

Andrzej PUSZER

ZASTĘPCZA STAŁA CZASOWA PROCESÓW DYFUZYJNYCH W WALCU O SKOŃCZONEJ WYSOKOŚCI

Streszczenie: Wykorzystując transformację całkową w obszarze skończonym określono zastępczą stałą czasową dla dyfuzji ciepła i masy w walcu o skończonej wysokości przy warunku brzegowym trzeciego rodzaju. Podano praktyczne zastosowania tej stałej do określenia czasu trwania stanu nieustalonego, do wyznaczania współczynników wnikania ciepła i dyfuzyjności cieplnej w dynamicznej metodzie pomiaru.

1. WSTĘP

W pracy [10] R.Sikora i W.Lipiński wyznaczyli stałą czasową procesów dyfuzyjnych przy warunku brzegowym 1 rodzaju tzw. warunek Dirichleta. W dyfuzji ciepła i masy bardziej powszechny jest warunek brzegowy 3 rodzaju, charakteryzujący konwekcyjny sposób wymiany ciepła i masy między płynem a ciałem stałym. Stąd niniejszą pracę poświęcono temu zagadnieniu. Całość rozumowania dotyczy dyfuzji ciepła, z tym że rezultaty można łatwo adaptować do izotermicznej wymiany masy. W rozwiązaniu problemu wykorzystano transformację całkową w obszarze skończonym, upraszczającą procedurę rozwiązania równania dyfuzji.

Ponadto w pracy przedstawiono możliwość wykorzystania rozważań teoretycznych dla celów praktycznych, szczególnie do eksperymentalnego wyznaczania współczynników: wnikania ciepła α i dyfuzyjności cieplnej a .

2. MODEL MATEMATYCZNY

Dla rozwiązania problemu przyjęto następujące założenia:

- pole temperaturowe walca t_w jest osiowo symetryczne,
- współczynniki wnikania ciepła są stałe i reprezentują wartości średnie na powierzchniach bocznej α i oszokowych α'
- współczynniki termofizyczne walca c , ρ i λ są stałe, niezależne od temperatury,
- temperatura płynu t_p zmienia się aperiodycznie,
- pojemność cieplna płynu w stosunku do walca jest bardzo duża.

Pole temperaturowe walca dla tak przyjętych założeń opisuje równanie Fouriera-Kirchhoffa z warunkami brzegowo-początkowymi w postaci:

$$\frac{\partial \theta}{\partial Fo} - \frac{\partial \vartheta}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \zeta^2}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \xi} + Bi \theta = 0 \quad \text{dla } \xi = 1, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \zeta} \mp K_{\alpha} Bi \theta = 0 \quad \text{dla } \zeta = \pm \frac{h}{R}, \quad (3)$$

$$\theta(\xi, \zeta, Fo) = 0 \quad \vartheta(Fo) = 0 \quad \text{dla } Fo = 0 \quad (4)$$

gdzie:

$\theta = \frac{t_p - t_w}{\Delta t}$ - bezwymiarowa, zredukowana różnica temperatur między płynem a walcem,

$\vartheta = \frac{t_p - t_0}{\Delta t}$ - bezwymiarowa, zredukowana temperatura płynu,

$\Delta t = t_k - t_0$ - charakterystyczna różnica temperatur,

t_k, t_0 - odpowiednio temperatury: końcowa i początkowa, jednakowa dla płynu i walca,

$Bi = \frac{\alpha R}{\lambda}$ - liczba Biota,

$K_{\alpha} = \frac{\alpha'}{\alpha}; Fo = \frac{\alpha t}{R^2}$ - bezwymiarowy czas,

$\xi = \frac{r}{R}, \zeta = \frac{z}{R}$ - bezwymiarowe współrzędne,

R - promień walca,

h - połowa wysokości walca.

Dla tak zdefiniowanych wielkości zastępcza, bezwymiarowa stała czasowa rozumiana jako pierwszy moment zwykły rozkładu całkowitego czasu trwania stanu nieustalonego pola temperaturowego w walcu będzie [6], [7], [10]:

$$Fo = \frac{t^*}{R^2} = \int_0^{\infty} \theta(\xi, \zeta, Fo) dFo \quad (5)$$

gdzie:

t^* - zastępcza stała czasowa.

Jest ona miarą powierzchni pola sawartego między charakterystykami czasowymi płynu i walca.

Dokonując transformacji całkowej Laplace'a względem Fo z warunkami brzegowymi (2), (3) i zależności (5) z uwzględnieniem (4) otrzyma się:

$$\frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial \zeta^2} - S \bar{\theta} = -S \bar{\theta}^*, \quad (1a)$$

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \xi} + Bi \bar{\theta} = 0 \quad \text{dla } \xi = 1, \quad (2a)$$

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \zeta} \pm K_{\alpha} Bi \bar{\theta} = 0 \quad \text{dla } \zeta = \pm \frac{h}{R}, \quad (3a)$$

$$\bar{\theta}_0 = \lim_{S \rightarrow 0} \bar{\theta}(\xi, \zeta, S),$$

gdzie:

$S = s \frac{R^2}{\alpha}$ - bezwymiarowy parametr transformacji Laplace'a.

Z zależności (5a) wynika, że do rozwiązania problemu, tzn. wyznaczenia zastępczej stałej czasowej procesu wystarczy znajomość transformaty $\bar{\theta}$ w określonym punkcie walca.

3. OKREŚLENIE ZASTĘPCZEJ STAŁEJ CZASOWEJ

Dla rozwiązania równania (1a) zastosowano transformację całkową w obszarze skończonym względem zmiennej ξ [1].

$$\bar{\theta}^*(\mu_k, \zeta, S) = \iint_{\omega} \bar{\theta}(\xi, \zeta, S) v_k(\xi, \mu_k) d\omega \quad (6)$$

gdzie:

- ω - zredukowany obszar zmiennej ξ ,
- $v_k(\xi, \mu_k)$ - jądro transformacji (funkcje własne) zależne od geometrii, dla okrągłego przekroju poprzecznego $v_k = J_0(\mu_k \xi)$,
- μ_k - wartości własne będące dodatnimi pierwiastkami równania (7),
- $J_0(\mu), J_1(\mu)$ - funkcje Bessela o argumentie μ , pierwszego rzędu, zerowego i pierwszego rzędu.

$$Bi J_0(\mu) = \mu J_1(\mu) \quad (7)$$

Zmienna stransformowana $\bar{\theta}^*$ jest w tym wypadku (w odróżnieniu od innych transformacji całkowych) zmienną dyskretną. Po transformacji (6) równania (1a) i warunku brzegowego (3a) z uwzględnieniem (2a) otrzyma się:

$$\frac{d^2 \bar{\theta}^*}{d\zeta^2} - \beta^2 \bar{\theta}^* = -S \bar{N}_k^2 A_k, \quad (1b)$$

$$\frac{d\bar{\theta}^*}{d\xi} \pm K_{\alpha} Bi \bar{\theta}^* = 0 \quad \text{dla } \xi = \pm \frac{h}{R}, \quad (3b)$$

gdzie:

$$\beta_k^2 = \mu_k^2 + S, \quad N_k - \text{norma funkcji } v_k$$

$$A_k = \frac{2 Bi}{J_0(\mu_k) (\mu_k^2 + Bi^2)}$$

Całka równania (1b) z uwzględnieniem (3b) będzie:

$$\bar{\theta}^*(\mu_k, \xi, S) = \frac{N_k^2 A_k}{\beta_k^2} \left[1 - \frac{\text{ch}(\beta_k \xi)}{\frac{\beta_k}{K_{\alpha} Bi} \text{sh}(\beta_k \frac{h}{R}) + \text{ch}(\beta_k \frac{h}{R})} \right] S^{\psi}(S) \quad (8)$$

Transformacja odwrotna względem (6) jest określona równaniem [1]:

$$\bar{\theta}(\xi, \eta, S) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{N_k^2} \bar{\theta}^*(\mu_k, \xi, S) v_k(\xi, \mu_k) \quad (9)$$

Stosując (9) do (8) otrzyma się poszukiwaną transformatę $\bar{\theta}$ dla wyznaczenia bezwymiarowej, zastępczej stałej czasowej (5a).

$$\bar{\theta}(\xi, \eta, S) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{\beta_k^2} J_0(\mu_k \xi) \left[1 - \frac{\text{ch}(\beta_k \xi)}{\frac{\beta_k}{K_{\alpha} Bi} \text{sh}(\beta_k \frac{h}{R}) + \text{ch}(\beta_k \frac{h}{R})} \right] S^{\psi}(S) \quad (10)$$

Na podstawie założenia d transformata temperatury płynu będzie:

$$\bar{\psi}(S) = \frac{\prod_{j=1}^m (b_j S + 1)}{S \prod_{i=1}^n (a_i S + 1)} \quad (11)$$

gdzie:

a_i, b_j - współczynniki charakteryzujące przebiegi $\psi'(Fo)$ $n \geq m$

Podstawiając (11), (10) do (5a) otrzyma się formułę do obliczania zastępczej stałej czasowej.

$$\hat{F}_0 = \frac{\tau a}{R^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{\mu_k^2} J_0(\mu_k \xi) \left[1 - \frac{\operatorname{ch}(\mu_k \xi)}{\frac{\mu_k}{K \alpha} \operatorname{sh}(\mu_k \frac{h}{R}) + \operatorname{ch}(\mu_k \frac{h}{R})} \right] \quad (12)$$

Ponieważ na podstawie [5]

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{\mu_k^2} J_0(\mu_k \xi) = \frac{1}{4} \left(\frac{2}{Bi} + 1 - \xi^2 \right),$$

to zależność (12) będzie:

$$\hat{F}_0 = \frac{1}{4} \left(\frac{2}{Bi} + 1 - \xi^2 \right) (1 - \psi), \quad (12a)$$

przy czym

$$\psi = \frac{4 Bi}{2 + (1 - \xi^2) Bi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{\mu_k^2} \frac{J_0(\mu_k \xi) \operatorname{ch}(\mu_k \xi)}{\frac{\mu_k}{K \alpha} \operatorname{sh}(\mu_k \frac{h}{R}) + \operatorname{ch}(\mu_k \frac{h}{R})} \quad (13)$$

Wartości liczby ψ zwanej dalej poprawką zawarte są w przedziale $[0,1]$, przy czym $\psi = 0$ dla $\frac{h}{R} \rightarrow \infty$. Szereg występujący w zależności (13) jest szybkozbieżny. Dla $\frac{h}{R} > 1$ i $Bi > \frac{2}{1 - \xi^2}$ wystarczy praktycznie obliczyć dwa pierwsze wyrazy szeregu, a dla małych liczb Bi cztery wyrazy. Przykładowo wykresy zależności (13) w postaci $\psi(\frac{h}{R})$ dla $\xi = 0$ i $\xi = 1$ oraz wybranych liczb Bi i $K \alpha$ przedstawiono na rys. 1.

4. DYSKUSJA WYNIKU

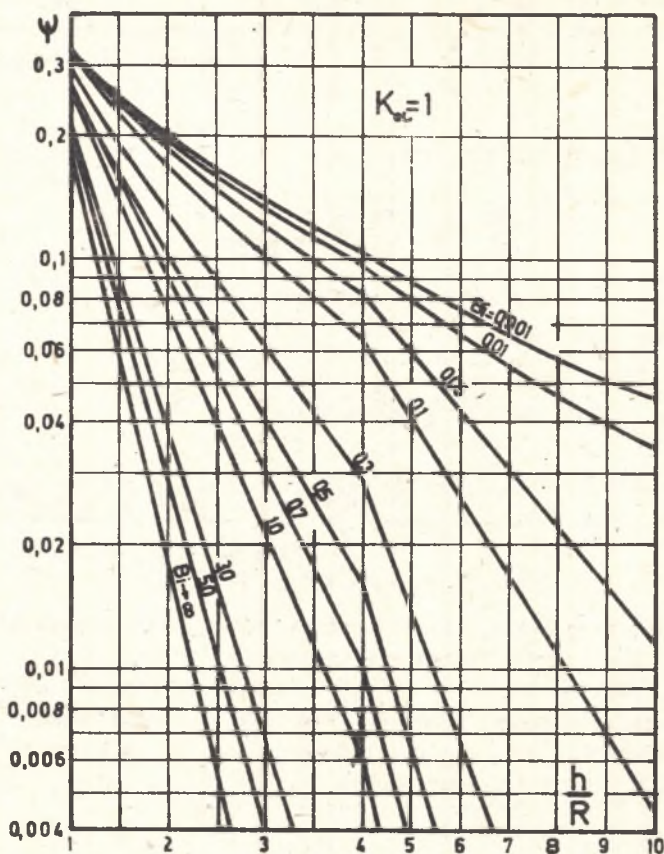
Z zależności (12a) i (13) można użyć także, ostatecznie przypadki dyfuzji ciepła. I tak dla $Bi \rightarrow \infty$, co odpowiada warunkom brzegowemu pierwszego rodzaju (Dirichleta), otrzyma się:

$$\hat{F}_0 = \frac{\tau a}{R^2} = \frac{1}{4} (1 - \xi^2) (1 - \psi_{\infty}) \quad (14)$$

$$\psi_{\infty} = \frac{8}{1 - \xi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0(\mu_k \xi) \operatorname{ch}(\mu_k \xi)}{J_0(\mu_k) \mu_k^3 \operatorname{ch}(\mu_k \frac{h}{R})} \quad (15)$$

Dla $Bi \ll \frac{2}{1 - \xi^2}$ i $\frac{h}{R} \rightarrow \infty$ przy $R > 0$ zależność (12a) będzie:

$$\hat{F}_0 = \frac{1}{2 Bi} \quad (16)$$



Rys. 1. Zależność poprawki ψ od $\frac{h}{R}$ i Bi przy:
a) $K_\alpha = 1$

Wynik ten odpowiada jednopojemnościowemu modelowi walca, w którym zakłada się płaskość izoterm w przekroju poprzecznym. W literaturze zależność ta znana jest pod postacią, w której $Po = T \frac{h}{R^2}$, gdzie T jest stałą czasową charakterystyki skokowej walca.

Dla $Bi > \frac{2}{1 - \gamma^2}$ i $\frac{h}{R} \rightarrow \infty$ przy $R > 0$ zależność (12a) będzie:

$$Po = \frac{1}{4} (Bi + 1 - \gamma^2) \quad (17)$$

Uzyskane rezultaty dla dyfuzji ciepła można łatwo adaptować dla potrzeb dyfuzji masy, jeśli model matematyczny tej ostatniej jest liniowy. Wówczas liczbę Biota i K_α definiujemy następująco:

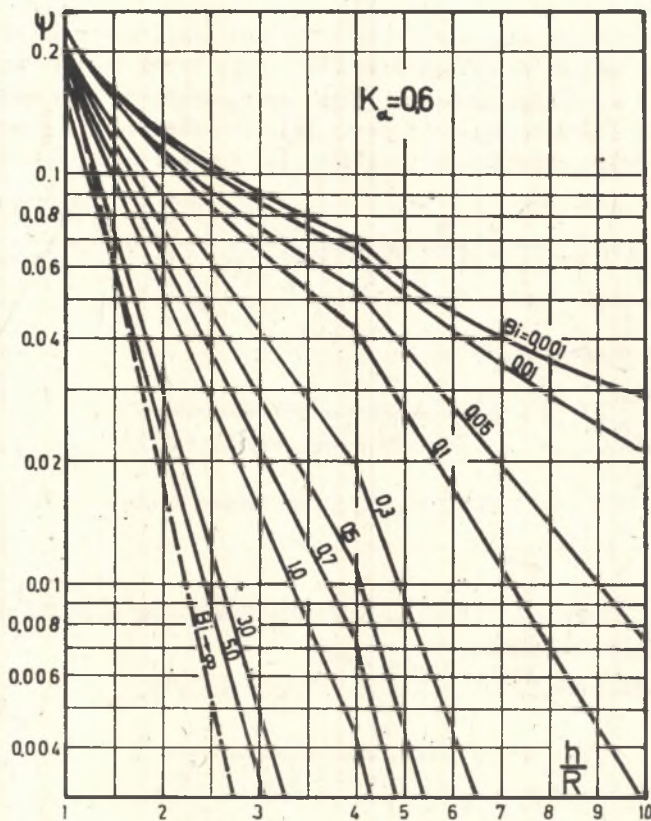
$$Bi = \frac{hR}{D}, \quad K_\alpha = K_B = \frac{\beta'}{\beta};$$

gdzie:

β, β' - współczynniki wnikania masy na powierzchni bocznej i czołowej walca,

D - współczynnik dyfuzji masy w walcu.

Natomiast przy definicji bezwymiarowego czasu Fo w miejsce współczynnika dyfuzyjności cieplnej a należy podstawić współczynnik dyfuzyjności masowej. Zastępcze stałe czasowe dyfuzji masy w drugim okresie procesu suszenia dla geometrii kulistej ciała suszonego wyznaczono w pracy [7].



Rys. 1. Zależność poprawki ψ od $\frac{h}{R}$ i Bi przy:
b) $K_\alpha = 0,6$

5. PRZYKŁADY PRAKTYCZNEGO WYKORZYSTANIA ZASTĘPCZEJ STAŁEJ CZASOWEJ

5.1. Ocena czasu trwania stanu nieustalonego procesu

Przy wymuszeniu skokowym czas trwania stanu nieustalonego w punkcie obszaru procesowego o współrzędnych ξ i ζ można ocenić na podstawie formuły (18).

$$\tau \approx (3 \div 5) \frac{R^2}{4a} \left(\frac{1}{\text{Bi}} + 1 - \zeta^2 \right) (1 - \phi). \quad (18)$$

Jest to sposób przybliżony nie precyzujący poziomu ufności uzyskanego wyniku. Dokładny sposób pozwalający na określenie czasu trwania stanu nieustalonego dla dowolnego wymuszenia typu aperiodycznego przy założonym poziomie ufności ε przedstawiono w pracy [8]. Przykładowo dla $\frac{h}{R} \rightarrow \infty$ i wymuszenia skokowego czas ten na podstawie [8] wynosi:

$$\tau_{\varepsilon} = \hat{t} \frac{1 - \eta^2}{\eta(\eta - \sqrt{2 - \eta^2})} \ln \left[(1 - \varepsilon) \frac{\eta^2 - 2 + \eta\sqrt{2 - \eta^2}}{\eta^2 - 1} \right] \quad (19)$$

gdzie:

ε - poziom ufności, $\varepsilon > 0,9$

$$\eta = \hat{F}_0 \frac{1}{\sqrt{\frac{4}{\text{Bi}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\text{Bi}} \right) + \frac{1}{2} (1 - \xi^4)}}.$$

Według zależności (19) można obliczyć tzw. czasy charakterystyczne $\tau_{0,9}$, $\tau_{0,95}$ itp.

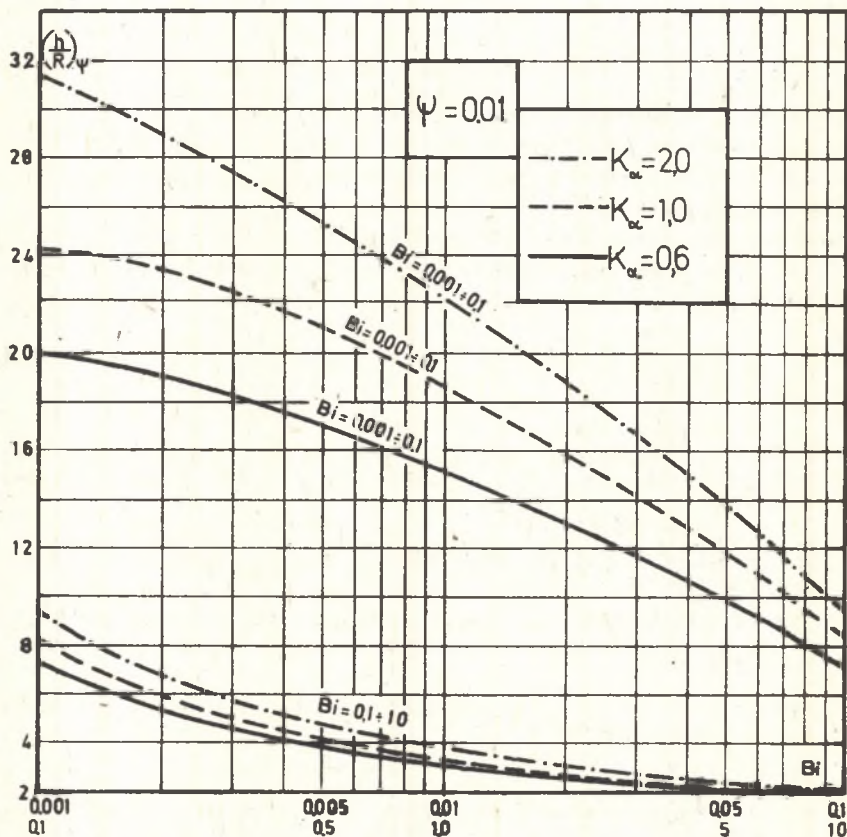
5.2. Eksperymentalne wyznaczenie współczynnika wnikania ciepła metoda stanu nieustalonego

Z zależności (12a) po jej przekształceniu otrzyma się:

$$\alpha = \frac{\lambda}{R} \frac{2(1 - \phi)}{4 \hat{F}_0 - (1 - \xi^2)(1 - \phi)}. \quad (20)$$

Zależność ta pozwala na eksperymentalne wyznaczenie współczynnika wnikania ciepła dla geometrii walcowej. W tym celu należy wykonać odpowiednią sondę walcową o założonej średnicy, z materiału o znanych współczynnikach przewodzenia ciepła λ i dyfuzyjności cieplnej a . Pomiar czasowej charakterystyki temperaturowej sondy najkorzystniej jest realizować w jej geometrycznym środku ($\xi = 0$, $\zeta = 0$). Z eksperymentu uzyskuje się wartość zastępczej stałej czasowej \hat{F}_0 , która jak już wspomniano jest miarą pola powiększenia między charakterystykami czasowymi płynu i sondy. Wartość po-

prawki ψ można ograniczyć przez odpowiedni dobór wysokości sondy (rys. 2) lub stosować dla krótkich sond procedurę iteracyjną dla wyznaczenia ψ . Problem ten dokładniej przedstawiono w pracy [6]. Wyniki badań współczynnika wnikania ciepła za pomocą walcowej sondy dwuwarstwowej w oparciu o tę samą metodykę przedstawiono w pracach [2] [3] [4].



Rys. 2. Zależność $\frac{h}{R}$ od Bi i K_α przy $\psi = 0,01$

5.3. Experimentalne wyznaczanie współczynnika dyfuzywności cieplnej metodą stanu nieustalonego

Założmy wstępnie, że próbka materiału stałego isotropowego wykonana jest w postaci nieskończenie długiego walca. Zastępcze stałe czasowe przy takim założeniu dla dwóch charakterystycznych punktów $\xi_0 = 0$ i $0 < \xi_1 < 1$, odpowiednio na podstawie (17) będą:

$$\hat{t}_0 = \frac{R^2}{4a} \left(\frac{1}{Bi} + 1 \right) \quad \text{i} \quad \hat{t}_1 = \frac{R^2}{4a} \left(\frac{1}{Bi} + 1 - \zeta_1^2 \right)$$

Tworząc różnicę tych dwóch równań i odpowiednio ją przekształcając otrzymamy się:

$$a = \frac{r^2}{4 \Delta \hat{t}}, \quad (21)$$

gdzie:

$$\Delta \hat{t} = \hat{t}_0 - \hat{t}_1 - \text{wartość uzyskana z eksperymentu.}$$

W świetle uzyskanego wyniku (21) założenie $\frac{h}{R} \rightarrow \infty$ przy $R > 0$ można obecnie złagodzić, przyjmując skończoną wysokość próbki. Przy czym jej wysokość będzie zależna od realizowanych w trakcie eksperymentu liczb Bi i ograniczeń narzucanych na ϕ [9].

W praktyce pomiarowej stosuje się najczęściej na tyle długie próbki walcowe, że wpływ skończonej długości walca można pominąć pod warunkiem prawidłowego doboru i zainstalowania czujnika pomiarowego.

LITERATURA

- [1] Gdula S.J.: Przewodzenie ciepła w prętach przyrządczych i żebrach. Praca habilitacyjna. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Energetyka z.20/1965.
- [2] Lorkiewicz Z., Puszer A.: Pomiar współczynnika wnikania ciepła w łożu fluidalnym metodą dynamiczną. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Energetyka z.74/79.
- [3] Lorkiewicz Z., Puszer A.: Die Messung des Wärmeübergangskoeffizienten in der Wirbelschicht nach dem dynamischen Verfahren. Energieanwendung, Heft 6/1980.
- [4] Lorkiewicz Z., Puszer A.: Dynamiczna metoda pomiaru współczynnika wnikania ciepła w palenisku fluidalnym, PAK 10/1980.
- [5] Puszer A.: Praca doktorska. Politechnika Śląska, 1973.
- [6] Puszer A.: Model matematyczny dynamicznej metody pomiaru współczynnika wnikania ciepła. Sympozjum PTMTiS "Modelowanie w mechanice", Wisła marzec 1981.
- [7] Puszer A., Dunajewski J.: Sposób wyznaczania zastępczych stałych czasowych procesu suszenia w jego drugim okresie. Sympozjum PTMTiS "Modelowanie w mechanice", Wisła marzec 1981.
- [8] Puszer A.: Czas trwania stanu nieustalonego procesu dyfuzyjnego przy warunku brzegowym trzeciego rodzaju. Referat zgłoszony na XI Zjazd Termodynamików, Swinoujście wrzesień 1981.
- [9] Puszer A.: Badania współczynnika wyrównania temperatur metodą stanu nieustalonego. Referat wygłoszony na Seminarium Naukowym Instytutu Energetyki Paliwowej, Dąbrowa Górnicza marzec 1981.
- [10] Sikora R., Lipiński W.: Stała czasowa procesów dyfuzyjnych w walcu o skończonej długości. PAK 3/1975.

Wpłynęło do Redakcji w lipcu 1981

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Stefan Wiśniewski

ПОСТОЯННАЯ ВРЕМЕНИ ДИФУЗИОННЫХ ПРОЦЕССОВ В ЦИЛИНДРЕ КОНЕЧНОЙ ВЫСОТЫ

Резюме

Используя конечное интегральное преобразование, определена постоянная времени для диффузии тепла и массы в цилиндре конечной высоты при граничных условиях третьего рода. Показано практическое применение этой постоянной при расчете продолжительности неустановившихся состояний для диффузионных процессов, а также коэффициентов теплообмена и выравнивания температуры при применении динамического метода измерения.

A SUBSTITUTE TIME CONSTANT FOR DIFFUSION PROCESSES IN A CYLINDER OF FINITE HEIGHT

Summary

Using an integral transformation in a finite area, a substitute time constant for heat and mass diffusion in a cylinder of finite height with the boundary condition of the third sort has been defined. The practical usages of this constant in defining of duration of the transient state, and in defining the heat diffusion and heat penetration indices in the dynamic measurement method have been presented.