ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1982
Seria: ENERGETYKA z. 80 Nr kol. 715

Janusz SKOREK

METODA RÓŻNICOWA OBLICZANIA USTALONYCH PÓL TEMPERATURY W OBSZARACH RUCHOMYCH

Streszczenie: Jednym z praktycznych zagadnień przepływu ciepła jest wyznaczenie ustalonego pola temperatury w obszarach ruchomych (np. piece obrotowe, ciągłe odlewanie metali itp.). Do rozwiązania tych problemów często stosuje się metody różnicowe. Zastosowanie równań różnicowych w postaci klasycznej może jednak prowadzić do nonsensownych wyników, jeżeli rozmiary elementów różnicowych są większe od pewnej bardzo małej wartości. W takich przypadkach równania te są nieprzydatne do praktycznych obliczeń.

W pracy przedstawiono zmodyfikowaną postać równań różnicowych. Dokonano analizy stosowalności i dokładności opracowanej metody.

1. WSTĘP

Przy analizie zjawisk związanych z przepływem substancji często zachodzi konieczność wyznaczania pól temperatury w poruszających się obszarach. Problemy takie występują np. przy wyznaczaniu pól temperatury w piecach obrotowych lub we wlewkach odlewanych metodami ciągłymi.

Równania różniczkowe pola temperatury w obszarach ruchomych są zazwyczaj typu parabolicznego, opisują bowiem stan nieustalony. Często jednak po dostatecznie długim czasie trwania zjawiska otrzymuje się w nieruchomym układzie współrzędnych rozkład temperatury zbliżony do ustalonego. Można więc przyjąć, że temperatura w dowolnym punkcie obszaru przemieszczającego się przez nieruchomy układ współrzędnych nie zmienia się w czasie.

Wyznaczenie pola temperatury w omawianych przypadkach jest zazwyczaj zagadnieniem dość trudnym. Skomplikowany kształt obszaru, występowanie złożonych i często nieliniowych warunków brzegowych lub występowanie nieciągłości gradientów temperatury (np. zmiana fazy) wykluczają praktycznie możliwość uzyskania rozwiązania w postaci analitycznej.

W związku z tym coraz szerzej są stosowane metody przybliżone. Metody te pozwalają wyraźnie ograniczyć liczbę założeń upraszczających, a jednocześnie dają stosunkowo dużą dokładność rozwiązania.

Wśród wielu metod przybliżonych stosowanych do rozwiązywania złożonych zagadnień przepływu ciepła na szczególną uwagę zasługuje metoda bilansów elementarnych.

W metodzie bilansów elementarnych równania różnicowe wyprowadza się z równań bilansu energii dla wyodrębnionych podobszarów - elementów różnicowych.

W pracy przedstawiono sposoby formułowania zapisu równań różnicowych ustalonego pola temperatury w obszarach ruchomych w oparciu o metodę elementarnych bilansów energii.

2. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

Równanie różniczkowe opisujące ustalone pole temperatury w obszarze przemieszczającym się przez nieruchomy układ współrzędnych ma postać:

$$\nabla^2 T - \frac{\bar{w}}{a} \nabla T = 0 , \tag{1}$$

gdzie:

$\bar{w}$ - wektor prędkości,

a - współczynnik wyrównywania temperatury.

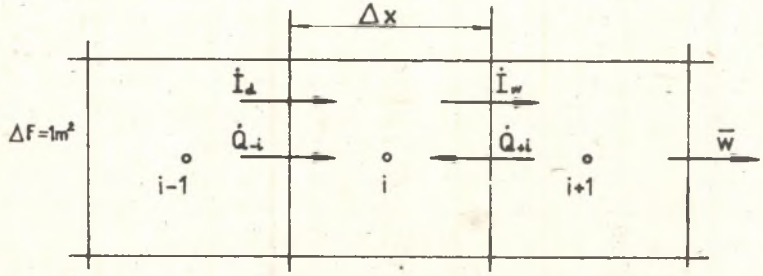
Zazwyczaj układ współrzędnych przyjmuje się w ten sposób, że wektor prędkości $\bar{w}$ jest równoległy do jednej z osi układu.

Dla uproszczenia przyjęto do rozważań zagadnienie jednowymiarowe. Pozwala to wyeliminow- -pływ przewodzenia ciepła w kierunkach prostopadłych do wektora prędkoś .

Równanie (1) ma w tym przypadku postać:

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{w}{a}\frac{dT}{dx} = 0 . \tag{2}$$

Zastosowanie metody różnicowej wymaga podziału obszaru rozwiązania na elementy różnicowe (rysunek 1).



Rys. 1. Schemat podziału różnicowego dla zagadnienia jednowymiarowego

Równanie bilansu energii dla i-tego elementu różnicowego ma postać:

$$\dot{Q}_{-i} + \dot{Q}_{+i} + \dot{I}_d - \dot{I}_w = 0 , \tag{3}$$

gdzie:

$\dot{Q}_{-i}$, $\dot{Q}_{+i}$ - strumienie ciepła dopływające do elementu przez powierzchnie boczne,

$\dot{I}_d$, $\dot{I}_w$ - strumienie entalpii dopływającej i wypływającej z elementu wraz ze strumieniem substancji.

W klasycznym ujęciu przyjmuje się, że strumienie entalpii $\dot{I}_d$ i $\dot{I}_w$ są proporcjonalne do temperatur na brzegach elementu różnicowego

$$\dot{I}_d = \frac{1}{2} \rho \, c_p w \, F(T_{i-1} + T_i) , \tag{4a}$$

$$\dot{I}_w = \frac{1}{2} \rho \, c_p w \, F(T_{i+1} + T_i),$$

gdzie:

ρ - gęstość,

c_p - ciepło właściwe,

F - pole powierzchni bocznej elementu różnicowego.

Strumienie ciepła przewodzonego oblicza się ze wzoru

$$\dot{Q}_{\pm i} = \frac{\lambda}{\Delta x} F \, (T_i - T_{i\pm1}) \tag{5}$$

Przyjmując $F = 1m^2$ oraz równomierny podział różnicowy (Δx = idem), można przekształcić równanie (3) do postaci:

$$\frac{1}{2} (1 + \frac{1}{2}\gamma) \, T_{i-1} + \frac{1}{2} (1 - \frac{1}{2}\gamma) \, T_{i+1} = T_i \tag{6}$$

Bezwymiarowa wielkość γ jest określona wzorem:

$$\gamma = \frac{w}{a} \Delta x \tag{7}$$

Równania różnicowe (6) zapisane dla wszystkich elementów różnicowych tworzą wraz z równaniami warunków brzegowych układ równań w postaci:

$$\mathbf{A}\mathbf{T} = \mathbf{B} \tag{8}$$

gdzie:

$\mathbf{A}$ - kwadratowa, pasmowa i niesymetryczna macierz współczynników (elementy na głównej przekątnej są równe jedności),

$\mathbf{T}$, $\mathbf{B}$ - wektory kolumnowe.

W przypadku gdy do rozwiązania układu równań stosuje się metody dokładne (eliminacji Gaussa, odwracanie macierzy itp.), to rozwiązanie powinno istnieć i być jednoznaczne. Obliczenia przeprowadzone dla konkretnych zagadnień wykazują jednak, że często otrzymuje się wyniki obarczone zbyt dużymi błędami lub wręcz pozbawione sensu fizycznego. W dalszej części pracy dokonano analizy źródeł występowania błędów w obliczeniach numerycznych.

3. ANALIZA DOKŁADNOŚCI RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH

Dokładność rozwiązania uzyskanego przy zastosowaniu metody różniczkowej zależy od licznych czynników. Decydujący wpływ na wielkość błędów rozwiązania ma postać równań różnicowych i dokładność aproksymacji równań różniczkowych. Dodatkowym źródłem niedokładności są też błędy wynikające z rozwiązania układu równań różnicowych (8). Błędy te wynikają z zaokrągleń dokonywanych podczas operacji arytmetycznych lub z tzw. słabego uwarunkowania macierzy współczynników (macierz **A** w równaniu (8)).

Błędy zaokrągleń pojawiają się najczęściej przy rozwiązywaniu dużych układów równań i są spowodowane niewystarczającą dokładnością maszyny cyfrowej. Obliczenia przeprowadzone z dwukrotnie większą dokładnością (w tzw. podwójnej precyzji) wykazują jednak, że nie uzyskuje się zwiększenia dokładności rozwiązania.

Przeprowadzono również analizę stopnia uwarunkowania układu równań (8). Z obliczeń wynika, że w analizowanych przypadkach ($\varphi \in [0{,}05;\ 500]$) układy równań są dobrze uwarunkowane. Oznacza to, że ewentualne błędy w określeniu współczynników macierzy **A** nie mogą być przyczyną powstania dużych błędów w rozwiązaniu układu równań (8).

Podstawowe źródła powstawania nadmiernych błędów należy więc poszukiwać w zapisie równań różnicowych i dokładności aproksymacji zagadnienia brzegowego równaniami różnicowymi.

W pracy [3] wykazano, że rozpatrywane równania różnicowe mogą być stosowane jedynie przy pewnych ograniczeniach narzuconych na rozmiary elementów zwiększa dokładność aprokymacji (przy założeniu, że schemat różnicowy jest zbieżny), lecz może prowadzić do tak dużej liczby równań różnicowych, że wykonanie obliczeń na EMC staje się praktycznie niemożliwe.

Oceny przydatności równań różnicowych można dokonać za pomocą metody zaproponowanej przez Szarguta [3]. Zgodnie z tą metodą postać równania różnicowego jest poprawna pod względem fizycznym, jeżeli współczynniki występujące w tym równaniu przy temperaturach w węzłach elementów sąsiadujących z elementem rozpatrywanym są nieujemne.
Dla równania (6) warunek ten jest następujący:

$$1 - \frac{1}{2} j \geq 0 \tag{9}$$

Stąd:

$$\Delta x \leqslant \frac{2}{\frac{w}{a}} \tag{10}$$

W licznych zagadnieniach praktycznych (np. obliczenia ustalonego pola temperatury w piecach obrotowych lub wlewkach odlewanych metodami ciągłymi) spełnienie warunku (10) prowadzi do nadmiernego ograniczenia rozmiarów elementów różnicowych (np. $\Delta x \leqslant 5.10^{-6}$m [2]). W takich przypadkach stosowanie równań (6) jest nieuzasadnione ze względu na ograniczone możliwości przeprowadzenia obliczeń na EMC.

W literaturze spotyka się odmienne sformułowania równań różnicowych ustalonego pola temperatury w obszarach ruchowych np. [3]. Równania te są zazwyczaj dostosowane w sposób szczegółowy do rozwiązywanego zagadnienia i możliwość ich praktycznych zastosowań ogranicza się do pewnych zakresów stosunku $\frac{w}{a}$. Celowe jest więc opracowanie takiej postaci równań różnicowych, aby dla dowolnej wartości $\frac{w}{a}$ było możliwe uzyskanie stosunkowo dokładnego rozwiązania bez potrzeby nadmiernego zmniejszania rozmiarów elementów różnicowych.

4. RÓWNANIA RÓŻNICOWE W POSTACI ZMODYFIKOWANEJ

W klasycznym ujęciu strumienie entalpii występujące w równaniu bilansu energii (3) oblicza się dla temperatur na granicach elementu różnicowego. Temperatury na granicach elementu wynikają z liniowej interpolacji temperatur w węzłach sąsiadujących elementów.

Proponowana modyfikacja postaci równań różnicowych polega na odmiennym sposobie obliczania strumieni entalpii $\dot{I}_d$ oraz $\dot{I}_w$.

$$\dot{I}_d = \rho\, w\, c_p\, F \left[T_{i-1}(1-p) + p\, T_i\right] \tag{11a}$$

$$\dot{I}_w = \rho\, w\, c_p\, F \left[(1-p)\, T_i + p\, T_{i+1}\right] \tag{11b}$$

gdzie:

p - parametr ($p \in [0,1]$).

W przypadku gdy $p = 0,5$, zależność (11a) i (11b) mają identyczną postać jak (4a) i (4b).

Po podstawieniu zależności (11a) i (11b) do równania bilansu energii (3) otrzymuje się zmodyfikowane równanie różnicowe określające temperaturę w węźle elementu

$$T_{i-1}\left[1 + \gamma\,(1 - p)\right] + T_{i+1}\,(1 - \gamma\, p) = T_i\left[2 + \gamma\,(1 - 2p)\right] \tag{12}$$

Bezwymiarowa wielkość ϑ jest określona zależnością (7). Przyjęcie wartości parametru p różnej od 0,5 oznacza, że strumienie entalpii $\dot{I}_d$ i $\dot{I}_w$ nie są obliczone na granicy elementu różnicowego, lecz w punktach przesuniętych o wartość

$$\delta = \frac{\Delta x}{2}(p - 0,5). \tag{13}$$

Równanie różnicowe (12) jest poprawne pod względem fizycznym wtedy, gdy jest spełniony warunek

$$1 - \vartheta p \geqslant 0 \tag{14}$$

Wynika stąd warunek na dopuszczalną wielkość rozmiaru elementu różnicowego (przy zadanej wartości w/a)

$$x \leqslant \frac{1}{p\frac{w}{a}} \tag{15}$$

Z zależności (15) wynika, że zastosowanie równań różnicowych (12) pozwala dowolnie zmieniać dopuszczalną wartość Δx poprzez przyjęcie odpowiedniej wartości parametru p. Jest to szczególnie korzystne, gdy ϑ ma dużą wartość, przy czym za dużą wartość można uznać $\vartheta > 2$. Wykorzystując w obliczeniach równania (12) można więc przyjmować dowolnie wartość Δx, przy czym parametr p musi wtedy spełniać warunek

$$p \leqslant \frac{1}{\Delta x\frac{w}{a}} \tag{16}$$

W przypadku bardzo dużych wartości w/a dopuszczalna wartość parametru p zbliża się do zera, co odpowiada (dla p = 0) aproksymacji pochodnej pierwszego rzędu w równaniu (1) ilorazem różnicowych wstecznym.

Stosowanie wartości $p > 0,5$ nie jest uzasadnione, gdyż powoduje to zmniejszenie dopuszczalnej wartości rozmiaru Δx. Ponadto (jak wykazały obliczenia) rozwiązanie jest obarczone większym błędem, aniżeli w przypadku zastosowania równań różnicowych w postaci klasycznej, tzn. dla p = 0,5. Równania różnicowe (12) mogą być stosowane również w zagadnieniach wielowymiarowych. W oparciu o te właśnie równania opracowano modele matematyczne pola temperatury i przebiegu krzepnięcia wlewków w procesach ciągłego odlewania [1], [4]. Otrzymane rozwiązania są dość dokładne (co potwierdzają badania eksperymentalne), przy niewspółmiernie małym czasie obliczeń na EMC w porównaniu z wariantami, w których stosowano równania różnicowe w postaci klasycznej (6). Wynika to z możliwości znacznego zmniejszenia liczby elementów różnicowych, a co za tym idzie liczby równań różnicowych.

Zaproponowana metoda została również sprowadzona dla prostych zagadnień jedno- i dwuwymiarowych, gdzie istniała możliwość skonfrontowania uzyskanych wyników z dokładnymi rozwiązaniami analitycznymi. Otrzymane wyniki potwierdziły przydatność stosowania zmodyfikowanych równań różnicowych (12) w omawianej klasie zagadnień przepływu ciepła.

5. ANALIZA DOKŁADNOŚCI. PRZYKŁADY LICZBOWE

Ocena dokładności jest ważnym i jednocześnie jednym z trudniejszych elementów teorii równań różnicowych. Trudność ta wynika głównie stąd, że metody różnicowe stosuje się wtedy, gdy nie jest możliwe uzyskanie rozwiązań dokładnych analitycznych. Z tego też względu dość często dokonuje się oceny dokładności metod różnicowych dla prostych zagadnień i ekstrapoluje uzyskane wyniki na zagadnienia złożone.

Zastosowanie równań różnicowych (12) pozwala, przy tej samej wartości γ, przyjmować praktycznie dowolne rozmiary elementów różnicowych poprzez dobór odpowiednich wartości parametru p. Należy jednak sprawdzić jaki jest wpływ takiego postępowania na wielkość błędów rozwiązania.

Analizy dokładności równań różnicowych (12) dokonano dla prostego jednowymiarowego zagadnienia ustalonego pola temperatury w obszarze o długości L poruszającego się z prędkością w. Mimo swej prostoty przyjęcie do analizy dokładności zagadnienia jednowymiarowego ma swoje uzasadnienie. W takim bowiem przypadku nie istnieje oddziaływanie innych brzegów obszaru na pole temperatury i błędy rozwiązania.

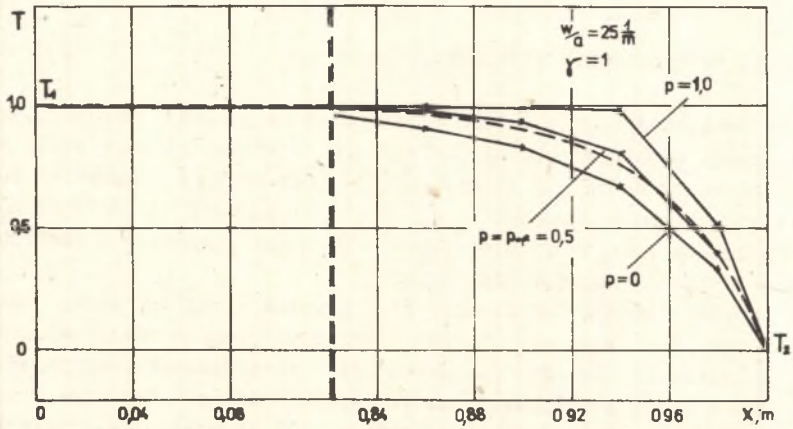
Rozważono przykład z dwoma warunkami brzegowymi I rodzaju. Przyjęto L=1 m i stały rozmiar elementu różnicowego $\Delta x = 0{,}04$ m. Obliczenia przeprowadzono dla różnych wartości γ oraz parametru p. W każdym analizowanym przypadku układ równań różnicowych rozwiązywano na EMC metodą eliminacji Gaussa. W tablicy 1 zestawiono na podstawie warunku (15) dopuszczalne maksymalne wartości rozmiaru elementu różnicowego Δx_{max} dla każdego analizowanego przypadku.

Tablica 1

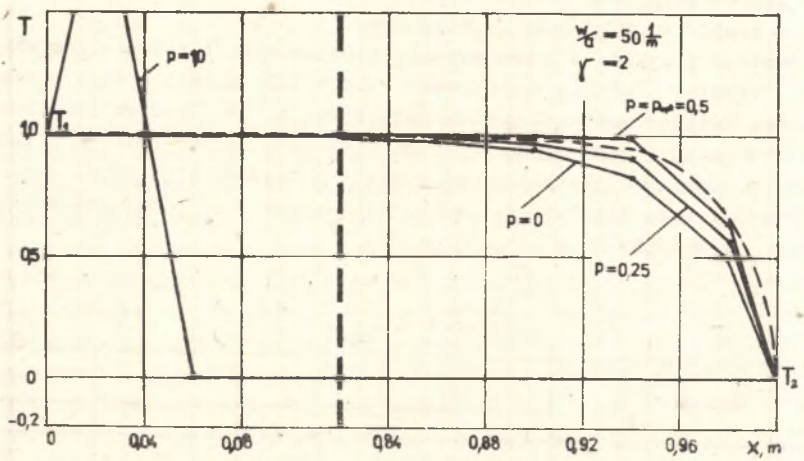
Wartość Δx_{max}, m

p \ $\frac{w}{a}$, $\frac{1}{m}$ / γ	25	50	100	1000
	1	2	4	40
0.0	∞	∞	∞	∞
0.25	0.16	0.08	0.04	0.004
0.5	0.08	0.04	0.02	0.002
1.0	0.04	0.02	0.01	0.001

Przyjęto temperatury brzegowe: $T_1 = 1$, $T_2 = 0$.
Na rysunkach (2, 3, 4, 5) przedstawiono otrzymane rozkłady temperatury odpowiadające poszczególnym wariantom obliczeniowym oraz rozwiązanie analityczne (linia przerywana).

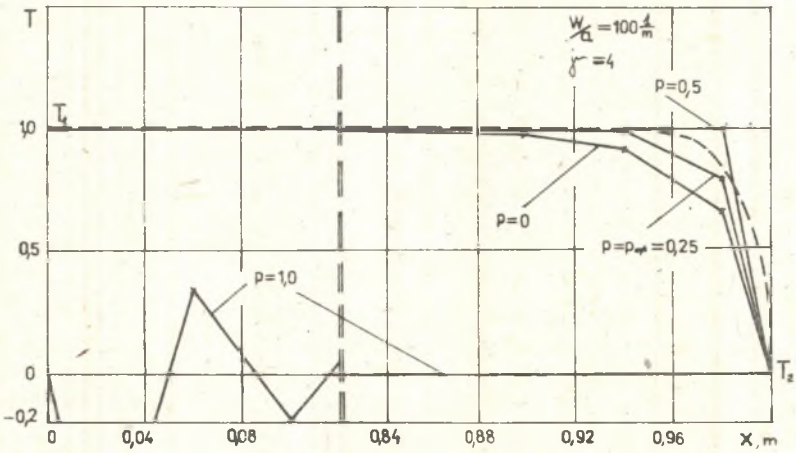


Rys. 2. Rozkład temperatury w obszarze jednowymiarowym,
$\gamma = 1$, $(\frac{w}{a} = 25\ \frac{1}{m})$

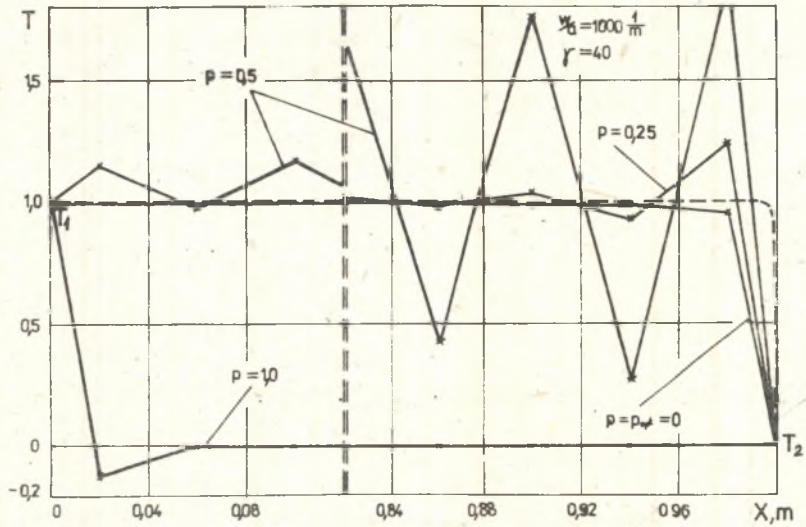


Rys. 3. Rozkład temperatury w obszarze jednowymiarowym,
$\gamma = 2$, $(\frac{w}{a} = 50\ \frac{1}{m})$

Z przedstawionych rysunków wynika szereg prawidłowości. Wielkość błędu rozwiązania numerycznego przy zastosowaniu równań różnicowych (12) zależy od wartości γ i parametru p.



Rys. 4. Rozkład temperatury w obszarze jednowymiarowym, $\gamma = 4$, $(\frac{w}{a} = 100\ \frac{1}{m})$



Rys. 5. Rozkład temperatury w obszarze jednowymiarowym, $\gamma = 40$, $(\frac{w}{a} = 1000\ \frac{1}{m})$

Jeżeli $\Delta x > \Delta x_{max}$, rozwiązania są nonsensowne pod względem fizycznym i nie mogą być brane pod uwagę przy ocenie dokładności. Są jednak ilustracją konsekwencji wynikających z niespełnienia przez równania różnicowe warunku fizycznej dokładności.

Przy ustalonej wartości w/a i spełnieniu warunku $\Delta x \leqslant \Delta x_{max}$ najdokładniejsze rozwiązanie uzyskuje się dla parametru p najbliższego wartości 0,5 np. w/a = 50 i p = 0,5, w/a = 100 i p = 0,2.

Dla bardzo dużych wartości w/a np. w/a $\geqslant$ 1000 poprawne rozwiązanie uzyskuje się jedynie dla wartości $p \approx 0$.

Dla ustalonej wartości parametru p i rozmiaru Δx błąd rozwiązania zwiększa się wraz ze zwiększeniem stosunku w/a, przy czym dla w/a $> 10^3$ (obliczenia wykonano dla w/a = 10^4 i 10^6) błąd ulega zmniejszeniu. Oczywiście w tych przypadkach należy stosować parametr p bliski lub równy zero.

Stosowane $p > 0,5$ jest nieuzasadnione, gdyż w każdym przypadku uzyskuje się błędy większe aniżeli w przypadku $p \leqslant 0,5$.

Z przedstawionych przykładów wynika, że zastosowanie równań różnicowych (12) daje stosunkowo dokładne wyniki. Zaproponowana metoda jest szczególnie przydatna do rozwiązywania zagadnień, dla których stosunek w/a jest duży. Dokładność rozwiązania można oczywiście zawsze zwiększyć zmniejszając rozmiary elementów różnicowych (w granicach uzasadnionych możliwościami obliczeniowymi).

Dla elementów brzegowych należy konsekwentnie stosować te same równania różnicowe, co dla elementów wewnętrznych obszaru. W miarę możliwości należy zwiększać dokładność równań różnicowych elementów brzegowych poprzez zagęszczanie podziału różnicowego w pobliżu granicy obszaru. Jeżeli bowiem rozmiary elementu brzegowego są zbyt duże, to pomimo tego że obliczona wartość temperatury w węźle elementu jest dość dokładna, zostaje utracona informacja o rozkładzie temperatury pomiędzy węzłem elementu a granicą obszaru. Szczególnie wyraźnie jest to widoczne, gdy stosunek w/a jest duży (rysunek 3, 4, 5).

6. WNIOSKI

Z przeprowadzonych analiz wynika kilka wniosków dotyczących stosowania zaproponowanej zmodyfikowanej postaci równań różnicowych (12) do wyznaczania ustalonych pól temperatury w obszarach ruchomych.

- Zaproponowana metoda pozwala wydatnie zmniejszyć liczbę równań różnicowych poprzez przyjmowanie praktycznie dowolnych rozmiarów elementów różnicowych. Ma to szczególne znaczenie przy rozwiązywaniu zagadnień, dla których stosunek w/a ma wartość dużą.
- Zastosowanie równań różnicowych (12) pozwala osiągnąć stosunkowo dużą dokładność rozwiązania.
- W przypadku gdy warunek (15) nie jest spełniony, rozwiązanie układu równań różnicowych prowadzi do wyników obarczonych niedopuszczalnym błędem (pozbawionych sensu fizycznego).

- W przypadku gdy rozmiary elementów różnicowych są narzucone lub wynikają z możliwości obliczeniowych należy tak dobrać wartość parametru p, aby był spełniony warunek (15). W miarę możliwości należy dążyć do tego, aby parametr p był równy 0,5 lub możliwie najbliższy tej wartości.
- Równanie różnicowe w postaci zmodyfikowanej spełniają warunek zbieżności. Oznacza to, że zmniejszenie rozmiarów elementów różnicowych prowadzi do zwiększenia dokładności aproksymacji, a tym samym do zwiększenia dokładności rozwiązania.
- Zmiana parametru p prowadzi do zmiany rzędu aproksymacji równania różniczkowego. Dla p = 0,5 rząd aproksymacji wynosi 2, a dla $p \neq 0,5$ wynosi 1.

LITERATURA

[1] Skorek J.: Model matematyczny pola temperatury w procesie ciągłego odlewania miedzi. Praca doktorska. Gliwice 1976.

[2] Szargut J.: Równania różnicowe ustalonego pola temperatur w obracających się piecach i walcach. Archiwum Hutnictwa. Zeszyt 2. 1972.

[3] Szargut J.: Metody numeryczne w obliczeniach cieplnych pieców przemysłowych. Wyd. Śląsk, Katowice 1977.

[4] Szargut J., Skorek J.: Model matematyczny pola temperatury w procesie ciągłego odlewania wlewków płaskich. Praca badawcza nie publikowana, Gliwice 1977.

Wpłynęło do Redakcji w kwietniu 1981

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Eugeniusz Kalinowski

РАЗНОСТНЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА УСТАНОВИВШЕГОСЯ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ В ДВИЖУЩИХСЯ ТЕЛАХ

Р е з ю м е

Одним из практических проблем теплообмена является расчет стационарного распределения температуры в движущихся телах (вращающиеся печи, непрерывная отливка металлов). Для решения этих задач часто используется метод конечных разностей. Применение разностных уравнений в классическом виде может привести к ошибочным результатам если величина разностных клеток превышает очень малое граничное значение. В таких случаях эти уравнения не годятся для практических расчетов. В работе представлены модифицированные разностные уравнения и анализ использования и точности разработнго метода.

THE DIFFERENTIAL METHOD OF CALCULATING FIXED TEMPERATURE FIELDS IN MOVABLE AREAS

S u m m a r y

One of the practical problems in heat flow is defining the fixed temperature field in movable areas (ie rotary furnaces, constant metal casting, etc.). Very oftem the differential methods are used in solving these problems. The utilization of differential equations in their classical form may, however, lead to solutions having no sense, if the dimensions of differential objects are vigger than a certain very small value. In such cases these equations are useless in practical calculations.

The paper presents a modified form of differential equations and analyses the usability and precision of the worked out method.