

Andrzej PUSZER,  
 Jacek DUNAJEWSKI,  
 Lesław MLECZKO

## SPOSÓB OKREŚLANIA CZASU TRWANIA STANU NIEUSTALONEGO W PROCESACH APERIODYCZNYCH

**Streszczenie:** Wykorzystując pojęcia statystyki matematycznej oraz metodę momentów opracowano prosty sposób określania czasu trwania stanu nieustalonego. Podano przykłady zastosowania dla obiektów opisanych zwyczajnym i cząstkowym równaniem różniczkowym. Przedstawiony sposób nie uwzględnia wpływu zakłóceń na czas trwania procesu.

### 1. WSTĘP

Odpowiedzi czasowe wielu obiektów regulacji przy wymuszeniu aperiodycznym opisywane są zależnością (1).

$$Y(t) = 1 - \sum_{i=1}^n C_i \exp\left(-\frac{t}{T_i}\right) \quad (1)$$

gdzie:

- $C_i$  - współczynniki liczbowe,
- $T_i$  - stałe czasowe,
- $t$  - czas,
- $Y(t)$  - bezwymiarowa, zredukowana wielkość wyjściowa.

Umiejętność oceny czasu trwania stanu nieustalonego jest ważna dla celów inżynierii procesowej i automatyki. Teoretycznie czas ten wg (1) jest nieskończenie długi. W związku z tym w praktyce do jego oceny stosuje się tzw. czasy charakterystyczne  $t_{0,9}$ ,  $t_{0,95}$  itp. Problem sprowadza się więc do poszukiwania funkcji odwrotnej do (1), która pozwoliłaby na określenie w prosty sposób czasu charakterystycznego, po upływie którego osiąga się założony poziom wielkości wyjściowej w stosunku do jej wartości ustalonej. W tym celu zastosowano metodę momentów [1], [2], [3], [4], [5], [6], [13].

## 2. METODA MOMENTÓW

Wykorzystując pojęcia statystyki matematycznej funkcję (1) potraktowano jako dystrybuantę rozkładu całkowitego czasu trwania stanu nieustalonego. Rozważany rozkład jest asymetryczny. Skorzystamy z pojęcia momentu rozkładu  $\mu_k$ .

$$\mu_k = \frac{1}{A_y} \int_0^{\infty} t^k y(t) dt, \quad (2)$$

gdzie:

$A_y$  - pole powierzchni zawartej pod krzywą gęstości rozkładu,  
 $y(t)$  - gęstość rozkładu całkowitego czasu trwania procesu

$$y(t) = \frac{dY(t)}{dt}.$$

Pierwszy moment rozkładu  $\mu_1 = E(t) = \bar{t}$  zwany jest często średnią stałą czasową. Jest on miarą powierzchni pola zawartego między asymptotą poziomą  $Y(\infty)$  i dystrybuantą  $Y(t)$ . Znajduje on zastosowanie w dynamicznych metodach pomiaru współczynników wnikania ciepła i masy, dyfuzyjności cieplnej i masowej [2], [3], [7], [8], [9], [11], [12], [13].

$$\bar{t} = \frac{1}{A_y} \int_0^{\infty} t y(t) dt = \frac{1}{A_y} \int_0^{\infty} [Y(\infty) - Y(t)] dt \quad (3)$$

Wariancja rozważanego rozkładu będzie:

$$\sigma^2 = \frac{1}{A_y} \int_0^{\infty} (t - \bar{t})^2 y(t) dt = \mu_2 - \bar{t}^2, \quad (4)$$

gdzie:

$\mu_2$  - drugi moment rozkładu wg (2).

Dla określenia czasu trwania stanu ustalonego procesu posłużono się czasem charakterystycznym tzw. fraktylem rozkładu  $t_g$ , który wg S. Brandta określa funkcję odwrotną do (1) [4].

$$t_g = \bar{t} + k_g \sigma, \quad (5)$$

przy czym

$$\sigma = Y(t_g) = \int_0^{t_g} y(t) dt, \quad (6)$$

gdzie:

$\varepsilon$  - poziom ufności,  $k_\varepsilon \in R_+$ ,

$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$  - dyspersja rozkładu.

Poziom ufności określa w rozważanym przypadku wartość wielkości wyjściowej odniesioną do stanu ustalonego po czasie  $t$  nie przekraczającym  $t_\varepsilon$ .

Gęstość rozkładu całkowitego czasu trwania stanu nieustalonego dla obiektów liniowych jest określona splotem rozkładów:

$$y(t) = \int_0^{\infty} g(\tau) x(t - \tau) d\tau, \quad (7)$$

gdzie:

$g(\tau)$  - odpowiedź impulsowa obiektu tzw. funkcja wagi,

$x(t)$  - gęstość rozkładu sygnału wejściowego  $X$ .

W zapisie operatorowym zależność (7) będzie:

$$y(s) = G(s) x(s), \quad (8)$$

gdzie:

$G(s)$  - transmitacja operatorowa,

$s$  - parametr całkowitego przekształcenia Laplace'a.

Ogólnie transformatę funkcji gęstości rozkładu można zdefiniować za pomocą momentów rozkładu 5 :

$$y(s) = A_y \left[ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-s)^k}{k!} \mu_k \right] \quad (9)$$

Znając transformatę funkcji gęstości rozkładu  $y(s)$  korzystniej jest w miejsce zależności (2) stosować wyznaczoną z (9) zależność (10).

$$\mu_k = (-1)^k \lim_{s \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{y(s)} \frac{\partial^k y(s)}{\partial s^k} \right] \quad (10)$$

Wykorzystując (9) do określenia  $G(s)$  i  $x(s)$  za pomocą momentów rozkładu i podstawiając do (8) otrzyma się

$$\hat{t}_y = \hat{t}_G + \hat{t}_x, \quad (11)$$

$$\sigma_y^2 = \sigma_G^2 + \sigma_x^2, \quad (12)$$

przy czym  $\hat{t}_G$  i  $\hat{t}_x$  wyznacza się z (10) dla  $k = 1$  podstawiając za  $y(s)$  odpowiednio  $G(s)$  i  $x(s)$ , natomiast wariancje  $\sigma_G^2$  i  $\sigma_x^2$  wyznacza się z zależności (4) i (10) dla  $k = 2$ .

Podstawiając (11) i (12) do (5) otrzyma się fraktyl rozkładu całkowitego czasu trwania stanu nieustalonego.

$$t_{\epsilon, y} = \hat{t}_G + \hat{t}_x + k_{\epsilon} \sqrt{\sigma_G^2 + \sigma_x^2} \quad (13)$$

Bardzo często transmitacja  $G(s)$  obiektu regulacji jest wymierną funkcją operatorową w postaci:

$$G(s) = \frac{\sum_{j=0}^m b_j s^j}{\sum_{i=0}^n a_i s^i} = \frac{b_0}{a_0} \frac{\prod_{j=1}^m (T_{b,j} s + 1)}{\prod_{i=1}^n (T_{a,i} s + 1)} \quad (14)$$

Pierwszy moment rozkładu  $\hat{t}_G$  i wariancja  $\sigma_G^2$  dla rozpatrywanego przypadku, wyznaczone z zależności (10) i (4) odpowiednio będą:

$$\hat{t}_G = \frac{a_1}{a_0} - \frac{b_1}{b_0} = \sum_{i=1}^n T_{a,i} - \sum_{j=1}^m T_{b,j} \quad (15a)$$

$$\sigma_G^2 = 2 \left( \frac{b_2}{b_0} - \frac{a_2}{a_0} \right) + \left( \frac{a_1}{a_0} \right)^2 - \left( \frac{b_1}{b_0} \right)^2 = \sum_{i=1}^n T_{a,i}^2 - \sum_{j=1}^m T_{b,j}^2 \quad (15b)$$

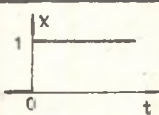
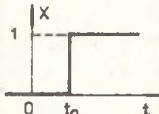
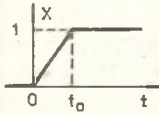
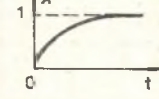
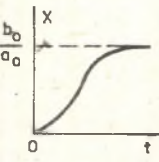
Zestawienie typowych sygnałów wejściowych i ich parametrów rozkładu przedstawiono w tabelicy 1.

### 3. OKREŚLENIE POZIOMU UFNOŚCI

Poziom ufności określa zależność (6), która jednak w praktycznych zastosowaniach jest kłopotliwa w obliczeniach ze względu na postać funkcji  $y(t)$ . Dla uproszczenia obliczeń kosztem niewielkiego pogorszenia dokładności szczególnie dla obiektów wyższego rzędu proponuje się wykorzystać rozkłady aproksymujące: dwuwykładniczy i znany w literaturze rozkład interwałów [10]. Funkcje gęstości tych rozkładów dane są odpowiednio zależnościami (16) i (17).



Tablica 1

Lp.	Transformata gęstości $x(s)$	Wykres dystrybuanty $X(t)$	Pierwszy moment rozkładu $\hat{t}_x$	Wariancja $\hat{\sigma}_G^2$
1	1		0	0
2	$\exp(-t_0 s)$		$t_0$	0
3	$\frac{1 - \exp(-t_0 s)}{s}$		$\frac{t_0}{2}$	$\frac{t_0^2}{12}$
4	$\frac{1}{Ts + 1}$		T	T <sup>2</sup>
5	$\frac{\sum_{j=0}^m b_j s^j}{\sum_{i=0}^n a_i s^i} = \frac{b_0 \prod_{j=1}^m (T_{bj} s + 1)}{a_0 \prod_{i=1}^n (T_{ai} s + 1)}$		$\frac{a_1}{a_0} - \frac{b_1}{b_0} = \sum_{i=1}^n T_{ai} - \sum_{j=1}^m T_{bj}$	$2\left(\frac{b_2}{b_0} - \frac{a_2}{a_0}\right) + \left(\frac{a_1}{a_0}\right)^2 - \left(\frac{b_1}{b_0}\right)^2 = \sum_{i=1}^n T_{ai}^2 - \sum_{j=1}^m T_{bj}^2$

$$y(t) = \frac{1}{(1 - \nu_1) T_1} \left[ \exp\left(-\frac{t}{T_1}\right) - \exp\left(-\frac{t}{\nu_1 T_1}\right) \right], \quad (16)$$

$$y(t) = \frac{1}{\nu_2!} \left(\frac{t}{T_2}\right)^{\nu_2} \exp\left(-\frac{t}{T_2}\right), \quad (17)$$

gdzie:

$T_1, T_2$  - stałe czasowe,  $\nu_1 \in [0, 1)$ ,  $\nu_2 \in \mathbb{N}$ .

Pierwszy moment i wariancja rozkładu (16) określone są zależnościami (18) i (19), a dla rozkładu (17) zależnościami (20) i (21)

$$\hat{t}_y = (1 + \nu_1) T_1 \quad (18)$$

$$\hat{\sigma}_y^2 = (1 + \nu_1^2) T_1^2 \quad (19)$$

$$\hat{t}_y = (1 + \nu_2) T_2 \quad (20)$$

$$\hat{\sigma}_y^2 = (1 + \nu_2) T_2^2 \quad (21)$$

Dla posługiwania się tymi rozkładami należy wyznaczyć  $\nu$  i  $T$  z układu równań (18) i (19) lub (20) i (21), które powstają z porównania parametrów rozkładu rzeczywistego. Z rozwiązania tych układów równań otrzymana się:

$$\nu_1 = \frac{1 - \eta \sqrt{2 - \eta^2}}{\eta^2 - 1} \quad (22)$$

$$\nu_2 = \eta^2 - 1 \quad (23)$$

gdzie:

$$\eta = \frac{\hat{t}_y}{\hat{\sigma}_y}$$

Zastosowanie jednego z dwu rozkładów aproksymujących wynika z ich definicji, a szczególnie z ograniczeń narzuconych na liczby  $\nu$ . W praktyce szersze zastosowanie może znaleźć rozkład (16). Praktyczny tego rozkładu wyznaczony z (5), (18) i (19) będzie:

$$t_{\varepsilon; y} = T_1 (1 + \nu_1 + k_{\varepsilon} \sqrt{1 + \nu_1^2}) \quad (24)$$

Podstawiając (16), (24) do (6) otrzymana się

$$1 - \varepsilon = \frac{1}{1 - \nu_1} \exp\left(-\frac{t_{\varepsilon; y}}{T_1}\right) - \frac{\nu_1}{1 - \nu_1} \exp\left(-\frac{t_{\varepsilon; y}}{\nu_1 T_1}\right) \quad (25)$$

Dla  $\varepsilon > 0,9$  drugi człon prawej strony równości (25) jest mniejszy od  $10^{-3}$ , a więc dla poziomów ufności określanych z dokładnością do trzech miejsc po przecinku można go pominąć. Stąd zależność do określenia wartości liczby  $k_\varepsilon$  będzie:

$$k_\varepsilon = - \frac{\ln \left[ (1 - \varepsilon) (1 - \nu_1) \right] + 1 + \nu_1}{\sqrt{1 + \nu_1^2}}, \quad (26)$$

a fraktyl rozkładu (czas charakterystyczny) wyrazi się zależnością (27).

$$t_{\varepsilon, Y} = \hat{t}_Y \frac{1 - \eta^2}{\eta(\eta - \sqrt{2 - \eta^2})} \ln \left[ (1 - \varepsilon) \frac{\eta^2 - 2 + \eta \sqrt{2 - \eta^2}}{\eta^2 - 1} \right] \quad (27)$$

Dla rozkładu interwałów wartości liczby  $k_\varepsilon$  należy wyznaczać drogą interakcyjną z dystrybuanty rozkładu.

#### 4. PRZYKŁADY ZASTOSOWANIA

Przykład 1. Dla obiektu regulacji o transmitacji

$$G(s) = \frac{5(35s + 1)}{(100s + 1)(50s + 1)(20s + 1)(10s + 1)}$$

należy wyznaczyć czasy charakterystyczne  $t_{0,99}$  i  $t_{0,999}$  przyjmując: a) wymuszanie skokowe, b) inercyjne pierwszego rzędu ze stałą czasową  $T_a = 300s$ . Wartości stałych czasowych transmitacji podane są w sekundach. Wyniki obliczeń przedstawiono w tabelicy 2. Z rezultatów tych wynika, że po czasie  $t$  nie przekraczającym 514,378 s wartość sygnału wyjściowego będzie 4,95, a po czasie nie przekraczającym 739,217 s,  $Y = 4,995$ . Dla wymuszenia inercyjnego natomiast dla  $t < 1520,423$  s,  $Y = 4,95$ , a dla  $t < 2117,951$  s,  $Y = 4,995$ .

Przykład 2. Długi pręt o średnicy 80 mm. ze stali manganowo-niklowej chłodzony jest powietrzem, którego temperatura ma wartość 293 K. Pręt nagrzany jest do temperatury 573 K. Zakłada się, że dla  $t = 0$  pole temperaturowe w objętości pręta jest stałe. Należy określić czas potrzebny do osiągnięcia stanu ustalonego w osi pręta przy poziomie ufności  $\varepsilon = 0,995$  przyjmując skokową zmianę temperatury powietrza. Właściwości termofizyczne stali:  $\bar{\lambda} = 15,12 \frac{W}{m \cdot K}$ ,  $\bar{a} = 3,935 \cdot 10^{-6} m^2/s$ . Średnia wartość współczynnika wnikania ciepła wynosi  $\bar{\alpha} = 75,6 W/m^2 \cdot K$ .

Tablica 2

Lp.	Wielkość	Wymiar	Nr zal.	$X = 1 (t)$	$X = 1 - \exp(-\frac{t}{300})$
1	$\hat{t}_G$	s	15a		145
2	$\hat{\sigma}_G^2$	s <sup>2</sup>	15b		1775
3	$\hat{\sigma}_G$	s	-		108,513
4	$\hat{t}_x$	s	10	0	300
5	$\hat{\sigma}_x^2$	s <sup>2</sup>	10,4	0	90000
6	$\hat{t}_y$	s	11	145	445
7	$\hat{\sigma}_y^2$	s <sup>2</sup>	12	11775	101775
8	y	s	-	108,513	319,022
9	$\hat{\eta} = \frac{\hat{t}_y}{\hat{\sigma}_y}$	-	-	1,336	1,395
10	$\eta_1$	-	22	0,485	0,714
11	$t_{0,990}$	s	27	514,378	1520,423
12	$t_{0,999}$	s	27	739,217	2117,951

Rozpatrywany przypadek dotyczy dyfuzji cieplnej opisywanej równaniem Fouriera-Kirchhoffa z warunkiem brzegowym 3 rodzaju. Rozwiązanie tego równania przy założeniu nieskończonej długości pręta i symetrii osiowej pola temperaturowego będzie [12]:

$$G(\xi, s) = \frac{\Theta(\xi, s)}{v^{\eta}(s)} = \frac{Bi I_0(\beta \cdot \xi)}{\beta I_1(\beta) + Bi I_0(\beta)}$$



gdzie:

$$\begin{aligned}
 Bi &= \frac{\alpha R}{\lambda} && - \text{liczba Biota,} \\
 I_0, I_1 &&& - \text{zmodyfikowane funkcje Bessela, } \beta = R \sqrt{\frac{s}{a}}, \quad \xi = \frac{r}{R}, \\
 R &&& - \text{promień pręta,} \\
 \Theta, \vartheta &&& - \text{zredukowane, bezywymiarowe temperatury pręta i powietrza.}
 \end{aligned}$$

Pierwszy moment rozkładu i wariancja transmitancji  $G(\xi, s)$  odpowiednio będą [12], [13]:

$$\hat{t}_G = \frac{R^2}{4a} \left( 1 + \frac{2}{Bi} - \xi^2 \right)$$

$$\sigma_G^2 = \left( \frac{R^2}{4a} \right)^2 \left[ \frac{4}{Bi} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{Bi} \right) + \frac{1}{2} (1 - \xi^4) \right]$$

Z danych liczbowych wynika, że  $Bi = 0,2$  i  $\xi = 0$ , stąd

$$\hat{t}_y = \hat{t}_G = 1118,17 \text{ s}$$

$$\sigma_y^2 = \sigma_G^2 = 1141810,8 \text{ s}^2, \quad \sigma_y = 1068,556 \text{ s}$$

$$\hat{\sigma} = \frac{\hat{t}_y}{\sigma_y} = 1,046$$

Podstawiając  $\hat{\sigma} = 1,046$ ,  $\hat{t}_y = 1118,17 \text{ s}$  i  $\xi = 0,995$  do (27) otrzyma się:  
 $t_{0,995} = 5709,19 \text{ s} = 1,586 \text{ h}$ .

Z rezultatów obliczeń wynika, że po czasie nie przekraczającym 1,586 h temperatura w osi pręta będzie miała wartość 294,4 K. Z porównania uzyskanego rezultatu z danymi literaturowymi [14] wynika, że błąd przedstawionej metody nie przekracza 0,5 %.

#### LITERATURA

- [1] Bischoff K.B., Levenspiel O.: Chem.Eng.Sci. 17, 245 (1962).
- [2] Błasiński H., Krauze S., Kaźmierczak J.: Inż.Chem.i Proc. 4, 683 (1980).
- [3] Błasiński H., Tyezkowski A., Krauze S.: Inż.Chem.i Proc. 4, 691 (1980).
- [4] Brandt S.: Metody statystyczne i obliczeniowe analizy danych. PWN, Warszawa 1976.
- [5] Douglas J.M.: Dynamika i sterowanie procesów. WNT, Warszawa t.I, 1976.
- [6] Lipatow L.N.: Typowe procesy w technologii chemicznej jako obiekty sterowania. WNT, Warszawa 1977.
- [7] Lorkiewicz Z., Puszer A.: Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Energetyka 74, 91 (1979).

- [8] Lorkiewicz Z., Puszer A.: PAK 10, 343 (1980).
- [9] Lorkiewicz Z., Puszer A.: Energieandwendung 6, 209, (1980).
- [10] Łukaszek W.: Podstawy statystycznego opracowania pomiarów. Skrypt Politechniki Śląskiej nr 257, Gliwice 1975.
- [11] Puszer A., Dunajewski J.: Sposób wyznaczenia zastępczych stałych czasowych procesu suszenia w jego drugim okresie. Symposium PTMTiS "Modelowanie w mechanice", Wisła, marzec 1981.
- [12] Puszer A.: Model matematyczny dynamicznej metody pomiaru współczynnika wnikania ciepła. Symposium PTMTiS "Modelowanie w mechanice", Wisła, marzec 1981.
- [13] Puszer A.: Badania współczynnika wyrównania temperatur metodą stanu nieustalonego. Referat na Seminarium Naukowym Instytutu Energetyki Paliwowej, marzec 1981 (niepublikowany).
- [14] Wiśniewski S.: Wymiana ciepła. PWN, Warszawa 1979.

Wpłynęło do Redakcji w lipcu 1981

Recenzent: Doc dr hab. inż. Bohdan Chorowski

МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОСТИ НЕУСТАНОВИВШЕГОСЯ СОСТОЯНИЯ В СТАТИЧЕСКИХ НЕПЕРИОДИЧЕСКИХ ОБЪЕКТАХ

Р а з у м е

Используя понятия математической статистики и метод моментов, представлен простой способ определения продолжительности неустановившегося состояния. Показаны примеры использования этого способа для объектов, динамические свойства которых даны обыкновенными и с частными производными дифференциальными уравнениями. Метод не учитывает влияния помех на продолжительность процесса.

A METHOD OF DEFINING DURATION OF THE TRANSIENT STATE IN APERIODIC PROCESSES

S u m m a r y

Using the notions of mathematical statistics and the method of moments, a simple method of defining duration of the transient state has been worked out. The examples of utilization for objects described by partial and ordinary differential equations have been presented. The method shown does not take the influence of disturbances on duration of the process into consideration.