

Dariusz SPAŁEK

RÓŻNICOWY PSEUDOTENSOR ENERGII POLA ELEKTROMAGNETYCZNEGO A METODA PRĄDÓW MAGNETYZACJI

Streszczenie. W artykule przedstawiono modyfikację metody prądów magnetyzacji wykorzystywanej do obliczania sił bądź momentów sił w polu magnetycznym. Wykorzystanie różnicowego pseudotensora pola elektromagnetycznego pozwala na uściślenie obliczeń prowadzonych tą metodą w przypadku, gdy środowisko otaczające obszar działania sił nie jest próżnią. Rozważania poparto przykładami obliczeń momentów sił dla maszyny indukcyjnej o litym i anizotropowym wirniku.

DIFFERENTIAL QUASITENSOR OF ELECTROMAGNETIC FIELD ENERGY AND THE METHOD OF MAGNETIZATION CURRENTS

Summary. The paper deals with the problem of electromagnetic torque calculation by means of the equivalent magnetisation currents. The residual energy quasitensor of electromagnetic field enables to generalise the method of equivalent magnetisation currents if the outer region differs from the vacuum. The electromagnetic torques of induction motors with solid rotor have been calculated and given in the paper as examples of the above considerations.

1. WPROWADZENIE

Obliczenia sił bądź momentów powstających w przetworniku elektromechanicznym są potrzebne już w trakcie projektowania układu elektromechanicznego. W szczególności chodzi o dokładne określenie wpływu, jaki wywarły cechy geometryczno-środowiskowe (konstrukcyjne) przetwornika oraz prądy w nim występujące na wartość wytworzonej siły bądź momentu podromotorycznego przetwornika elektromechanicznego.

Teoretyczne aspekty tych zagadnień są szczegółowo rozważane w pracach [1,5,10 17,20]. Podstawowe relacje określające gęstość działających sił powstających przy udziale pola elektromagnetycznego przedstawia się w notacji wektorowej i tensorowej [9,11,12,13,15, 16,17,19]. Wykorzystywane zależności opisujące gęstość działających sił w polu magnetycznym – w tradycyjnej notacji wektorowej - zestawiono w tabeli 1. Zależności te stanowią zapis wektorowy równań tensorowych [17,19]. Równania te stosuje się w krzywoliniowym, ortogonalnym układzie współrzędnych. Pojawiające się w zależnościach wielkości indeksowane dwoma indeksami można określać mianem pseudotensorów, gdyż są one definiowane w jednym układzie krzywoliniowym i nie określa się ich właściwości transformacyjnych [3,5,6].

Tabela 1

Zestawienie zależności opisujących gęstość sił w polu magnetycznym

SIŁA	RÓWNANIA PODSTAWOWE	PSEUDOTENSOR
całkowita	$\vec{f} = \vec{f}_L + \vec{N} = -\vec{i}_u \operatorname{div}_{ u }(\vec{\sigma}_u) + \vec{k}$ $\vec{k} = \frac{1}{2} \frac{B_u B_w v_{uw}}{L_u L_w} \operatorname{grad}(L_u L_w)$	$\sigma_{uw} = -H_u B_w + \delta_{uw} \frac{1}{2} (\vec{H} \vec{B})$ - tensor Maxwella
Lorentza	$\vec{f}_L = \vec{j} \times \vec{B}$	
środowiskowa	$\vec{N} = \frac{1}{2} B_u B_w \operatorname{grad}(v_{uw})$ $\vec{N} = \Delta \vec{f} + \vec{i}_u \operatorname{div}_{ u }(\Delta \vec{\sigma}_u) - \Delta \vec{k}$ $\Delta \vec{f} = \vec{j} \times \vec{B}$ $\Delta \vec{k} = \frac{1}{2} \frac{B_u B_w (v_{uw} - v_o)}{L_{ u } L_{ w }} \operatorname{grad}(L_{ u } L_{ w })$	$\Delta \sigma_{uw} = -I_u B_w + \delta_{uw} \frac{1}{2} (\vec{B} \vec{I})$ - różnicowy pseudotensor pola elektromagnetycznego

W tabeli 1 zastosowano następujące oznaczenia:

u, v, w - wskaźniki oznaczające współrzędne przestrzenne (w układzie współrzędnych walcowych r, α, z); do wskaźników tych stosuje się konwencję sumacyjną [3],

v_{uw} - reluktywności środowiska anizotropowego,

L_u, L_v, L_w - współczynniki Lamego [3,6,9]; wynoszą one w układzie współrzędnych

kartezjańskich (x, y, z) : $L_u = L_v = L_w = 1$; cylindrycznych (r, α, z) : $L_u = L_r = 1, L_v = L_\alpha = r, L_w = L_z = 1$.

$\vec{H}, \vec{B}, \vec{I}$ - natężenie, indukcja oraz wektor magnetyzacji pola magnetycznego,

$\vec{j}, \Delta \vec{j}$ - gęstości prądów wymuszonego oraz magnetyzacji [5],

$\sigma_{uw}, \Delta \sigma_{uw}$ - składowe tensora Maxwella i różnicowego (podane w tabeli 1.),

δ_{uw} - delta Kroneckera,

$\vec{k}, \Delta \vec{k}$ - wektory uzupełniające operator dywergencji $\operatorname{div}_u(*) = L_u^{-1} \operatorname{div}_{|u|}\{L_{|u|} \cdot (*)\}$ w krzywoliniowych układach współrzędnych (oba wektory zanikają w prostokątnym układzie współrzędnych; zanikają również ich składowe α i z w walcowym układzie współrzędnych).

Gęstość sił oznaczoną poprzez \vec{N} stanowi składnik sił środowiskowych ujawniających się na skutek strukturalnej niejednorodności środowiska. Jeżeli gradient reluktywności magnetycznej jest niezerowy w pewnym kierunku, to w kierunku tym działają siły środowiskowe [15,21]. Gęstość sił środowiskowych można równoważnie opisać poprzez wyrażenie zawierające dywergencję różnicowego pseudotensora energii pola elektromagnetycznego $\vec{i}_u \operatorname{div}_{|u|}(\Delta \vec{\sigma}_u) - \Delta \vec{k}$ oraz składnik pochodzący od prądów magnetyzacji $\Delta \vec{f} = \Delta \vec{j} \times \vec{B}$. W szerokiej klasie przetworników elektromechanicznych, których część ruchu znajduje się w próżni (powietrzu), wpływ składnika opisanego różnicowym tensorem jest zerowy. Różnicowy pseudotensor energii pola elektromagnetycznego zanika bowiem w próżni ($v_r \equiv 1.0$), a z bardzo dobrym przybliżeniem w powietrzu ($v_r = 0.99999964$).

Rozważając konkretny przykład przetwornika elektromechanicznego można wskazać siłę bądź moment elektromagnetyczny, który wyraża się przez różnicowy pseudotensor energii. Przykładowo, dla maszyny asynchronicznej o cylindrycznym, przewodzącym wirniku można

analitycznie określić wartość momentu wyrażonego przez różnicowy pseudotensor energii pola elektromagnetycznego. Ponadto różnicowy pseudotensor energii pozwala na otrzymanie metodą prądów magnetyzacji poprawnych rezultatów przy stosowaniu warunku brzegowego dla wektora magnetyzacji wynikającego z właściwości środowisk po obu stronach rozważanej granicy obszarów. Zaś określenie momentu sił metodą prądów magnetyzacji wymaga zadawania zerowego warunku brzegowego na składową styczną do granicy środowisk wektora magnetyzacji, mimo iż ośrodek nie jest próżnią (powietrzem). Zerowy warunek brzegowy w odniesieniu do wektora magnetyzacji jest stosowany - mimo iż odnosi się on do środowiska, które nie jest koniecznie próżnią. Oba sposoby określania momentu sił prowadzą do jednakowych rezultatów. Proponowana metodyka pozwala usunąć niespójność w formułowaniu warunków brzegowych poprzez stosowanie fizycznie słusznych warunków brzegowych przy jednoczesnym wykorzystaniu przedstawionych zależności, w których pojawia się zdefiniowany różnicowy pseudotensor energii pola elektromagnetycznego (tabela 1).

Rozważony zostanie przetwornik elektromechaniczny, zawierający części konstrukcyjne ferromagnetyczne, w ogólności anizotropowe. Współczynniki środowiskowe podobszarów analizowanego przetwornika elektromagnetycznego nie są równoważne pod względem właściwości magnetycznych próżni. Moment elektromagnetyczny dla przykładowej maszyny obliczony zostanie analitycznie. Jest to w rozważanym przypadku możliwe i pozwala tym samym uniknąć błędów, jakie mogą pojawić się przy analizie numerycznej oraz podczas przeprowadzania eksperymentów. Wartość momentu środowiskowego zostanie określona proponowaną zmodyfikowaną metodą prądów magnetyzacji poprzez składnik niejednorodnościowy i na podstawie bilansu momentów elektromagnetycznych.

2. MOMENT ŚRODOWISKOWY

Rozważmy maszynę asynchroniczną o przekroju poprzecznym pokazanym na rys.1.

Stojan maszyny jest uzwojony, jego uzwojenie wytwarza wirujące, kołowe pole magnetyczne (oś obrotu pola magnetycznego i wirnika jest prostopadła do płaszczyzny przekroju maszyny pokazanej na rys.1). Wirnik maszyny nie jest uzwojony. Obszar zawarty pomiędzy idealnym ferromagnetycznym stojanem oraz rdzeniem wirnika (bez histerez, o zerowej reluktywności magnetycznej) stanowią dwie cylindryczne, współosiowe warstwy:

- anizotropowa $v_{\alpha\delta} = v_{\alpha\delta}, v_{r\delta} = v_{r\delta}, v_{r\delta} = v_{\alpha\delta} = 0$:

$$[v_{uv}] = \begin{bmatrix} v_{r\delta} & 0 \\ 0 & v_{\alpha\delta} \end{bmatrix}$$

i nieprzewodząca $\gamma=0$ szczelina (indeks δ), o stałej grubości g , oraz

- anizotropowa $v_{\alpha\alpha} = v_{\alpha\alpha}, v_{r\alpha} = v_{r\alpha}, v_{r\alpha} = v_{\alpha\alpha} = 0$:

$$[v_{uv}] = \begin{bmatrix} v_{r\alpha} & 0 \\ 0 & v_{\alpha\alpha} \end{bmatrix},$$

przewodząca $\gamma \neq 0$ warstwa o stałej grubości a , która jest umieszczona bezpośrednio na rdzeniu wirnika maszyny (indeks α).

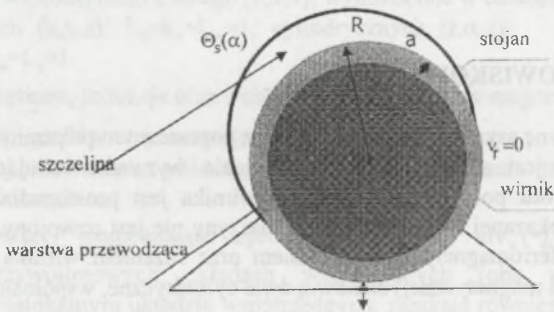
Stałe materiałowe nie są funkcjami czasu i współrzędnych. Anizotropowa, przewodząca część wirnika może być wykonana na przykład ze stali krzemowej walcowanej na zimno. Zróżnicowanie reluktywności magnetycznych w kierunku równoległym i prostopadłym do kierunku walcowania na zimno dla stali krzemowej wynosi około: - 30% do -20% [2].

Promienie wodzące punktów warstwy przewodzącej zawierają się w przedziale $(R-a, R)$, gdzie R jest promieniem zewnętrznym wirnika. W przypadku gdy $a=R$, wirnik przewodzący stanowi pełny, anizotropowy blok lity. Jeżeli grubość warstwy przewodzącej jest niewielka ($a \ll R$), to może ona być traktowana jako model uzwojenia wirnika maszyny asynchronicznej. Anizotropową szczelinę może stanowić gaz, ciecz, wewnątrz której znajdują się np. podłużne ferromagnetyczne opiłki układające się stycznie do powierzchni wirnika. Parametry środowiskowe jak i geometryczne rozważanej maszyny asynchronicznej nie zależą od współrzędnej kątowej (pozostają w kierunku stycznym do obwodu wirnika niezmiennie). Uzwojenie stojana zasilane prądem wolnozmiennym o pulsacji ω_1 (takiej iż można zaniedbać prądy przesunięcia oraz pochodną czasową pędu pola) wytwarza pole magnetyczne, zamykające się przez ferromagnetyczny stojan, wirnik, szczelinę i warstwę przewodzącą na wirniku, tworzącą obszar, w którym indukują się prądy wirnika.

Analiza momentów elektromagnetycznych powstających w rozważanej modelowej maszynie indukcyjnej zostanie przeprowadzona trzykrotnie w wyróżnionych podpunktach i), ii), iii).

Maszyna asynchroniczna analizowana jest dwuwymiarowo w cylindrycznym układzie współrzędnych (r, α, z) . Pomija się zjawiska czołowe; rozważa się część o długości l teoretycznie nieskończenie długiej maszyny. W układzie współrzędnych cylindrycznych składowa styczna gęstości sił warunkuje gęstość objętościową momentu sił zgodnie z zależnością:

$$rN_\alpha = r\Delta f_\alpha + \text{div}(r\Delta \vec{\sigma}_\alpha). \quad (1a)$$



Rys. 1. Maszyna asynchroniczna o anizotropowej strukturze wewnętrznej
Fig. 1. Asynchronous machine with anisotropic inner structure

i) Moment środowiskowy maszyny elektrycznej, spowodowany siłami działającymi na ośrodek materialny, jakim jest ferromagnetyczny wirnik maszyny, ma wartość równą całce objętościowej iloczynu promienia wodzącego od osi obrotu r i gęstości objętościowej składowej stycznej siły. Moment środowiskowy (permeancyjny) działający na rozpatrywany obszar wynosi zatem:

$$T_{e,Fe} = \int_V r^2 N_\alpha dr d\alpha dz. \quad (1b)$$

Po wykorzystaniu twierdzenia Gaussa i zależności (1a) otrzymuje się:

$$T_{e,Fe} = \int_{\partial V} r \Delta \sigma_{\alpha r} dS + \int_V r \Delta j_z B_r dV.$$

Druga z wypisanych całek odpowiada momentowi sił obliczanemu metodą prądów magnetyzacji. Rozważany obszar całkowania stanowi nieskończony walec o poboczniczy położonej w szczelinie maszyny. W przypadku dwuwymiarowej analizy maszyny całkowanie względem zmiennej z sprowadza się do mnożenia przez długość maszyny l . Moment permeancyjny $T_{e,Fe}$ wynosi:

$$T_{e,Fe} = \int_{\partial V} r^2 \Delta \sigma_{\alpha r} d\alpha dz + \int_V \Delta j_z B_r r^2 dr dz d\alpha. \quad (1c)$$

W układzie współrzędnych cylindrycznych składowa $\Delta \sigma_{\alpha r}$ różnicowego pseudotensora naprężeń wyraża się następująco przez składowe wektorów pola magnetycznego:

$$\Delta \sigma_{\alpha r} = -B_r I_{\alpha} = -\Delta v_{\alpha} B_{\alpha} B_r,$$

gdzie:

$$I_{\alpha} = \Delta v_{\alpha} B_{\alpha} - \text{składowa wektora magnetyzacji na brzegu } \partial V,$$

$$\Delta \sigma_{\alpha r} = -B_r I_{\alpha} = -\Delta v_{\alpha} B_r B_{\alpha},$$

stąd:

$$T_{e,Fe} = - \int_{\partial V} r^2 B_r I_{\alpha} d\alpha dz + \int_V r \Delta j_z B_r dV. \quad (1d)$$

Obszar V , po którym realizuje się całkowanie, stanowi walec, którego oś pokrywa się z osią obrotu maszyny. Zawiera on w całości ferromagnetyczny rdzeń wirnika oraz warstwę przewodzącą. Pobocznicza ∂V walca V o promieniu $r \in (R, R+g)$ usytuowana jest w szczelinie maszyny obejmując w całości wirnik maszyny.

Gęstość sił działających na prądy magnetyzacji ($\Delta v_{\alpha} = v_{\alpha} - v_{\alpha}$, $\Delta v_r = v_r - v_r$) wynosi:

$$\vec{\Delta j} \times \vec{B} = \text{rot}\{\Delta v_r \vec{B}_r + \Delta v_{\alpha} \vec{B}_{\alpha}\} \times \vec{B},$$

zatem gęstość momentu od prądów magnetyzacji jest równa:

$$\vec{r} \times [\vec{\Delta j} \times \vec{B}] = \vec{\Delta j}(\vec{r} \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\vec{\Delta j} \cdot \vec{r}) = \text{rot}\{\Delta v_{\alpha} \vec{B}_{\alpha} + \Delta v_r \vec{B}_r\} r B_r. \quad (1e)$$

Pierwszy składnik po prawej stronie (1f) - po pomnożeniu przez r - można przekształcić do następującej postaci:

$$r \text{rot}(\vec{i}_{\alpha} \Delta v_{\alpha} B_{\alpha}) r B_r = r^2 \frac{\vec{i}_z}{r} \frac{\partial(r \Delta v_{\alpha} B_{\alpha})}{\partial r} B_r = \vec{i}_z \frac{\partial(r^2 \Delta v_{\alpha} B_{\alpha} B_r)}{\partial r} + \vec{i}_z \frac{\partial(\frac{1}{2} \Delta v_{\alpha} B_{\alpha}^2)}{\partial \alpha}. \quad (1f)$$

Przekształcając wyrażenie (1f) wykorzystano fakt bezźródłowości pola magnetycznego. Składnik opisany zależnością (1f), jeden z dwóch składników w zależności (1e), da wkład do obliczanego momentu sił. Drugi składnik po prawej stronie (1e) po scałkowaniu po objętości obszaru zanika zgodnie z (1d), gdyż:

$$r \cdot \text{rot}(\vec{i}_r \Delta v_r B_r) r B_r = -r^2 \frac{\vec{i}_z}{r} \frac{\partial(\Delta v_r B_r)}{\partial \alpha} B_r = -\frac{1}{2} \frac{\partial(r \Delta v_r B_r^2)}{\partial \alpha} \vec{i}_z. \quad (1g)$$

Zastępując całkę objętościową analizowanego wyrażenia (1e) po obszarze V zawierającym w całości warstwę przewodzącą maszyny całką powierzchniową można zapisać (1d) w następującej postaci:

$$T_{e,Fe} = \int_{\partial V} r^2 \Delta \sigma_{\alpha r} d\alpha dz + \int_{\partial V} r^2 I_{\alpha} B_r d\alpha dz = 0. \quad (1h)$$

Część momentu sił $\Delta T_{e,Fe}$ we wzorze (1e) opisana matematycznie przez różnicowy pseudotensor energii pola elektromagnetycznego o wartości:

$$\Delta T_{e,Fe} = \int_{\partial V} r^2 \Delta \sigma_{ar} d\alpha dz \quad (2)$$

nie jest uwzględniana przy posługiwaniu się metodą prądów magnetyzacji, co może prowadzić do błędnych rezultatów w przypadku, gdy środowisko otaczające rozważany obszar nie jest próżnią. Należy podkreślić tutaj, iż nie żądano zerowania się składowej stycznej wektora magnetyzacji, aby obliczyć wartość momentu sił.

Otrzymany rezultat należy w tym miejscu skomentować. Jeżeli różnica $\Delta v_a = v_a - v_a$ nie jest zerowa, to wektor magnetyzacji nie zanika na powierzchni brzegowej $\partial V+$. Oznacza to, iż obie całki występujące w równości (1h) są niezerowe. Gdyby we wzorze (1a) nie występowało wyrażenie będące dywergencją różnicowego pseudotensora energii, to moment środowiskowy okazałby się niezerowy. Jednak moment sił środowiskowych jest w rozważanej maszynie asynchronicznej zerowy, gdyż składnik niejednorodnościowy zanika. Celem wyeliminowania występującej całki powierzchniowej i otrzymania poprawnego rezultatu zadaje się niezgodnie z rzeczywistością zerowy warunek na wektor magnetyzacji. Ścisłej mówiąc należy zadać zerowy warunek na składową styczną wektora magnetyzacji przy obliczaniu momentu sił metodą prądów magnetyzacji.

Można stwierdzić iż:

Dla potrzeb obliczania sił bądź momentów sił metodą prądów magnetyzacji można stosować słuszne dla danej granicy środowisk warunki brzegowe przy wykorzystaniu zależności (1a), w której pojawia się różnicowy pseudotensor energii pola elektromagnetycznego.

Wykorzystywanie przedstawionych w tabeli 1 zależności posiada następujące zalety:

- zachowana jest spójność właściwości i parametrów środowiska z warunkami brzegowymi,
- metodyka jest zgodna z wynikami metody prądów magnetyzacji przy zadawaniu zerowego warunku na wektor magnetyzacji,
- przedstawione postępowanie uściśla metodę prądów magnetyzacji,
- wyrażenie na gęstość objętościową sił różnicowych zawierające dywergencję różnicowego pseudotensora energii pola elektromagnetycznego, prowadzi do obliczania odpowiednich całek powierzchniowych.

ii) Moment środowiskowy rozważanego przetwornika elektromechanicznego (nie zawierającej elementów wykazujących cechy histerezowe) opisany może być równoważnie poprzez składnik niejednorodnościowy. Ponieważ reluktywności magnetyczne obszaru nie zależą od kąta (współrzędnej kątowej), to zgodnie z zależnością

$$rN_\alpha = \frac{1}{2} \sum_{u,w=r,\alpha,z} B_u B_w \frac{\partial v_{uw}}{\partial \alpha} = 0, \quad (3a)$$

czyli:

$$T_{e,Fe} = 0, \quad (3b)$$

co pozostaje w zgodności z wcześniej otrzymanym rezultatem (1h).

iii) W celu sprawdzenia poprawności otrzymanych rezultatów, a tym samym w celu potwierdzenia celowości wprowadzenia różnicowego pseudotensora energii pola elektromagnetycznego do teorii przetworników elektromechanicznych wyznaczamy ponownie składową od prądów $T_{e,Cu}$ korzystając - tym razem - z wyrażenia na gęstość objętościową siły Lorentza. Pole magnetyczne spełnia pierwsze równanie Maxwella:

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \vec{\dot{D}}.$$

Pomijając prąd przesunięcia (ze względu na niską częstotliwość prądów indukowanych w wirniku) oraz uwzględniając występującą normalną anizotropię reluktywności magnetycznych w obszarze maszyny można zapisać gęstość siły Lorentza w postaci:

$$\vec{j} \times \vec{B} = \text{rot}\{v_0 \vec{B} - \Delta v_r \vec{B}_r - \Delta v_\alpha \vec{B}_\alpha\} \times \vec{B}, \quad (4a)$$

gdzie z uwagi na dwuwymiarowy charakter analizowanych zjawisk: $B_z = 0$. Równanie (4a) prowadzi do równości:

$$\begin{aligned} \vec{r} \times \{\text{rot}\{v_0 \vec{B}\} \times \vec{B}\} &= \vec{r} \times (\vec{j} \times \vec{B}) + \text{rot}\{\Delta v_\alpha \vec{B}_\alpha\} r B_r - \vec{B}(\text{rot}\{\Delta v_\alpha \vec{B}_\alpha\} \vec{r}) \\ &+ \text{rot}\{\Delta v_r \vec{B}_r\} r B_r - \vec{B}(\text{rot}\{\Delta v_r \vec{B}_r\} \vec{r}). \end{aligned} \quad (4b)$$

Iloczyn wektorowy w nawiasie kwadratowym po lewej stronie (4b) jest to dywergencja tensora naprężeń Maxwella. Pierwszy składnik po prawej stronie (4b) jest to gęstość objętościowa momentu od prądów - momentu sił Lorentza. Trzeci oraz piąty składnik po prawej stronie (4b) zanika tożsamościowo. Czwarto składnik po prawej stronie po scałkowaniu po objętości obszaru zanika, gdyż (1g):

$$r \cdot \text{rot}(\vec{i}_r \Delta v_r B_r) r B_r = -r^2 \frac{\vec{i}_z}{r} \frac{\partial(\Delta v_r B_r)}{\partial \alpha} B_r = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial(r \Delta v_r B_r^2)}{\partial \alpha} \vec{i}_z, \quad (4c)$$

a całka z tego wyrażenia po zmiennej niezależnej α w obszarze kąta pełnego zanika. Z kolei, drugi składnik po prawej stronie (4b) daje się przedstawić w postaci (1f):

$$r \cdot \text{rot}(\vec{i}_\alpha \Delta v_\alpha B_\alpha) r B_r = \vec{i}_z \frac{\partial(r^2 \Delta v_\alpha B_\alpha B_r)}{\partial r} + \vec{i}_z \frac{\partial(\frac{1}{2} \Delta v_\alpha B_\alpha^2)}{\partial \alpha}, \quad (4d)$$

gdzie jak poprzednio skorzystano z dwóch równości słusznych w całym obszarze maszyny:

$$r \text{ div } \vec{B} = \frac{\partial\{r B_r\}}{\partial r} + \frac{\partial B_\alpha}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial \Delta v_\alpha}{\partial \alpha} = 0.$$

Całka analizowanego wyrażenia (4d) po obszarze V zawierającym w całości warstwę przewodzącą jest równa:

$$\int_V \text{rot}\{\Delta v_\alpha \vec{B}_\alpha\} r B_r dV = \int_{\partial V} r^2 \Delta v_\alpha B_\alpha B_r dz d\alpha. \quad (4e)$$

Zatem moment sił Lorentza (4b) można wyrazić za pomocą następującej różnicy:

$$\int_V \vec{r} \times (\vec{j} \times \vec{B}) dV = \int_V \vec{r} \times \{\text{rot}(v_0 \vec{B}) \times \vec{B}\} dV - \int_V \text{rot}\{\Delta v_\alpha \vec{B}_\alpha\} r B_r dV,$$

a stąd:

$$T_{e,Cu} = - \int_V \vec{i}_\alpha \text{div}_{|\alpha|} \{r \vec{\sigma}_\alpha\} dV - \int_V \text{rot}\{\Delta v_\alpha \vec{B}_\alpha\} r B_r dV.$$

Wykorzystując równość (4e) otrzymuje się :

$$T_{e,Cu} = - \int_V \vec{i}_\alpha \operatorname{div}_\alpha \{ r \vec{\sigma}_\alpha \} dV - \int_{\partial V} r^2 \Delta v_\alpha B_\alpha B_r dz d\alpha .$$

Przekształcenie pierwszej z całek w powyższej zależności na podstawie twierdzenia Gaussa prowadzi do zależności:

$$T_{e,Cu} = \int_{\partial V} R^2 v_o B_\alpha B_r dz d\alpha - \int_{\partial V} R^2 \Delta v_{\alpha\delta} B_\alpha B_r dz d\alpha = \int_{\partial V} R^2 v_{\alpha\delta} B_\alpha B_r dz d\alpha = T_e , \quad (4f)$$

potwierdzającej wzór (1h) bądź (3b), gdyż:

$$T_{e,Fe} = T_e - T_{e,Cu} . \quad (5)$$

Warto zwrócić uwagę, iż nieuwzględnienie w metodzie prądów magnetyzacji (punkt i)) udziału różnicowego pseudotensora energii pola elektromagnetycznego może prowadzić do niezgodności bilansu momentów, która w odniesieniu do całkowitego momentu maszyny wynosi:

$$\frac{-\Delta T_{e,Fe}}{T_e} = \frac{v_o - v_{\alpha\delta}}{v_{\alpha\delta}} . \quad (6)$$

Błąd ten w przypadku środowiska o reluktywności znacznie różniącej się od reluktywności próżni (ferromagnetyk) może przekraczać 100%. Gdy ośrodek otaczający ruchomą część przetwornika elektromagnetycznego jest próżnią (powietrzem), błąd ten zanika.

3. DWUWYMIAROWA ANALIZA POLA ELEKTROMAGNETYCZNEGO W ROZPATRYWANEJ MASZYNIE ELEKTRYCZNEJ

Rozważmy maszynę o budowie opisanej w pkt.2 przy następujących założeniach:

- zanikają pochodne cząstkowe względem zmiennej z (OZ jest osią obrotu wirnika maszyny):

$$\frac{\partial}{\partial z} \{ \cdot \} = 0 , \quad (7)$$

- prąd przesunięcia jest pomijalny:

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0 , \quad (8a)$$

- rozkład przestrzenny przepływu uzwojeń stojana jest sinusoidalny:

$$\theta_s(\alpha) = \theta_s \cos(2\pi f_s t - p\alpha + \gamma_s) = \theta_s \operatorname{Re} \{ \exp[i(2\pi f_s t - p\alpha + \gamma_s)] \} , \quad (8b)$$

co oznacza, iż uzwojenia stojana wywołują wirujące, kołowe pole magnetyczne,

- występuje normalna anizotropia własności magnetycznych - różne są reluktywności magnetyczne w kierunku radialnym i stycznym:

$$v_r - v_\alpha \neq 0 ,$$

dla szczeliny: $v_{r\delta} - v_{\alpha\delta} \neq 0$, dla warstwy przewodzącej: $v_{ra} - v_{\alpha a} \neq 0$.

Zgodnie z równaniem Maxwella można zapisać:

$$\operatorname{rot}(\vec{H}) = \gamma \vec{E} . \quad (9a)$$

Wyrażając natężenie pola magnetycznego przez indukcję pola magnetycznego w obszarze anizotropowym (szczelina, warstwa przewodząca) otrzymuje się:

$$\vec{H} = v_\alpha \vec{B}_\alpha + v_r \vec{B}_r = v_0 \vec{B} - \Delta v_\alpha \vec{B}_\alpha - \Delta v_r \vec{B}_r. \quad (9b)$$

Równanie (9a) przyjmuje postać:

$$v_0 \operatorname{rot} \vec{B} = -\gamma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \gamma \operatorname{grad} V + \Delta \vec{j}$$

przy nałożeniu warunku potencjałów o postaci:

$$\operatorname{div} \vec{A} + v_0^{-1} \gamma V = 0,$$

co prowadzi do równania określającego potencjał wektorowy o postaci:

$$v_0 \Delta \vec{A} = \gamma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \Delta \vec{j}, \quad (9c)$$

przy oznaczeniu:

$$\Delta \vec{j} = \operatorname{rot}(\Delta v_\alpha \vec{B}_\alpha + \Delta v_r \vec{B}_r). \quad (9d)$$

Rotację wektora magnetyzacji można przedstawić następująco:

$$\operatorname{rot}(\vec{I}) = \operatorname{rot}(-\vec{H} + v_0 \vec{B}) = \operatorname{rot}(-v_r \vec{B}_r - v_\alpha \vec{B}_\alpha + v_0 \vec{B}) = \operatorname{rot}(\Delta v_\alpha \vec{B}_\alpha + \Delta v_r \vec{B}_r). \quad (9e)$$

W układzie współrzędnych cylindrycznych, rzutując na kierunek osi OZ, otrzymuje się:

$$-\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (v_\alpha r \frac{\partial A_z}{\partial r}) - \frac{1}{r^2} v_r \frac{\partial^2 A_z}{\partial \alpha^2} = -\gamma \frac{\partial A_z}{\partial t}. \quad (9f)$$

Z uwagi na założoną symetrię maszyny jedyną zmienną przestrzennie składową potencjału wektorowego jest składowa A_z , określająca indukcję pola magnetycznego:

$$\vec{B} = \vec{i}_r B_r + \vec{i}_\alpha B_\alpha = \vec{i}_r \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial A_z}{\partial \alpha} - \vec{i}_\alpha \frac{\partial A_z}{\partial r}. \quad (9g)$$

Oznaczając przez \mathbf{A} wielkość będącą obrazem składowej A_z potencjału wektorowego pola magnetycznego w wybranym poniżej opisie dziedziny czasowej, zaś przez s operator odpowiadający operacji obliczania pochodnej cząstkowej po czasie, dla których można dokonać przejścia do zapisu formalnego:

$$\frac{\partial A_z}{\partial t} \Rightarrow s \mathbf{A},$$

parę (\mathbf{A}, s) mogą stanowić:

$$(\mathbf{A}, s) = \begin{cases} \mathbf{A} - \text{potencjał zespolony oraz "i}\omega", \\ A_z(s_L) - \text{transformata Laplace'a oraz "s}_L", \\ A_z - \text{funkcja wykładnicza oraz } s = -1/\tau, \end{cases}$$

gdzie:

ω - pulsacja przebiegu sinusoidalnie zmiennego w czasie (i - jednostka urojona),

s_L - operator Laplace'a,

$A_z(s_L)$ - obraz w transformacji Laplace'a funkcji o zerowej wartości początkowej:

$$A_z(0+) = 0,$$

τ - stała czasowa ($\tau > 0$ dla przebiegów wykładniczych zanikających w czasie).

Zależności obrazu A potencjału A_z od czasu t przy analizie zespolonych wielkości nie wypisuje się jawnie w równaniach. Rozważając stan pracy maszyny przy sinusoidalnie zmiennych w czasie przebiegach prądów oraz ustalonej prędkości obrotowej wirnika maszyny $s=i\omega$.

W obszarze warstwy przewodzącej (9f) przedstawia równanie Helmholtza:

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (v_{\alpha r} r \frac{\partial A}{\partial r}) + v_r \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 A}{\partial \alpha^2} = s\gamma A. \quad (9h)$$

W obszarze szczeliny ($\gamma=0$) równanie (9f) przechodzi w równanie Laplace'a:

$$\frac{\partial}{\partial r} (v_{\alpha s} r \frac{\partial A}{\partial r}) + v_{r s} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 A}{\partial \alpha^2} = 0. \quad (9k)$$

Równanie Helmholtza (9h) ma jednoznaczne rozwiązanie ($s\gamma = i\omega \neq 0$) przy zadaniu warunku brzegowego pierwszego, drugiego lub trzeciego rodzaju na brzegu rozpatrywanego obszaru. Natomiast równanie Laplace'a (9k) ma jednoznaczne rozwiązanie przy zadaniu warunku brzegowego pierwszego lub trzeciego rodzaju (nie redukującego się do warunku brzegowego drugiego rodzaju, wtedy - o ile nie narzucono innych warunków - potencjał wektorowy opisuje rodzina rozwiązań różniących się o stałą). Jeżeli poszukując rozwiązania w postaci iloczynu funkcji zmiennej $R(r)$ oraz funkcji $S(\alpha)$ uzyska się rozwiązanie równania (9h) lub (9k), spełniające odpowiednie warunki brzegowe, to jest to jedyne rozwiązanie. Poszukiwane są rozwiązania postaci [8,20]:

$$A(r, \alpha) = R(r)S(\alpha) = RS.$$

Po separacji zmiennych na podstawie (9h) uzyskuje się w obszarze warstwy przewodzącej:

$$\begin{cases} \frac{r}{R} \cdot \frac{d}{dr} (r \frac{dR}{dr}) - \frac{sr^2}{v_{\alpha s}} = \frac{v_{ra}}{v_{\alpha s}} p^2 \\ -\frac{1}{S} \cdot \frac{d^2 S}{d\alpha^2} = p^2 \end{cases}, \quad (10a,b)$$

gdzie po prawych stronach obu równań użyto dla oznaczenia wartości stałej niezależnej od zmiennych α oraz r kwadratu liczby par biegunów maszyny p w celu rozkładu przestrzennego, odpowiadającego fizycznemu p -par biegunowemu przestrzennemu rozkładowi pola magnetycznego maszyny.

Równanie różniczkowe (10a) przy $\beta \neq 0$ przedstawia równanie różniczkowe Bessela:

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dR}{dr} - (\beta^2 + \frac{p_B^2}{r^2}) R = 0, \quad (11a)$$

gdzie:

p_B - wskaźnik równania Bessela a zarazem rząd funkcji walcowych:

$$p_B = p \sqrt{\frac{v_{ra}}{v_{\alpha s}}}, \quad (11b)$$

różny - w przypadku wystąpienia anizotropii własności magnetycznych ($v_{ra} - v_{\alpha s} \neq 0$) - od liczby par biegunów p , charakteryzującej rozwiązanie równania Laplace'a,

β - parametr zmodyfikowanego równania Bessela: $\beta = \sqrt{s\gamma / v_{\alpha s}}$.

Rozwiązanie (11b) wyraża się poprzez zmodyfikowane funkcje Bessela [4,8,20]:

$$R(r) = \tilde{a} I_{p_B}(\beta r) + \tilde{b} K_{p_B}(\beta r), \quad (11c)$$

rzędu p_B o wartościach rzeczywistych dla argumentu rzeczywistego. Jeżeli p_B jest liczbą niecałkowitą, to zamiast funkcji $K_{p_B}(\)$ dla uzyskania rozwiązania ogólnego można wykorzystać funkcję $I_{-p_B}(\)$. Stałe \tilde{a}, \tilde{b} są stałymi zespolonymi.

Równanie harmoniczne (10b) ma rozwiązanie ogólne:

$$S(\alpha) = S_- \exp(-i\alpha + i\varphi) + S_+ \exp(i\alpha - i\varphi), \quad (11d)$$

a z uwagi na wywołane poprzez uzwojenia stojana wirujące, kołowe pole magnetyczne tylko jedna ze składowych nie zanika, np. $S_+ = 0$, stąd:

$$S(\alpha) = S_- \exp(-i\alpha + i\varphi). \quad (11e)$$

W obszarze warstwy przewodzącej przy prędkości obrotowej różnej od prędkości wirującego pola magnetycznego stojana składowe indukcji pola magnetycznego wynoszą:

$$\begin{cases} \mathbf{B}_{ar} = \frac{p}{r} \{a_a I_{p_B}(\beta r) + b_a K_{p_B}(\beta r)\} \exp(-i\alpha + i\varphi_a - i\frac{\pi}{2}), \\ \mathbf{B}_{a\alpha} = -\{a_a \beta I'_{p_B}(\beta r) + b_a \beta K'_{p_B}(\beta r)\} \exp(-i\alpha + i\varphi_a), \end{cases} \quad (12a,b)$$

przy czym: $a_a = \tilde{a} S_-$, $b_a = \tilde{b} S_-$, indeks dolny a odnosi się do stałych występujących w rozwiązaniach dla przewodzącej.

Natomiast w obszarze szczeliny obowiązują równania:

$$\begin{cases} \frac{r}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{dR}{dr} \right) = \frac{v_{r\delta}}{v_{a\delta}} p^2 \\ -\frac{1}{S} \frac{d^2 S}{d\alpha^2} = p^2. \end{cases} \quad (13a,b)$$

W obszarze szczeliny po separacji zmiennych składowe indukcji pola magnetycznego (indeks δ odnosi się do stałych opisujących rozwiązania w obszarze szczeliny) wyrażają się zależnościami:

$$\begin{cases} \mathbf{B}_{\delta r} = \frac{p}{r} \{a_\delta r^{p_\delta} + b_\delta r^{-p_\delta}\} \exp(-i\alpha + i\varphi_\delta - i\frac{\pi}{2}), \\ \mathbf{B}_{\delta\alpha} = -p_\delta \{a_\delta r^{p_\delta-1} - b_\delta r^{-p_\delta-1}\} \exp(-i\alpha + i\varphi_\delta), \end{cases} \quad (14a,b)$$

gdzie:

$$p_\delta = p \sqrt{\frac{v_{r\delta}}{v_{a\delta}}}.$$

Rozkład pola magnetycznego w rozważanej maszynie modelowej wymuszają wirujące, kołowe przepływy stojana i wirnika. Z uwagi na założoną liniowość obwodu elektromagnetycznego maszyny w dalszych rozważaniach zastosowano zasadę superpozycji.

Pole magnetyczne pochodzi od wymuszonych prądów w uzwojeniach stojana oraz w wirniku. Pola magnetyczne od prądów stojana i wirnika są przesunięte przestrzennie w ogólności o kąt elektryczny κ . Wyznaczenie stałych występujących w rozwiązaniach równań pola pozwoli na wyznaczenie momentu elektromagnetycznego rozpatrywanej maszyny asynchronicznej. Pole od przepływu uzwojeń stojana (amplituda przepływu wynosi Θ_s) opisują warunki brzegowe na granicach odpowiednich środowisk:

- idealny ferromagnetyk - łuska prądowa (uzwojenie stojana) - szczelina ($r = R + g$):

$$v_{\alpha\delta} \mathbf{B}_{\delta\alpha} = -\frac{1}{R+g} \cdot \frac{\partial \Theta_s(\alpha)}{\partial \alpha},$$

czyli po uwzględnieniu (14a,b)

$$a_\delta (R+g)^{p_\delta-1} - b_\delta (R+g)^{-p_\delta-1} = p\Theta_s \{ (R+g) p_\delta v_{\alpha\delta} \}^{-1}, \quad (15a)$$

$$\text{oraz} \quad \varphi_\delta = \gamma_s - \pi/2 \quad (15b)$$

(łuska prądowa przylega do powierzchni wewnętrznej idealnego ferromagnetycznego stojana maszyny),

- szczelina - warstwa przewodząca ($r = R$):

$$\mathbf{B}_{\delta r} = \mathbf{B}_{\alpha r},$$

$$\text{czyli} \quad a_\delta R^p + b_\delta R^{-p} = a_\alpha \beta I_{pB}(\beta R) + b_\alpha \beta K_{pB}(\beta R) \quad (15c)$$

$$v_{\alpha\delta} \mathbf{B}_{\delta\alpha} = v_{\alpha\alpha} \mathbf{B}_{\alpha\alpha},$$

$$\text{czyli} \quad v_{\alpha\delta} p_\delta \{ a_\delta R^{p_\delta-1} - b_\delta R^{-p_\delta-1} \} = v_{\alpha\alpha} \beta \{ a_\alpha I'_{pB}(\beta R) + b_\alpha K'_{pB}(\beta R) \}, \quad (15d)$$

$$\text{oraz} \quad \varphi_\alpha = \varphi_\delta \quad (15e)$$

- warstwa przewodząca - idealny ferromagnetyk ($r = R - a > 0$):

$$v_{\alpha a} \mathbf{B}_{\alpha a} = 0,$$

$$\text{czyli} \quad a_\alpha I'_{pB}(\beta(R-a)) + b_\alpha K'_{pB}(\beta(R-a)) = 0. \quad (15f)$$

Na podstawie równań (15) określa się stałe występujące w zależnościach (12a,b) oraz (14a,b). Stałe te wynoszą odpowiednio:

$$a_\alpha = \frac{p\Theta_s}{p_\delta v_{\alpha\delta}} \{ U(R+g)^{p_\delta} - W(R+g)^{-p_\delta} \}^{-1}, \quad (16a)$$

$$b_\alpha = -a_\alpha S, \quad S = \frac{I'_{pB}(\beta(R-a))}{K'_{pB}(\beta(R-a))}, \quad (16b)$$

$$a_\delta = a_\alpha U, \quad b_\delta = a_\alpha W. \quad (16c,d)$$

W przedstawionych zależnościach zastosowano następujące oznaczenia:

$$U = \frac{1}{2} (R^{-p_\delta+1} P + R^{-p_\delta} Q), \quad W = \frac{1}{2} (-R^{p_\delta+1} P + R^{p_\delta} Q),$$

$$P = \frac{\beta v_{\alpha\alpha}}{p_\delta v_{\alpha\delta}} \{ I'_{pB}(\beta R) - S K'_{pB}(\beta R) \}, \quad Q = I_{pB}(\beta R) - S K_{pB}(\beta R).$$

W celu uproszczenia zapisu rozwiązań pola, pochodzących od prądów stojana, oznacza się:

$$D(r) = a_{\delta} r^{p_{\delta}} + b_{\delta} r^{-p_{\delta}}, \quad Z(\beta r) = a_a I_{p_B}(\beta r) + b_a K_{p_B}(\beta r),$$

przy czym stałe a oraz b z indeksem δ dotyczą rozwiązań w obszarze szczeliny powietrznej, z indeksem a odnoszą się do warstwy anizotropowej.

Pole magnetyczne może być dodatkowo wywoływane przez wymuszony przepływ w wirniku maszyny (maszyna dwustronnie zasilana). Amplituda przepływu wymuszonego zostanie oznaczona jako $\Delta\theta_r$, zaś kąt przesunięcia tego wymuszonego - przepływu względem przepływu prądów indukowanych poprzez κ . Wartość wymuszonego przepływu i warunki brzegowe dla granic odpowiednich środowisk prowadzą kolejno do zależności:

- Przepływ doprowadzony do wirnika pod jednym biegunem maszyny:

$$\Delta\theta_r \exp\{i(\omega_s t + \varphi_a - \kappa)\} = -s\gamma \int_{-\frac{\pi}{2p}}^{\frac{\pi}{2p}} \int_a^R Zr(\beta r) \exp\{i(\omega_s t - p\alpha + \varphi_{r_a})\} r dr d\alpha \Rightarrow$$

$$\Delta\theta_r = |\Delta\theta_r| = -\frac{2s\gamma}{p} \{C_a a_{ar} + C_b b_{ar}\}, \quad \varphi_{r_a} = \varphi_a - \kappa,$$

$$\text{gdzie:} \quad C_a = \int_{R-a}^R I_{p_B}(\beta r) r dr, \quad C_b = \int_{R-a}^R K_{p_B}(\beta r) r dr. \quad (17a)$$

- Granica szczelina - warstwa przewodząca ($r = R$):

$$\mathbf{B}_{\delta r} = \mathbf{B}_{ar},$$

czyli

$$a_{\delta r} R^{p_{\delta}} + b_{\delta r} R^{-p_{\delta}} = a_{ar} I_{p_B}(\beta R) + b_{ar} K_{p_B}(\beta R), \quad (17b)$$

$$v_{\alpha\delta} \mathbf{B}_{\delta\alpha} = v_{\alpha a} \mathbf{B}_{a\alpha} \quad \text{czyli}$$

$$v_{\alpha\delta} p_{\delta} \{a_{\delta r} R^{p_{\delta}-1} - b_{\delta r} R^{-p_{\delta}-1}\} = v_{\alpha a} \beta \{a_{ar} I'_{p_B}(\beta R) + b_{ar} K'_{p_B}(\beta R)\} \quad (17c)$$

$$\text{oraz} \quad \varphi_{\delta} = \varphi_a. \quad (17d)$$

- Granica warstwa przewodząca - idealny ferromagnetyk ($r = R - a > 0$):

$$v_{\alpha\delta} \mathbf{B}_{\delta\alpha} = 0,$$

$$\text{czyli} \quad a_{ar} I'_{p_B}(\beta(R-a)) + b_{ar} K'_{p_B}(\beta(R-a)) = 0. \quad (17e)$$

Stałe występujące w rozwiązaniach równań Laplace'a i Helmholtza, pochodzących od wymuszonego prądu w wirniku, są dodatkowo opatrzone literą r . Równania (17a,b,c,d,e) określają wartości stałych występujące w zależnościach (12a,b) oraz (14a,b). Stałe te wynoszą odpowiednio:

$$a_{ar} = \frac{p\Delta\theta_r}{(-2s\gamma)} \{C_a - C_b S\}^{-1}, \quad b_{ar} = -a_{ar} S, \quad (18a)$$

$$a_{dr} = \frac{1}{2R^{p_s}} \{W1 + W2\}, \quad b_{dr} = \frac{R^{p_s}}{2} \{W1 - W2\}, \quad (18b)$$

gdzie:

$$W1 = a_{ar} I_{pB}(\beta R) + b_{ar} K_{pB}(\beta R), \quad W2 = \frac{\beta R v_{\alpha\delta}}{p_s v_{\alpha\delta}} \{a_{ar} I'_{pB}(\beta R) + b_{ar} K'_{pB}(\beta R)\}.$$

W celu uproszczenia zapisu rozwiązań (12a,b) oraz (14a,b) pochodzących od prądów wirnika oznacza się:

$$D_r(r) = a_{dr} r^{p_s} + b_{dr} r^{-p_s}, \quad Z_r(\beta r) = a_{ar} I_{pB}(\beta r) + b_{ar} K_{pB}(\beta r). \quad (19)$$

Dodatkowe oznaczenie bądź indeks dolny r odnoszą się do rozwiązań pola wywołanych przez wymuszone prądy wirnika.

Dla uzwojonej maszyny asynchronicznej dwustronnie zasilanej uzwojenie wirnika może być modelowane poprzez warstwę przewodzącą wirnika o niewielkiej grubości w porównaniu z promieniem zewnętrznym wirnika $a \ll R$.

Jeżeli $a = R$, to warstwa anizotropowa rozciąga się od osi obrotu wirnika $r = 0$ do zewnętrznej powierzchni wirnika o promieniu $r = R$ tworząc pełny blok lity. Wtedy należy przyjąć, iż stałe b_a , S , C_b są zerowe ze względu na ograniczoność wektorowego potencjału pola magnetycznego.

W przypadku maszyny jednostronnie zasilanej $\Delta\theta_r=0$ (zasilanie stojana) bądź $\theta_s=0$ (przypadek zasilania od strony wirnika).

Znajomość stałych występujących w równaniach (12a,b) i (14a,b) pozwala na określenie momentu całkowitego, permeancyjnego i od prądów maszyny. Moment całkowity maszyny wynosi:

$$T_c = \int_{\partial V} r^2 v_{\alpha\delta} B_r B_\alpha dz d\alpha. \quad (20)$$

Przy analizie zespolonej pola magnetycznego można wyrazić wartości chwilowe poprzez odpowiednie wartości zespolone:

$$B_r B_\alpha = \text{Re}\{B_r\} \text{Re}\{B_\alpha\} = \frac{1}{2} \text{Re}\{B_r B_\alpha\} + \frac{1}{2} \text{Re}\{B_r \bar{B}_\alpha\}.$$

Iloczyn wielkości zespolonych pod pierwszym symbolem wartości rzeczywistej zawiera wyrażenie $\exp(2i\omega_s t - 2ip_\alpha + \text{const})$, które po scałkowaniu po pełnym kącie $\alpha \in (0, 2\pi)$ daje wartość zerową. Składowa ta bywa nazywana składową pulsacji $2\omega_s$, [aM.2], a jej wartość średnia jest zerowa. Drugie wyrażenie nie zależy od kąta α i od czasu. Wartość całki (20) iloczynowi wartości chwilowych nie zależy od czasu. Po podstawieniu do powyższej zależności sumy rozwiązań odpowiednich składowych pola magnetycznego (12a,b) oraz (14a,b) uzyskuje się:

$$T_c = -v_{\alpha\delta} C r p \text{Im}[D \bar{D}' + D_r \bar{D}'_r + D \bar{D}'_r e^{ik} + D_r \bar{D}'_r e^{-ik}]. \quad (21)$$

Nadkreślenie oznacza tu wartość sprzężoną, prim oznacza pochodną względem promienia, a $C = \pi p l$. Moment całkowity nie zależy od promienia $r \in (R, R+g)$ wybranej powierzchni cylindrycznej umieszczonej w szczelinie maszyny, po której oblicza się całkę powierzchniową z tensora naprężeń.

Analogicznie wyznacza się moment od prądów:

$$T_{e,Cu} = -\gamma s i C \int_{R-a}^R \text{Re} \{ |Z(\beta r)|^2 + |Z_r(\beta r)|^2 + 2Z(\beta r) \overline{Z_r(\beta r)} e^{ik} \} r dr. \quad (22)$$

Wartości momentów maszyny opisane zależnościami (21), (22) i moment (środowiskowy) spełniają równość:

$$T_e = T_{e,Cu} + T_{e,Fe}.$$

Równość ta została również potwierdzona przykładami obliczeń zamieszczonych na rysunkach rys.2-5 dla różnych parametrów geometrycznych i środowiskowych maszyny asynchronicznej. Na rysunkach przedstawiono przykłady obliczeń momentów maszyny z anizotropową magnetycznie szczeliną oraz przewodzącą warstwą umieszczoną na wirniku maszyny. Zaprezentowano również obliczenia mocy i sprawdzono dokładność rozwiązania równań różniczkowych, opisujących potencjał magnetyczny. Obliczenia zrealizowano przy wykorzystaniu programu „Mathcad”. Wartości wielkości podano konsekwentnie w jednostkach układu SI. Celem dodatkowego potwierdzenia poprawności analiz:

- potwierdzono spełnienie warunków brzegowych dla rozwiązań potencjału pola magnetycznego wymuszonego przez prądy stojana i wirnika:

$$\frac{v_{\alpha\delta} dD(R+g)}{\theta_e p p_{\delta}^{-1} (R+g)^{-1}} = 1, \quad \frac{v_{\alpha\delta} p_{\delta} dD(R)}{v_{\alpha} \beta dZ(\beta R)} = 1,$$

$$\frac{Z(\beta R)}{D(R)} = 1, \quad dZ(\beta(R-a)) = 0,$$

- sprawdzono zupełność rozkładu całkowitego momentu elektromagnetycznego maszyny:

$$\frac{T_{e,Cu} + T_{e,Fe}}{T_e} = 1,$$

- obliczono moc strat ciepłych w wirniku maszyny dwukrotnie: całkując po objętości gęstość objętościową mocy strat Joula - Q_e ,

$$Q_e = \pi \gamma |s|^2 \int_{R-a}^R [|Z(\beta r)|^2 + |Z_r(\beta r)|^2 + 2 \text{Re} \{ Z(\beta r) \overline{Z_r(\beta r)} e^{ik} \}] r dr,$$

całkując po odpowiedniej powierzchni wektor Poyntinga - S_e :

$$S_e = i s \pi r p_{\delta} v_{\alpha\delta} \text{Im} \{ D d\overline{D} + D_r \overline{dD_r} + D d\overline{D_r} e^{ik} + D_r \overline{dD} e^{-ik} \},$$

sprawdzono:

$$S_e = Q_e,$$

(pochodna energii magnetycznej po czasie oraz moc mechaniczna widziana przez obserwatora związanego z wirnikiem wynosi zero),

- dokonano oceny dokładności uzyskiwanych rozwiązań równania Helmholtza oraz Laplace'a:

$$LZ = \frac{d}{dr} \{ \beta d Z(\beta r) \} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \{ Z(\beta r) \}, \quad RZ = \{ \beta^2 + \frac{p_{\beta}^2}{r^2} \} Z(\beta r),$$

$$LD = \frac{d}{dr} \left\{ \frac{dD(r)}{dr} \right\} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dD(r)}{dr}, \quad RD = \frac{p_{\delta}^2}{r^2} D(r),$$

obliczając ilorazy lewej i prawej strony równań:

$$LZ/RZ=1,$$

$$LD/RD=1.$$

Maszyna indukcyjna z izotropową, przewodzącą warstwą wirnika

Funkcje Bessela pB-tego rzędu i ich pochodne

Stale wynikające z warunków brzegowych rozwiązań równania Laplace'a i Helmholtza:

Momenty maszyny:

Moment globalny:

Moment od prądów:

Moment permeancyjny:

Udziały procentowe momentów:

Bilans mocy - wektor Poyntinga, moc cieplna

Sprawdzenie poprawności rozwiązań dla rów. Helmholtza i Laplace'a:

Rys.2. Obliczenie momentów dla przykładowej izotropowej maszyny indukcyjnej
Fig.2. The calculation for torques of exemplary isotropic induction machine

Maszyna indukcyjna z anizotropową i przewodzącą warstwą wirnika

$$\begin{aligned}
 &= 1 \quad R = 0.25 \quad \gamma = 0.10 \quad \nu r = 2 \quad \nu \alpha = 1.5 \quad \nu \alpha = 2.5 \quad \gamma = 10 \cdot 10^6 \quad \beta = 0.001 \\
 &s = 2 \cdot \pi \cdot 1.0i \quad \theta s = 170 \quad |s \cdot \epsilon_0 \cdot \gamma^{-1}| = 5.563 \cdot 10^{-18} \quad p\delta = p \quad pB = p \cdot \sqrt{\frac{\nu r}{\nu \alpha}} \quad \beta = \sqrt{\frac{s \cdot \gamma}{\nu \alpha}} \\
 &pB = 2.582 \quad |\beta| = 14.050 \quad \beta \cdot R = 2.484 + 2.484i
 \end{aligned}$$

Funkcje Bessela pB-tego rzędu (pB - liczba niecałkowita) i ich pochodne

$$\begin{aligned}
 I(pB, z) &= i^{-pB} \cdot \sum_{k=0}^{70} \frac{(-1)^k \cdot (0.5iz)^{pB-2k}}{\Gamma(k+1) \cdot \Gamma(pB+k+1)} \\
 dI(pB, z) &= i^{-pB+1} \cdot \sum_{k=0}^{70} \frac{(-1)^k \cdot (0.5-pB+k) \cdot (0.5iz)^{pB+2k-1}}{\Gamma(k+1) \cdot \Gamma(pB+k+1)}
 \end{aligned}$$

Stale wynikające z warunków brzegowych rozwiązań równania Laplace'a i Helmholtza:

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{dI(pB, \beta \cdot (R-a))}{dI(-pB, \beta \cdot (R-a))} \quad P = \frac{\nu \alpha \cdot \beta}{\nu \alpha \cdot p\delta} \cdot (dI(pB, \beta \cdot R) - S \cdot dI(-pB, \beta \cdot R)) \quad Q = I(pB, \beta \cdot R) - S \cdot I(-pB, \beta \cdot R) \\
 U &= \frac{1}{2} \cdot (R^{-p\delta+1} \cdot P + R^{-p\delta} \cdot Q) \quad W = \frac{1}{2} \cdot (R^{-p\delta+1} \cdot P + R^{-p\delta} \cdot Q) \\
 a &= \frac{\theta s \cdot p \cdot (R+g)^{-1}}{\nu \alpha \cdot p\delta} \cdot [U \cdot (R+g)^{p\delta-1} - W \cdot (R+g)^{p\delta-1}] \quad D(x) = a\delta x^{p\delta} - b\delta x^p \\
 Z(x) &= aa \cdot I(pB, x) + ba \cdot I(-pB, x) \quad dD(x) = a\delta x^{p\delta-1} - b\delta x^{p-1} \quad dZ(x) = aa \cdot dI(pB, x) - ba \cdot dI(-pB, x)
 \end{aligned}$$

Spełnienie warunków brzegowych przez rozwiązania rów. różniczkowych:

$$\frac{\nu \alpha \cdot dD(R+g)}{\theta s \cdot p \cdot p\delta \cdot (R+g)^{-1}} = 1 \quad \frac{\nu \alpha \cdot p\delta \cdot dD(R)}{\nu \alpha \cdot \beta \cdot dZ(\beta \cdot R)} = 1 \quad \frac{Z(\beta \cdot R)}{D(R)} = 1 \quad |dZ(\beta \cdot (R-a))| = 1.355 \cdot 10^{-20}$$

Momenty maszyny:

$$\begin{aligned}
 \text{Moment całkowity:} \quad T_e &= \nu \alpha \cdot C_r \cdot p\delta \cdot \text{Im}(D(r) \cdot \overline{dD(r)}) \quad T_e = 0.394 \\
 \text{Moment od prądów:} \quad T_{eCu} &= -C_s \cdot i \cdot \gamma \int_{-R-a}^R [(Z(\beta r))^2] \cdot r \cdot dr \quad T_{eCu} = 0.394 \\
 \text{Moment permeancyjny:} \quad T_{eFe} &=
 \end{aligned}$$

Udziały procentowe momentów:

$$\frac{T_{eCu}}{T_e} \cdot 100 = 100 \% \quad \frac{T_{eFe}}{T_e} \cdot 100 = 0 \% \quad \frac{T_{eCu} + T_{eFe}}{T_e} \cdot 100 = 100 \%$$

Sprawdzenie poprawności rozwiązań w środku obszarów dla rów. Helmholtza i Laplace'a:

$$\begin{aligned}
 r = R - \frac{a}{2} \quad LZ &= \left[\frac{d}{dr} (\beta \cdot dZ(\beta \cdot r)) + \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} (Z(\beta \cdot r)) \right] \quad RZ = \left(\beta^2 + \frac{pB^2}{r^2} \right) \cdot Z(\beta \cdot r) \quad \frac{LZ}{RZ} = 1.00000 \\
 r = R + \frac{g}{2} \quad LD &= \left[\frac{d}{dr} \left(\frac{d}{dr} D(r) \right) + \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} D(r) \right] \quad RD = \frac{p\delta^2}{r^2} \cdot D(r) \quad \frac{LD}{RD} = 1.00000
 \end{aligned}$$

Rys.3. Obliczenie momentów dla przykładowej anizotropowej maszyny indukcyjnej
 Fig.3. The calculation for torques of exemplary anisotropic induction machine

Maszyna indukcyjna z anizotropową szczeliną i przewodzącą warstwą wirnika

$$\begin{aligned} \sigma = 1 \quad R = 0.20 \quad \rho = 0.10 \quad p = 1 \quad v_r \delta = \frac{v_0}{1.1} \quad v_a \delta = \frac{v_0}{1.3} \quad v_r = \frac{v_0}{3.0} \quad \alpha = \frac{v_0}{3.0} \\ \gamma = 35 \cdot 10^6 \quad \epsilon = 0.001 \quad \omega = 2 \cdot \pi \cdot 2.0i \quad \theta_s = 350 \quad p \delta = p \quad \beta = \sqrt{s \cdot \frac{\gamma}{v_a}} \\ |\beta| = 40.720 \quad \beta \cdot R = 5.759 + 5.759i \quad pB = p \cdot \sqrt{\frac{v_r}{v_a}} \quad pB = 1.000 \quad |s \cdot \epsilon \cdot \gamma| = 3.179 \cdot 10^{-18} \end{aligned}$$

Stałe wynikające z warunków brzegowych rozwiązań równania Laplace'a i Helmholtza:

$$\begin{aligned} S = \frac{dI(pB, \beta \cdot (R - a))}{dK(pB, \beta \cdot (R - a))} \quad P = \frac{v_a \cdot \beta}{v_a \delta \cdot p \delta} \cdot (dI(pB, \beta \cdot R) - S \cdot dK(pB, \beta \cdot R)) \quad Q = I(pB, \beta \cdot R) - S \cdot K(pB, \beta \cdot R) \\ U = \frac{1}{2} \cdot (R^{p\delta+1} \cdot P + R^{p\delta} \cdot Q) \quad W = \frac{1}{2} \cdot (R^{p\delta+1} \cdot P + R^{p\delta} \cdot Q) \\ aa = \frac{\theta_s \cdot p \cdot (R + g)^{-1}}{v_a \delta \cdot p \delta} \cdot [U \cdot (R + g)^{p\delta-1} - W \cdot (R + g)^{p\delta-1}] \quad ba = -aa \quad b\delta = -aa \cdot W \quad a\delta = -aa \\ D(x) = a\delta \cdot x^{p\delta} + b\delta \cdot x^p \quad Z(x) = aa \cdot I(pB, x) - ba \cdot K(pB, x) \quad dD(x) = a\delta \cdot x^{p\delta-1} - b\delta \cdot x^{p\delta-1} \\ dZ(x) = aa \cdot dI(pB, x) + ba \cdot dK(pB, x) \end{aligned}$$

Spełnienie warunków brzegowych przez rozwiązania rów. różniczkowych:

$$\frac{v_a \delta \cdot dD(R + g)}{\theta_s \cdot p \cdot \delta^{-1} \cdot (R + g)^{-1}} = 1 \quad \frac{v_a \delta \cdot p \delta \cdot dD(R)}{v_a \cdot \beta \cdot dZ(\beta \cdot R)} = 1 \quad \frac{Z(\beta \cdot R)}{D(R)} = 1 \quad |dZ(\beta \cdot (R - a))| = 8.47 \cdot 10^{-22}$$

Momenty maszyny:

$$\text{Moment całkowity: } T_e = v_a \delta \cdot C_r \cdot p \delta \cdot \text{Im}(D(r) \cdot \overline{dD(r)}) \quad T_e = 0.137$$

$$\text{Moment od prądów: } T_e C_u = C_s \cdot i \cdot \gamma \int_{R-a}^R [(|Z(\beta \cdot r)|)^2] \cdot r \, dr \quad T_e C_u = 0.137$$

$$\text{Moment permeancyjny: } T_e F_e =$$

Udziały procentowe momentów:

$$\begin{aligned} \frac{T_e C_u}{T_e} \cdot 100 = 100 \quad \% \quad \frac{T_e F_e}{T_e} \cdot 100 = 0 \quad \% \quad \frac{T_e C_u + T_e F_e}{T_e} \cdot 100 = 100 \quad \% \\ \frac{v_0 - v_a \delta}{v_0} \cdot 100 = 23.077 \quad \% \end{aligned}$$

Bilans mocy - wektor Poyntinga, moc cieplna:

$$Q_e = \pi \cdot |s| \cdot \gamma \int_{R-a}^R [(|Z(\beta \cdot r)|)^2] \cdot r \, dr \quad Q_e = 1.716$$

$$S_e = \pi \cdot |s| \cdot i \cdot r \cdot v_a \delta \cdot p \delta \cdot \text{Im}(D(r) \cdot \overline{dD(r)}) \quad S_e = 1.716 \quad \frac{Q_e}{S_e} = 1.000$$

Rys.4. Obliczenie momentów dla przykładowej maszyny indukcyjnej z anizotropową szczeliną
Fig.4. The calculation for torques of exemplary induction machine with anisotropic gap

Maszyna indukcyjna z anizotropową szczeliną i przewodzącą warstwą wirnika

$$\begin{aligned} \beta = 1 \quad R = 0.20 \quad \gamma = 0.10 \quad p = 1 \quad vr\delta = \frac{v_0}{1.1} \quad v\alpha\delta = \frac{v_0}{1.3} \quad r = \frac{v_0}{2.0} \quad \alpha = \frac{v_0}{3.5} \\ \gamma = 35 \cdot 10^6 \quad \theta_s = 2 \cdot \pi \cdot 2.0i \quad \theta_s = 350 \quad p\delta = p \quad \beta = \sqrt{\frac{s \cdot \gamma}{v\alpha}} \quad |\beta| = 43.982 \\ \beta \cdot R = 6.220 + 6.220i \quad pB = p \cdot \sqrt{\frac{vr}{v\alpha}} \quad pB = 1.323 \quad |s \cdot \epsilon_0 \cdot \gamma| = 3.179 \cdot 10^{-18} \end{aligned}$$

Stałe wynikające z warunków brzegowych rozwiązań równania Laplace'a i Helmholtza:

$$\begin{aligned} S = \frac{dl(pB, \beta(R-a))}{dl(-pB, \beta(R-a))} \quad P = \frac{v\alpha\beta}{v\alpha\delta p\delta} \cdot (dl(pB, \beta R) - S \cdot dl(-pB, \beta R)) \quad Q = I(pB, \beta R) \quad S I(-pB, \beta R) \\ U = \frac{1}{2} \cdot (R^{p\delta+1} \cdot P + R^{p\delta} \cdot Q) \quad W = \frac{1}{2} \cdot (R^{p\delta+1} \cdot P + R^{p\delta} \cdot Q) \\ aa = \frac{\theta_s \cdot p \cdot (R+g)^{-1}}{v\alpha\delta p\delta} \cdot [U \cdot (R+g)^{p\delta-1} - W \cdot (R+g)^{-p\delta-1}] \quad ba = -aa \quad b\delta = aa \cdot W \quad a\delta = aa \\ D(x) = a\delta \cdot x^{p\delta} + b\delta \cdot x^{-p} \quad Z(x) = aa \cdot I(pB, x) + ba \cdot I(-pB, x) \quad dD(x) = a\delta \cdot x^{p\delta-1} - b\delta \cdot x^{-p\delta-1} \\ dZ(x) = aa \cdot dl(pB, x) + ba \cdot dl(-pB, x) \end{aligned}$$

Spełnienie warunków brzegowych przez rozwiązania równ. różniczkowych:

$$\frac{v\alpha\delta \cdot dD(R-g)}{\theta_s \cdot p \cdot p\delta^{-1} \cdot (R+g)^{-1}} = 1 \quad \frac{v\alpha\delta \cdot p\delta \cdot dD(R)}{v\alpha \cdot \beta \cdot dZ(\beta R)} = 1 \quad \frac{Z(\beta R)}{D(R)} = 1 \quad |dZ(\beta(R-a))| = 0$$

Momenty maszyny

$$\text{Moment całkowity: } Te = -v\alpha\delta \cdot C \cdot r \cdot p\delta \cdot \text{Im}(D(r) \cdot \overline{dD(r)}) \quad Te = 0.146$$

$$\text{Moment od prądów: } TeCu = -C \cdot s \cdot i \cdot \gamma \int_{R-a}^R [(|Z(\beta r)|)^2] \cdot r \cdot dr \quad TeCu = 0.146$$

$$\text{Moment permeancyjny: } TeFe =$$

Udziały procentowe momentów:

$$\begin{aligned} \frac{TeCu}{Te} \cdot 100 = 100 \% \quad \frac{TeFe}{Te} \cdot 100 = 0 \% \quad \frac{TeCu + TeFe}{Te} \cdot 100 = 100 \% \\ \frac{v_0 - v\alpha\delta}{v_0} \cdot 100 = 23.077 \% \end{aligned}$$

Bilans mocy - wektor Poyntinga, moc ciepła

$$Qe = \pi \cdot (|s|)^2 \cdot l \cdot \gamma \int_{R-a}^R [(|Z(\beta r)|)^2] \cdot r \cdot dr \quad Qe = 1.837$$

$$Se = \pi \cdot l \cdot s \cdot i \cdot r \cdot v\alpha\delta \cdot p\delta \cdot \text{Im}(D(r) \cdot \overline{dD(r)}) \quad Se = 1.837 \quad \frac{Qe}{Se} = 1.000$$

Rys.5. Obliczenie momentów dla przykładowej maszyny indukcyjnej z anizotropową szczeliną
Fig.5. The calculation for torques of exemplary induction machine with anisotropic gap

4. PODSUMOWANIE

1. Przeprowadzone rozważania oraz dodatkowo przykłady obliczeniowe pozwalają na modyfikację metody prądów magnetyzacji poprzez wprowadzenie różnicowego pseudotensora energii pola elektromagnetycznego. Przeprowadzenie obliczeń analitycznie, choć pozornie nieprzejrzyste, umożliwia uwolnienie się od błędów analiz numerycznych dając potwierdzenie wniosków. Uzyskanie rozwiązań analitycznych – choć dla wyidealizowanej geometrii maszyny – pozwala na analizę jakościową wpływu anizotropii wirnika na wartość momentu elektromagnetycznego.

2. Zdefiniowany różnicowy tensor energii pola elektromagnetycznego $\Delta\sigma_{uv}$ pozwala na uzupełnienie wyrażenia opisującego gęstość sił wyrażającej się poprzez prądy magnetyzacji postaci σ_{ij} do gęstości sił środowiskowych o wartości σ_{ij} (tabela 1.). Różnicowy tensor posiada zatem fizykalną interpretację, która umożliwia wprowadzenie go do teorii pola elektromagnetycznego oraz teorii przetworników elektromechanicznych.

LITERATURA

1. Demenko A.: Symulacja dynamicznych stanów pracy maszyn elektrycznych w ujęciu polowym. Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań 1997.
2. Gąsiorek S., Wadas R.: Ferryty. Zarys własności i technologii. WKiŁ, Warszawa 1987.
3. Gółąb S.: Rachunek tensorowy. PWN, Warszawa 1966.
4. Hammond AS., Sykulski J.K.: Engineering Electromagnetism Physical Processes and Computation. Oxford Science Publications, 1993.
5. Ingarden R.S., Jamiołkowski A.: Classical electrodynamics. Elsevier-PWN, Warszawa, 1985.
6. Kästner S.: Vektoren, Tensoren, Spinoren. Akademie-Verlag, Berlin 1960.
7. Ratnajeevan S., Hoole H.: Finite elements, electromagnetics and design. Elsevier 1995.
8. Sikora R.: Teoria pola elektromagnetycznego. WNT, Warszawa 1985.
9. Sufczyński M.: Elektrodynamika. PWN, Warszawa 1980 (wyd. IV).
10. Tamm I.E.: Podstawy teorii elektryczności. WNT, Warszawa 1965.
11. Coulomb J.L.: A methodology for determination of global electromechanical quantities from a finite elements analysis and its application to the evaluation of magnetics forces, torques and stiffness. IEEE Transaction on Magnetics, Vol. 19, No.6, pp.2514-2519, 1983.
12. Demenko A.: Movement simulation in finite element analysis of electric machine dynamics. IEEE Transaction on Magnetics, Vol.32, No.3, pp.1553-1556, 1996.
13. Di Barba P., Savini A., Wiak S.: 2-D Numerical simulation of electrostatic micromotor torque. 2-nd International Conference on Computation in Electromagnetics, Nottingham, UK, 1994.
14. Kabashima T., Kawahare A., Goto T.: Force calculation using magnetizing currents. IEEE Transaction on Magnetics, Vol.24, No.1, pp.451-455, 1995.
15. Ren Z., Besbes M., Boukhtache S. Calculation of local force in magnetized materials. Proceedings of International Workshop on Electric and Magnetic fields from Numerical Models to Industrial Applications, 1992. pp. 641-646.
16. Spałek D.: Evaluation of permeantive component of electromagnetic torque in electrical machine. 8th ISTET'95 International Symposium on Theoretical Electrical Engineering, Proc. pp.140-143, Thessaloniki Greece, 1995.

17. Spałek D.: Asymmetrical energy tensors of electromagnetic field. Archives of Electrical Engineering Vol. XLIV, No.4, pp.527-543, 1995.
18. Spałek D.: Moment reluktancyjny a permeancyjny - definicje oraz różnice. ZN Pol.Śl., Elektryka, nr 149, ss.137-149, Gliwice 1996.
19. Spałek D., Burlikowski W.: Field evaluation for electromagnetic torque components. IEE Proceedings Electric Power Applications, Vol.144, No. 2, pp.85-94, 1997.
20. Spałek D.: Electromagnetic torque components in synchronous salient-pole machine. COMPEL - The International Journal for Computation & Mathematics in Electrical & Electronics Engineering, Vol. 16, Issue 3, pp.129-143, MCB UK, 1997.
21. Zakrzewski K.: Pole elektromagnetyczne w ciałach ferromagnetycznych przewodzących. Zeszyty Naukowe s. Elektryka nr 38, Łódź 1972.

Wpłynęło do Redakcji dnia 15 maja 1998 r.

Recenzent: Dr hab. inż. Andrzej Demenko
Profesor Politechniki Poznańskiej

Abstract

In this paper the problem of electromagnetic torque calculation has been considered. The magnetisation currents method has been generalised. A definition of so-called residual energy pseudotensor has been proposed. The residual energy quasitensor of electromagnetic field vanishes only for the vacuum. This tensor describes the difference between the electromagnetic torque and its approximation given by the method of equivalent magnetisation currents. This difference does not appear if the residual energy quasitensor is taken into account. The residual energy tensor enables to generalise the method of equivalent magnetisation currents if the outer region differs from the vacuum. As an example the electromagnetic torque has been analytically evaluated for induction motors with solid rotor and anisotropic gap.