10 ³	8,4198	3,6062	0,9472	-0,00611	1,5532	0,9981	0,9962	1,7446
10 ⁴	32,876	18,223	0,9211	-0,02331	5,1886	0,9916	0,9856	8,6687

Z tabeli 1 wynika, że dla częstotliwości przemysłowej indukcyjności kabla koncentrycznego mogą być obliczane przy założeniu stałej gęstości prądu zarówno w żyły roboczej, jak również w osłonie kabla.

7. ZAKOŃCZENIE

Obliczając wektorowy potencjał magnetyczny w kablu koncentrycznym dla prądu stałego z równania Poissona oraz równania Laplace'a [12,15], dla prądu przemiennego z równania Helmholtza [10,14,18], przyjmuje się arbitralnie powierzchnię, na której potencjał ten jest równy zero. Wtedy na jego podstawie można obliczyć tylko indukcyjność wewnętrzną żyły, bez jej indukcyjności zewnętrznej, następnie indukcyjność „wewnętrzną”, tzn. związaną z polem magnetycznym zlokalizowanym między żyłą a osłoną oraz indukcyjność osłony [12,15]. Z tak wyznaczonego potencjału magnetycznego nie można wyznaczyć indukcyjności wzajemnej między żyłą a osłoną.

Zaproponowany w tej pracy sposób obliczania wektorowego potencjału magnetycznego polega na rozwinięciu funkcji $\ln r_{XY}$ występującej we wzorze (26) w szereg Fouriera w zależności od wzajemnego położenia obszaru źródłowego Y i obszaru obserwacji X. W ten sposób wyznacza się wektorowy potencjał magnetyczny we wszystkich obszarach kabla koncentrycznego poprzez wzory ogólne (32), (37), (38), (39), (40), które obowiązują zarówno dla prądu stałego jak i również dla prądu przemiennego. Taki sposób postępowania umożliwia oddzielenie z indukcyjności całkowitej kabla dla prądu przemiennego o stałej gęstości, jak również z uwzględnieniem zjawisk naskórkowości i zbliżenia, indukcyjności własnych żyły oraz osłony i przede wszystkim indukcyjności wzajemnej między żyłą a osłoną – wzór (70) dla stałej i wzór (110) dla nierównomiernej gęstości prądu.

Jest to szczególnie istotne w układach trójfazowych kabli elektroenergetycznych, których osłony są zwarte na końcach między sobą lub do ziemi. Wtedy prąd I_2 w osłonie wybranej fazy nie jest równy prądowi I_1 w żyłce roboczej tej samej fazy i nie można wykorzystać wzoru na indukcyjność całkowitą pojedynczego kabla koncentrycznego.

Jeżeli prąd $I_2 = -I_1$, to indukcyjność całkowita kabla koncentrycznego

$$L_0 = L_{10} + L_{20} - 2M_0. \quad (114)$$

Po podstawieniu wzorów (68), (69) i (70) do (114) otrzymuje się wzór na indukcyjność całkowitą kabla koncentrycznego zgodny z odpowiednimi wzorami podanymi przez Kupalana w pracy [12], s.80 lub Matusiaka w pracy [15], s.134, a wyprowadzonymi dla prądu stałego:

$$L_0 \cong \frac{\mu_0}{2\pi} \left[\ln \frac{R_1}{R} + \frac{R_2^4}{(R_2^2 - R_1^2)^2} \ln \frac{R_2}{R_1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \right]. \quad (115)$$

Wzór (115) został wyprowadzony również przez Strunskie₆₃₂ w pracy [24], s.92 na podstawie tzw. średnich geometrycznych odległości. W pracy [24] podano także uproszczony wzór na indukcyjność całkowitą kabla (s.92) dla prądu przemiennego z uwzględnieniem zjawiska naskórkowości. Uwzględnia on grubość ścianki osłony.

Dla osłon cienkościennych, tzn. dla $R_1 \cong R_2$, zarówno w przybliżeniu dla stałej jak również nierównomiernej gęstości prądu, indukcyjność wzajemna $M_0 \cong L_{20}$ oraz $M \cong L_{22}$.

LITERATURA

1. Ametani A.: A General Formulation of Impedance and Admittance of Cables. IEEE Trans. on Power Appar. and Sys., Vol. PAS-99, No. 3, May/June 1980, pp. 902-910.
2. Apanasewicz S.: O własnościach struktury pola elektromagnetycznego w kablu koncentrycznym. Zesz. Nauk. Pol. Rzeszowskiej, s. Elektrotechnika 1996, z. 17, nr 145, ss. 5-20.

3. Baron B.: Komputerowa analiza harmonicznego pola elektromagnetycznego we współrzędnych walcowych. Skrypt Pol. Śląskie nr 1673, Gliwice 1993.
4. Baron B.: Analiza numeryczna równań całkowo-brzegowych pól elektrycznych pewnej klasy modeli obliczeniowych. Zesz. Nauk. Pol. Śl. s. Elektryka, z.97, Gliwice 1985.
5. Ehrich M.: Vereinfachte Verlust – und Induktivitätsberechnung bei ebenem Stromverdrängungsproblem. Archiv für Elektrotechnik, No 60, 1978, pp. 129-135.
6. Ferkal K., Poloujadoff M., Dorison E.: Proximity Effect and Eddy Current Losses in Insulated Cables. IEEE Trans. on Power Deliv., Vol. 11, No. 3, July 1996, pp. 1171-1178.
7. Gustavsen B., Sletbak J., Henriksen T.: Simulation of Transient Sheath Overvoltages in the Presence of Proximity Effects. IEEE Trans. on Power Deliv., Vol. 10, No 2, April 1995, pp. 1066-1075.
8. Kane M., Rathoin S., Auriol Ph.: Développement de nouveaux modèles analytiques pour la détermination des impédances de câbles bifilaires blindé avec effets de proximités. 7-ème Colloque Inter. CEM'94, Toulouse 1994, pp. 349-354.
9. Kane M., Ahmad A., Auriol Ph.: Multiwire Shielded Cable Parameter Computation. IEEE Trans. on Magn., vol. 31, No. 3, May 1995, pp. 1646-1649.
10. Krakowski M.: Elektrotechnika teoretyczna. Pole elektromagnetyczne. PWN, Warszawa 1995.
11. Krakowski M., Szymański G.: Numerical analysis of eddy-currents induced a metal cylinder by a.c. in parallel conductor. Archiwum Elektrotechniki, z.1, Tom XXVII, 1978, pp. 133-142.
12. Kupalan S. D.: Teoria pola elektromagnetycznego. WNT, Warszawa 1967.
13. Lipiński W., Gramz M.: Analiza wypierania prądu i wyznaczania impedancji w układzie dwóch płaskich przewodów. Rozprawy elektrotechniczne, z. 4, 1981, ss.949-958.
14. Lumbroso H.: Électromagnétisme. McGraw-Hill, Paris, 1981.
15. Matusiak R.: Elektrotechnika teoretyczna. Teoria pola elektromagnetycznego. WNT, Warszawa 1982.
16. Меерович Э.А., Чальян К.М.: Расчет методом последовательных приближений распределения тока в токопроводах с учетом эффекта близости. Изв. АН СССР. Энергетика и Транспорт, No. 3, 1963.
17. McLachlan N. W.: Funkcje Bessela dla Inżynierów. PWN, Warszawa 1964.
18. Moon P., Spencer D. E.: Foundation of Electrodynamics. D. Van Nostrand Company, INC., New Jersey, 1960.
19. Piątek Z.: Champs magnétiques au voisinage des jeux de barres blindés. Rapport du stage a DTH et HT de GEC ALSTHOM T&D - Villeurbanne, Septembre-novembre 1997.
20. Piątek Z., Girodet A., Guillen M.: Magnetic Field in Proximity to Gis Busbars – a Single-Phase Study. XXI SPETO'98 ss. 179-185
21. Piątek Z., Girodet A., Guillen M.: Magnetic Field in Proximity to a Three-Phase Gas Insulated Transmission Line with Separate Phases. French-Polish Seminar 98, Lyon, pp. 145-155.
22. Rawa H.: Elektryczność i magnetyzm w technice. WN PWN, Warszawa 1994.
23. Sikora R.: Teoria pola elektromagnetycznego. WNT, Warszawa 1997.
24. Струнский Б. М.: Короткие сети электрических печей. ГНТИЛЧЦМ Москва 1962
25. Strzelecki M.: Straty mocy i impedancje jednofazowych torów wieloprądowych. XI SPETO'88, Gliwice, ss.245-253.
26. Szulkin P., Pogorzelski S.: Podstawy teorii pola elektromagnetycznego. WNT, Warszawa 1964.

28. Тозони О.В., Маергойз И.Д.: Расчет трехмерных электромагнитных полей. Изд. Техника, Киев 1974.
29. Turowski J.: Elektrodynamika Techniczna. WNT, Warszawa 1993.

Wpłynęło do Redakcji dnia 15 września 1998 r.

Recenzent: Dr hab. inż. Ryszard Nawrowski,
Profesor Politechniki Poznańskiej

Abstract

In case of short-circuits of the cable sheaths at its ends between each other or to the earth, as a result of voltages induced inside them by the working core, the longitudinal currents will flow in the sheaths. In order to calculate them it is necessary to know the mutual inductance (impedance) between the working core and the sheath of the cable.

The proposed way of calculating these inductances consists in determining the logarithmic vectorial magnetic potential (26) in all the areas of the cable followed by the calculation of the inductance. To this end function $\ln r$ is expanded into the Fourier series according to the mutual position of the source area Y (in which the current density J differs from zero) and the observations area X . Therefore the vectorial magnetic potential is calculated analytically, in all the areas of the cable - formulas (32), (37), (38), (39) and (40), which are valid for the direct and alternating current as well as for the alternating current with regard to the skin and proximity effects. This way of acting allows to isolate the self-inductances of the core and the sheath from the total inductance of the cable-formulas (68) and (69) and for a current of a constant density (formulas (111) and (113)) with regard to the proximity and skin effects and to the mutual inductance (formulas (70) and (110) respectively).