

Grzegorz PAKUŁA

## DYNAMIKA BELKI PODDANEJ WYMUSZENIU KINEMATYCZNEMU

**Streszczenie.** W czasie ruchu wymuszonego belki powstaje pole przyspieszeń związanych z odkształceniami. Jest ono źródłem sił bezwładności stanowiących dodatkowe obciążenie. Rozwiązując równanie drgań giętych belki z uwzględnieniem tłumienia według modelu Voigta uzyskuje się wzór opisujący pole przyspieszeń w postaci szybkozbieżnego szeregu. Dodatkowy moment zginający, pochodzący od sił bezwładności związanych z odkształcalnością belki, dany jest również w postaci szeregu harmonicznego, których amplitudy maleją ze wzrostem  $n$  jak  $\frac{1}{n^5}$ .

Rozpatrzmy belkę dwuprzegubową o rozpiętości  $L$ , sztywności na zginanie  $EJ$ , przekroju poprzecznym  $S$ , wykonaną z materiału o gęstości  $\rho$ , będącą pod obciążeniem ciągłym o natężeniu  $q(x)$ . Prawy koniec poddany jest wymuszeniu kinematycznemu. Jego ruch można opisać wzorem:

$$y(L, t) = C \sin \Omega t \quad (1)$$

W czasie wymuszonego ruchu belki występują ugięcia, które można opisać funkcją  $y(x, t)$ . Pojawia się pole przyspieszeń związanych z odkształceniami belki. Występują więc siły bezwładności stanowiące dodatkowe obciążenie. W związku z tym obciążenie ciągłe belki można wyrazić następująco:

$$q_1(x, t) = q(x) + \ddot{y} \rho_m \quad (2)$$

gdzie:

$\rho_m = \rho S$  - masa jednostki długości belki wraz z obciążeniem,

$$\ddot{y} = \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} .$$

Z warunków równowagi belki (rys. 1):

$$R_A + R_B = \int_0^L q_1 dx \quad (3)$$

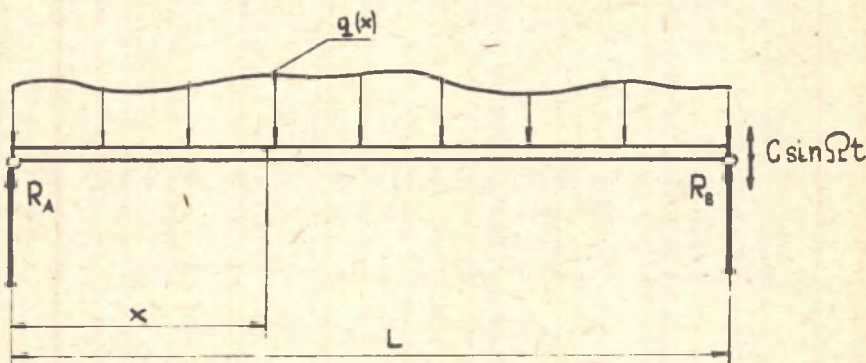
$$R_B L = \int_0^L q_1 x dx \quad (4)$$

wynika:

$$R_A(t) = \int_0^L q_1(x,t) dx - \frac{1}{L} \int_0^L q_1(x,t) x dx \quad (5)$$

Moment zginający w przekroju odległym o  $x$  od lewego końca belki wynosi:

$$M_G(x,t) = R_A(t) x - \int_0^x q_1(s,t) (x-s) ds \quad (6)$$



Rys. 1. Obciążenie belki

Jak widać dla określenia wielkości momentu zginającego niezbędna jest znajomość funkcji  $y(x,t)$ . Funkcję tę można znaleźć wykorzystując równanie drgań giętych belki [1]:

$$EJ \left[ \frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} + \tau \frac{\partial^5 y(x,t)}{\partial x^4 \partial t} \right] + \rho_m \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = q(x). \quad (7)$$

W równaniu (7) uwzględniono tłumienie wewnętrzne według modelu Voigta.  $\tau$  oznacza czas opóźniania modelu Voigta.

Warunki początkowe mają postać:

$$y(x,0) = 0, \quad \left. \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0. \quad (8)$$

Warunki brzegowe można zapisać:

$$\begin{aligned}
 y(0, t) &= 0, \\
 y(L, t) &= C \sin \Omega t, \\
 \left. \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right|_{x=0} &= 0, \\
 \left. \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right|_{x=L} &= 0.
 \end{aligned} \tag{9}$$

Celem sprowadzenia niejednorodnych warunków brzegowych do warunków jednorodnych zapisujemy funkcję  $y(x, t)$  w postaci:

$$y(x, t) = y_1(x, t) + \frac{\pi}{L} C \sin \Omega t. \tag{10}$$

Po podstawieniu (10) do równania (7), do warunków początkowych oraz brzegowych otrzymujemy równanie drgań giętych belki w postaci:

$$EJ \left[ \frac{\partial^4 y_1(x, t)}{\partial x^4} + \tau \frac{\partial^5 y_1(x, t)}{\partial x^4 \partial t} \right] + \rho_m \frac{\partial^2 y_1(x, t)}{\partial t^2} = q + \frac{\pi}{L} \rho_m \Omega^2 C \sin \Omega t. \tag{11}$$

$$y_1(0, t) = y_1(L, t) = \left. \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} \right|_{x=L} = 0 \tag{12}$$

Z jednorodnymi warunkami brzegowymi (12) oraz warunkami początkowymi:

$$\begin{aligned}
 y_1(x, 0) &= 0, \\
 \left. \frac{\partial y_1(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} &= -\frac{\pi}{L} \Omega C.
 \end{aligned} \tag{13}$$

Rozwiązanie zagadnienia (11), (12), (13) poszukujemy w postaci:

$$y_1(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n(t) X_n(x), \tag{14}$$

gdzie:

$X_n(x)$  - funkcje własne.

Prawą stronę (11) rozwinieemy w szereg według funkcji własnych:

$$q(x) + \frac{\pi}{L} \rho_m \Omega^2 C \sin \Omega t = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n(t) X_n(x). \tag{15}$$

Na podstawie warunku ortogonalności funkcji własnych [1] :

$$\int_0^L X_n(x) X_m(x) dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \gamma_n^2 & n = m \end{cases}, \quad (16)$$

gdzie:

$$\gamma_n^2 = \int_0^L X_n^2(x) dx, \quad (17)$$

znajdujemy

$$Q_n(t) = \frac{1}{\gamma_n^2} \int_0^L \left[ q(x) + \frac{\pi}{L} \rho_m \omega^2 C \sin \omega t \right] X_n(x) dx. \quad (18)$$

Po podstawieniu (14), (15) i (18) do (11) zagadnienie sprowadza się [1] do wyznaczenia funkcji spełniającej równanie:

$$\ddot{\xi}_n(t) + \omega_n^2 \tau \dot{\xi}_n(t) + \omega_n^2 \xi_n(t) = \frac{1}{\gamma_n^2} Q_n(t). \quad (19)$$

Warunki początkowe wynikają z (13), jednak w toku dalszych rozważań okaże się, że nie mają one wpływu na wynik.

Dla jednorodnych warunków brzegowych (12) funkcje własne przyjmują postać [1]:

$$X_n(x) = \sin n \pi \frac{x}{L}, \quad (20)$$

$$\omega_n^2 = \frac{EJ}{\rho_m} \left( \frac{n\pi}{L} \right)^4. \quad (21)$$

Po obliczeniu całek (17) i (18) z uwzględnieniem (20) prawą stronę równania (19) można przedstawić w postaci:

$$\ddot{\xi}_n(t) + \omega_n^2 \tau \dot{\xi}_n(t) + \omega_n^2 \xi_n(t) = E_n + F_n \sin \omega t, \quad (22)$$

gdzie:

$$E_n = \frac{1}{\gamma_n^2} \int_0^L q(x) \sin n\pi \frac{x}{L} dx, \quad (23)$$

$$F_n = \frac{-2 \omega^2 C}{n\pi} \cdot (-1)^n. \quad (24)$$

Równanie (22) jest niejednorodnym liniowym równaniem różniczkowym drugiego rzędu.

Rozwiązanie jego jest sumą całki ogólnej i całki szczególnej. Jednak tłumienie sprawia, iż całka ogólna nie ma wpływu na postać drgań ustalonych. (Z tego powodu nieistotne są warunki początkowe towarzyszące (19)).

Wobec tego rozwiązanie (22) znajdujemy w postaci:

$$\xi_n(t) = S_n + V_n \cos \Omega t + W_n \sin \Omega t, \quad (25)$$

gdzie:

$$S_n = \frac{E_n}{\omega_n^2} = \frac{1}{\omega_n^2 \tau n^2} \int_0^L q(x) \sin n\pi \frac{x}{L} dx, \quad (26)$$

$$V_n = \frac{-F_n \omega_n^2 \tau \Omega}{\omega_n^4 \tau^2 \Omega^2 + (\omega_n^2 - \Omega^2)^2} = \frac{2 \Omega^2 C}{n\pi} (-1)^n \frac{\omega_n^2 \tau \Omega}{\omega_n^4 \tau^2 \Omega^2 + (\omega_n^2 - \Omega^2)^2}, \quad (27)$$

$$W_n = \frac{F_n (\omega_n^2 - \Omega^2)}{\omega_n^4 \tau^2 \Omega^2 + (\omega_n^2 - \Omega^2)^2} = \frac{-2 \Omega^2 C}{n\pi} (-1)^n \frac{(\omega_n^2 - \Omega^2)}{\omega_n^4 \tau^2 \Omega^2 + (\omega_n^2 - \Omega^2)^2} \quad (28)$$

Rozwiązanie zagadnienia (11), (12), (13) znajdujemy podstawiając (25) i (28) do (14):

$$y_1(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (S_n + V_n \cos \Omega t + W_n \sin \Omega t) \sin n\pi \frac{x}{L}. \quad (29)$$

Po dwukrotnym zróżniczkowaniu względem czasu uzyskujemy funkcję opisującą pole przyspieszeń w stanie ustalonym:

$$\ddot{y}_1(x, t) = - \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos(\Omega t + \varphi_n) \sin n\pi \frac{x}{L}, \quad (30)$$

gdzie:

$$B_n = \Omega^2 \sqrt{W_n^2 + V_n^2}, \quad (31)$$

$$\varphi_n = \arctg \left( \frac{\Omega^2 - \omega_n^2}{\omega_n^2 \Omega \tau} \right). \quad (32)$$

Po uwzględnieniu (27) i (28)

$$B_n = \frac{2 \Omega^4 C}{n \pi \sqrt{\omega_n^4 \tau^2 \Omega^2 + (\omega_n^2 - \Omega^2)^2}} \quad (33)$$

Pochodna  $\frac{\partial B_n}{\partial \Omega}$  nie zeruje się dla rzeczywistych wartości częstości wymuszenia  $\Omega$ . Stąd wniosek, że amplituda  $B_n$  monotonicznie rośnie ze wzrostem  $\Omega$ .

Jeśli  $\Omega = \omega_n$ , to

$$B_n = \frac{2G}{n\pi} \frac{\omega_n}{\tau} . \quad (34)$$

We wzorze (2) w miejsce  $\ddot{y}$  podstawiamy  $\ddot{y}_1(x,t)$  dane w postaci szeregu (30). Jak widać z (21) i (33) amplitudy kolejnych wyrazów szeregu maleją jak  $\frac{1}{n^2}$ . W praktyce szereg można obciąć do kilku pierwszych wyrazów.

Podstawiając (30) do (2), (5) i (6) otrzymamy:

$$M_G(x,t) = \left[ \int_0^L q(x) dx - \frac{1}{L} \int_0^L q(x) x dx \right] x - \int_0^x q(s)(x-s) ds - \\ - \rho_m \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos(\Omega t - \varphi'_n) \left(\frac{L}{n\pi}\right)^2 \sin n\pi \frac{x}{L} . \quad (35)$$

Naprężenia dynamiczne wyznacza się ze wzoru:

$$\sigma_D(x,t) = \frac{M_G(x,t)}{w} , \quad (36)$$

gdzie:

w - wskaźnik wytrzymałości przekroju belki na zginanie.

Znalezienie maksymalnego w czasie i po długości belki momentu wymaga rozwiązania układu równań:

$$\frac{\partial M_G(x,t)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial M_G(x,t)}{\partial t} = 0 ,$$

czyli

$$\int_0^L q(x) dx - \frac{1}{L} \int_0^L q(x) x dx - \frac{d}{dx} \left[ \int_0^x q(s)(x-s) ds \right] - \\ - \rho_m \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos(\Omega t - \varphi'_n) \left(\frac{L}{n\pi}\right)^3 \cos n\pi \frac{x}{L} = 0 . \quad (37)$$

$$\rho_m \sum_{n=1}^{\infty} B_n \Omega \sin(\Omega t - \varphi'_n) \left(\frac{L}{n\pi}\right)^2 \sin n\pi \frac{x}{L} = 0 .$$

W praktyce szeregi zastępuje się skończoną liczbą pierwszych wyrazów. Z uwagi na to, że amplitudy  $B_n$  szybko maleją, ze wzrostem  $n$  można przysiąc w przybliżeniu, że drugie z równań (37) spełnione jest, gdy  $t = \frac{\varphi_1 + n\pi}{\Omega}$ . Dla tej wartości  $t$  pierwsze równanie (37) rozwiązujemy graficznie lub metodą prób znajdując  $x$ .

#### PRZYKŁAD LICZBOWY

Obliczamy maksymalny moment zginający belkę, która jest konstrukcją kratową o przekroju trójkątnym równobocznym ( $b = 0,7$  m) (3 rury stalowe  $\phi 60/55$ ) pod stałym obciążeniem ciągłym  $q = 0,75$  kN/m. Rozpiętość belki  $L = 12$  m. Amplituda wymuszenia  $C = 0,00164$  m, częstość wymuszenia równa jest pierwszej częstości drgań własnych  $\Omega = \omega_1$ .

Skorzystamy ze wzoru (35) obcinając szereg do dwóch wyrazów

$$M_g(x,t) = \frac{q}{2} \frac{L}{2} x - \frac{q}{2} \frac{x^2}{2} - \rho_m B_1 \cos(\Omega t - \varphi_1) \frac{L^2}{x^2} \sin n\pi \frac{x}{L} - \\ - \rho_m B_2 \cos(\Omega t - \varphi_2) \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 \sin 2\pi \frac{x}{L}.$$

Obliczenie amplitud  $B_1, B_2$  wymaga określenia czasu opóźnienia  $\tau$ . Tłumienie jest podkrytyczne, gdy  $\tau < \frac{2}{\omega_m}$ . Dla danego układu zgodnie z (21)

$$\omega_1 = 103,48 \left[ \frac{1}{s} \right], \quad \omega_2 = 413,92 \left[ \frac{1}{s} \right].$$

Czyli

$$\frac{2}{\omega_2} = 0,0048 \text{ s.}$$

Obliczenia wykonamy dla dwóch wartości czasu opóźnienia  $\tau' = 0,001$  s i  $\tau'' = 0,002$  s.

Zgodnie z (33) i (34)

$$B_1' = 107,3 \left[ \frac{m}{s^2} \right], \quad B_1'' = 53,69 \left[ \frac{m}{s^2} \right],$$

$$B_2' = 0,3681 \left[ \frac{m}{s^2} \right], \quad B_2'' = 0,3616 \left[ \frac{m}{s^2} \right].$$

Zgodnie z (32)

$$\varphi_1' = \varphi_1'' = 0,$$

$$\varphi_2' = -1,4608, \quad \varphi_2'' = -1,3535 \left[ \text{rad} \right].$$

Po podstawieniu:

$$\rho_m B_1^* \left(\frac{l}{2}\right)^2 = 16225,5 \text{ [Nm]}, \quad \rho_m B_1^* \left(\frac{l}{x}\right)^2 = 8112,75 \text{ [Nm]},$$

$$\rho_m B_2^* \left(\frac{l}{2x}\right)^2 = 13,91 \text{ [Nm]}, \quad \rho_m B_2^* \left(\frac{l}{2x}\right)^2 = 13,66 \text{ [Nm]}.$$

Maksymalna wartość momentu od obciążenia ciągłego występuje w połowie rozpiętości i wynosi  $q\left(\frac{l}{2}\right)^2 = 27000 \text{ [Nm]}$ . Całkowity moment osiągnie wartość maksymalną, gdy

$$\cos(\omega_1 t - \varphi_1) = -1,$$

czyli dla:

$$t = \frac{(2n+1)\pi}{103,48} = 0,03036; 0,091; 0,1518 \dots \text{ [s]}.$$

Ponieważ amplituda drugiej harmonicznej jest o dwa rzędy wielkości mniejsza od pierwszej, więc można przyjąć, że maksymalny moment wystąpi w połowie rozpiętości i wyniesie:

$$M_g(x,t)_{\max} = M_g\left(\frac{l}{2}, \frac{(2n+1)\pi}{103,48}\right) = q\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \rho_m B_1 \left(\frac{l}{x}\right)^2.$$

$$M_g \max(\tau) = \begin{cases} 27000 + 16225,5 = 43225,5 \text{ [Nm]} & \text{dla } \tau = 0,001 \text{ s} \\ 27000 + 8112,75 = 35112,75 \text{ [Nm]} & \text{dla } \tau = 0,002 \text{ s.} \end{cases}$$

#### WNIOSKI

1. Szeregi opisujące moment zginający są szybkozbieżne (kolejne amplitudy maleją jak  $\frac{1}{n^5}$ ) i w praktyce można ograniczyć się do zastąpienia ich dwoma pierwszymi wyrazami.
  2. Moment zginający pochodzący od pola przyspieszeń w belce rośnie liniowo z amplitudą wymuszenia kinematycznego i z kwadratem częstości tego wymuszenia.
  3. Na wielkość momentu ma wpływ czas opóźniania  $\tau$ . Podwojenie czasu opóźniania powoduje dla  $\Omega = \omega_1$  zmniejszenie o połowę momentu pochodzącego od pola przyspieszeń.
- Należy podkreślić, że uzyskane wyniki odnoszą się do drgań ustalonych, przy określonych warunkach brzegowych i określonym sposobie realizacji wymuszenia. Przedstawione rozwiązanie stanowi przykład postępowania. W podobny



nia. Przedstawione rozwiązanie stanowi przykład postępowania. W podobny sposób można uzyskać rozwiązania przy innym doborze warunków brzegowych i innych realizacji wymuszenia.

## LITERATURA

- [1] S.Kaliski (red.) Drgania i fale w ciałach stałych. PWN, Warszawa, 1966.

Wpłynęło do Redakcji w lipcu 1981

Recenzent: Doc dr inż. Roman Klus

## ДИНАМИКА БАЛКИ ПРИ КИНЕМАТИЧЕСКОМ ВЫНУЖДЕНИИ

## Р а з ю м е

Во время вынужденного движения балки возникает поле ускорений связанных с деформациями. Это поле является источником инерционных сил приводящих к дополнительной нагрузке. Решая дифференциальное уравнение колебаний балки с учетом демпфирования согласно модели Фойгта получаем формулу описывающую поле ускорений в виде быстроходящегося ряда. Дополнительный изгибающий момент вызванный силами инерции связанными с возможностью деформации балки дан тоже в виде гармонического ряда, амплитуды которого уменьшаются по мере роста  $n$  согласно формуле  $\frac{1}{n^5}$ .

## THE DYNAMICS OF A BEAM UNDER KINEMATIC ENFORCEMENT

## S u m m a r y

During the enforced movement of a beam, an acceleration field is formed, connected with strain. This field is a source of forces of inertia which constitute an additional load. By solving the equation of transverse vibrations of the beam, if damping is accounted for according to Weigt's model, we obtain a formula describing the acceleration field in a form of a high-speed series. An additional bending moment originated from the forces of inertia, which are connected with deformability of the beam, is also given in a form of harmonic vibrations, having amplitudes which decrease alongside with an increase of  $n$  as in  $\frac{1}{n^5}$ .