ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1982
Seria: ENERGETYKA z.80 Nr kol. 715

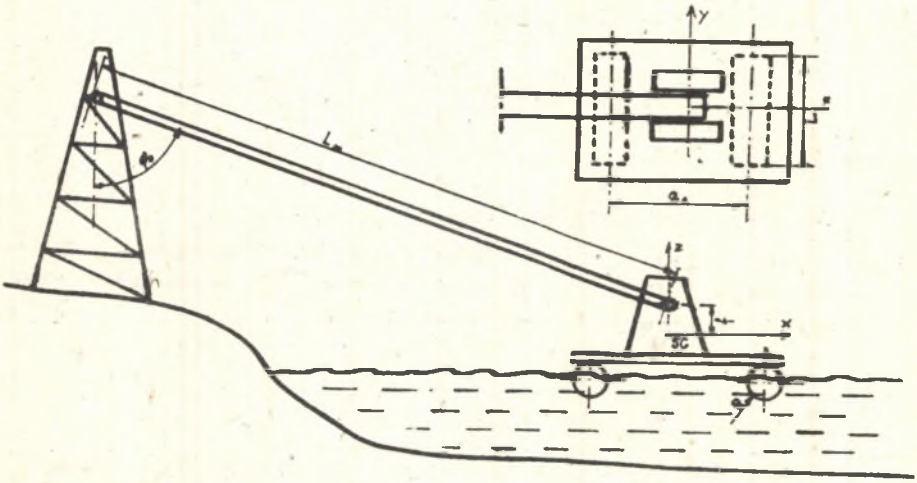
Grzegorz PAKUŁA

DYNAMIKA POMOSTU PONTONOWEGO

Streszczenie. Pomost wspiera się przegubowo na dwu podporach, z których jedna znajduje się na stałym lądzie, a druga pływa po powierzchni jeziora na platformie wspartej na dwu pontonach. Wiatr wiejący z określoną prędkością powoduje powstanie fali na powierzchni jeziora. Fala wymusza drgania układu. W pracy obliczono amplitudy ustalonych drgań.

1. WSTĘP

Pomost o rozpiętości L_m, sztywności na zginanie EJ, przekroju poprzecznym S, wykonany z materiału o gęstości ρ wspiera się przegubowo na dwu podporach, z których jedna znajduje się na lądzie stałym. Druga podpora pływa po powierzchni jeziora na platformie wspartej na dwu pontonach o przekroju kołowym (rys. 1).



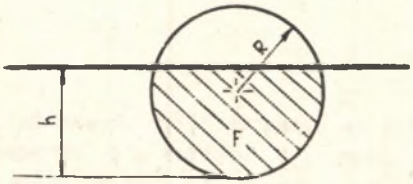
Rys. 1. Analizowany układ

Wiatr wiejący z określoną prędkością powoduje sfalowanie powierzchni jeziora. Fale są źródłem dodatkowej siły wyporu, która stanowi siłę wymuszającą drgania układu. Celem niniejszej pracy jest określenie amplitud drgań układu wzbudzanych za pośrednictwem fali przez wiatr wiejący z określoną prędkością. W pracy podano zależności określające parametry fali (amplitudę, długość, częstość) od prędkości wzbudzającego ją wiatru, zanalizowano oddziaływanie fali z pontonem, celem obliczenia wymuszającej siły wyporu, ułożono i rozwiązano różniczkowe równania ruchu układu.

2. STATYCZNA GŁĘBOKOŚĆ ZANURZENIA PONTONU

W stanie równowagi (dla gładkiej powierzchni jeziora) wypór równoważy się z ciężarem platformy oraz połową ciężaru pomostu:

$$2 F_o L \gamma = g (m_p + \frac{1}{2} m), \quad (1)$$



Rys. 2. Przekrój pontonu

gdzie:

g - przyspieszenie ziemskie,
m - masa pomostu,
m_p - masa platformy,
F_o - powierzchnia zatopionej części przekroju pontonu,
L - długość pontonu,
γ - ciężar właściwy wody.

Pole odcinka koła można obliczyć za wzoru:

$$F = \frac{R^2}{2} (2 \arccos \frac{R - h}{h} - \sin 2 \arccos \frac{R - h}{h}), \quad (2)$$

gdzie:

R - promień pontonu,
h - głębokość zanurzenia (rys. 2).

Ze wzoru (1) można obliczyć pole zatopionej części pontonu w równowadze. Porównując tę wartość z prawą stroną równania (2), można metodą prób obliczyć głębokość zanurzenia h_o w równowadze.

3. CZĘSTOŚĆ DRGAŃ

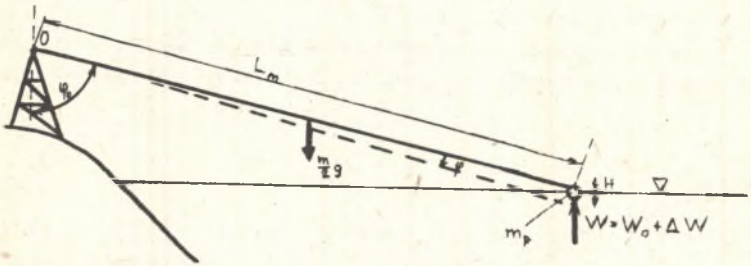
W pierwszym przybliżeniu dynamiczny model układu traktujemy jako prosty oscylator harmoniczny, którego ruch swobodny opisany jest równaniem różniczkowym:

$$I\ddot{\varphi} + P\varphi = 0, \tag{3}$$

gdzie:

$\varphi(t)$ - wychylenie kątowe mostu (rys. 3),

$I = (\frac{1}{3} m + m_p) L_m^2$ - masowy moment bezwładności układu względem osi obrotu O mostu.



Rys. 3. Układ jako prosty oscylator harmoniczny

Wyraz drugi z lewej strony reprezentuje moment siły zwrotnej, którą jest nadwyżka wyporu $\Delta W = 2\gamma L f(H)$ wywołana zanurzeniem dodatkowym $H(t) = L_m \sin\varphi_0 \sin\varphi$. Jak wynika z (2) zależność f(H) jest nieliniowa, lecz dla małych zanurzeń ($H \ll R$, $\sin\varphi \approx \varphi$) aproksymujemy ją funkcją liniową:

$$f(H) = \left(\frac{dF}{dh}\right)_{h_0} H \approx L_m \sin\varphi_0 \left(\frac{dF}{dh}\right)_{h_0} \varphi .$$

Moment siły ΔW względem osi obrotu O wynosi:

$$2\gamma L f(H) L_m \sin\varphi_0 \approx 2\gamma L L_m^2 \sin^2\varphi_0 \left(\frac{dF}{dh}\right)_{h_0} \varphi ,$$

wobec czego:

$$P = 2\gamma L L_m^2 \sin^2\varphi_0 \left(\frac{dF}{dh}\right)_{h_0} . \tag{4}$$

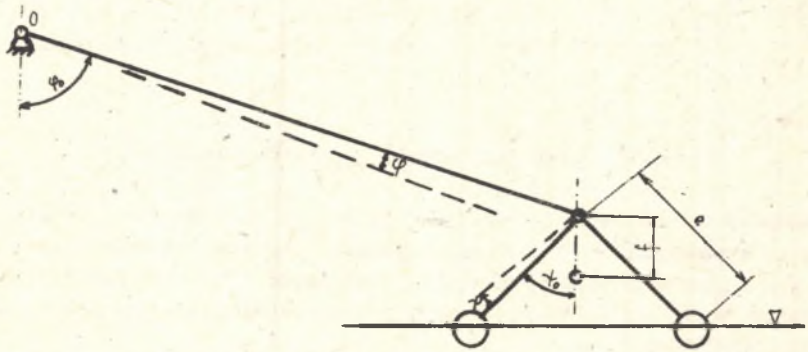
Częstość drgań oscylatora:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{P}{I}} = \sqrt{\frac{2\gamma L \sin^2\varphi_0 \left(\frac{dF}{dh}\right)_{h_0}}{\frac{1}{3} m + m_p}} . \tag{5}$$

4. RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE RUCHU UKŁADU O DWU STOPNIACH SWOBODY

Układ o jednym stopniu swobody jest modelem układu rzeczywistego, wystarczającym dla analizy drgań swobodnych na spokojnej wodzie. Wtedy platforma porusza się wyłącznie ruchem translacyjnym (oba pontony zanurzają się jednakowo). Gdy zaś powierzchnia jest sfalowana, platforma porusza się ruchem płaskim. Dlatego właściwym modelem w tym przypadku będzie układ o dwu stopniach swobody (rys. 4).

Badając ruch tego układu zakładamy małe drgania wokół położenia równowagi. Jako współrzędne uogólnione przyjmiemy kąty φ i ψ jak na rys. 4.



Rys. 4. Układ o dwu stopniach swobody

Metodą Lagrange'a otrzymujemy różniczkowe równania ruchu w postaci:

$$
\begin{aligned}
a\ddot{\varphi} + b\ddot{\psi} + 2A^2 c\varphi &= F(\varphi, \psi, t),\\
b\ddot{\varphi} + d\ddot{\psi} + 2B^2 c\psi &= G(\varphi, \psi, t),
\end{aligned}
\tag{6}
$$

gdzie:

$$a = \frac{1}{3} m L_m^2 + m_p L_m^2,$$

$$b = - m_p L_m \cos\varphi_0,$$

$$d = I_p + m_p f^2,$$

(I_p - moment bezwładności platformy względem jej środka ciężkości,

f - odległość środka ciężkości platformy od punktu zamocowania do końca mostu),

$$c = L \left.\frac{dP}{dh}\right|_{h_o},$$

$$A = L_m \sin \varphi_o,$$

$$B = e \sin \psi_o.$$

Częstości drgań własnych obliczamy analizując drgania swobodne modelu, opisane układem równań różniczkowych:

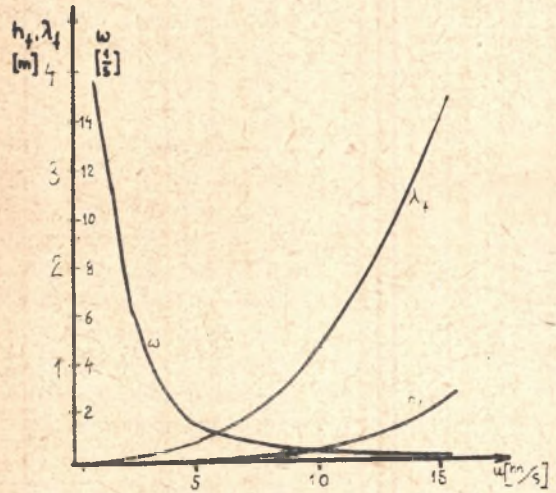
$$\begin{aligned} a\ddot{\varphi} + b\ddot{\psi} + 2A^2 c \gamma \varphi &= 0, \\ b\ddot{\varphi} + d\ddot{\psi} + 2B^2 e \gamma \psi &= 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Częstości własne można obliczyć z równania charakterystycznego [3], które w rozważanym przypadku ma postać:

$$(ad - b^2)\omega_o^4 - (2A^2 c \gamma d + B^2 c \gamma a)\omega_o^2 + 4A^2B^2c^2\gamma^2 = 0. \tag{8}$$

Wyrażenia stojące po prawej stronie równania (6) reprezentują siły wymuszające, których źródłem jest nadwyżka wyporu. Określeniem ich postaci zajmiemy się nieco dalej.

W literaturze [1] można znaleźć dane pomiarowe i wzory półempiryczne, pozwalające na ustalenie zależności między prędkością wiatru a częstością, amplitudy i długością fali wzbudzonej przez ten wiatr. Na podstawie tych danych sporządzony został wykres na rys. 5.



Rys. 5. Zależność częstości amplitudy i długości fali od prędkości wiatru

Należy podkreślić, że dane powyższe odnoszą się do zbiornika wodnego na tyle rozległego, aby fala mogła się uformować. Rozpatrujemy przypadek, gdy fala rozprzestrzenia się w kierunku osi x (rys. 1).

Na rys. 6 przedstawiona jest zmiana pola zatopionej części pontonu spowodowana falą. Przyjęto, że fala ma profil sinusoidalny. Pole zatopionej części można obliczyć następująco:

a) Jeśli punkty A, B przecięcia sinusoidy z okręgiem leżą poniżej jego osi poziomej, to wówczas

$$F(x) = (h-R)\,x - h_f \frac{\lambda}{2\pi} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\,x + \beta\right) + \frac{1}{2}\left(x\sqrt{R^2 - x^2} + R^2 \arcsin\frac{x}{R}\right), \tag{9}$$

i pole zatopionej części wynosi:

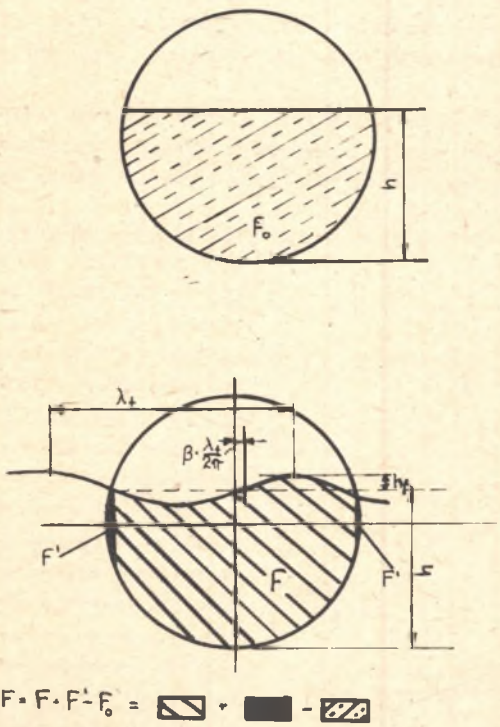
$$F = F(B) - F(A). \tag{10}$$

Znaczenie symboli występujących we wzorze (9) wyjaśnia rys. 6.

b) Jeśli punkty przecięcia A, B leżą na górnej połówce koła, wtedy do pola obliczonego wzorem (10) należy dodać pola F', które obliczamy ze wzoru (2); współrzędne x_A, x_B punktów A, B wyznacza się z równania:

$$h - R + h_f \sin\frac{2\pi}{\lambda}\,x + \beta = \pm\sqrt{R^2 - x^2}\,. \tag{11}$$

Znak plus odnosi się do górnej połówki koła.



Rys. 6. Nadwyżka wyporu spowodowana falą

Równanie (11) jest przestępne. Jego rozwiązań można szukać metodą prób, co jednak uniemożliwia określenie explicite zależności współrzędnych x_A, x_B od h i β, tym samym nie można przedstawić pola F jako funkcji argumentów h, β. Dla określonej prędkości wiatru z wykresu na rys.5 można odczytać wysokość fali h_f, jej długość λ oraz częstość ω. Interesują nas ograniczone prędkości wiatru, bo dla większych prędkości amplitudy fali są tak duże, iż równania (6) wyprowadzone przy założeniu małych wychyleń tracą ważność. Graniczna prędkość wiatru zależy od rozmiarów mostu i pontonów.

Dla znanych h_f i λ przyjmujemy konkretne wartości

h i β, z równania (11) określamy położenie punktów A i B. Następnie w zależności od ich usytuowania na okręgu obliczamy pole F zatopionej części pontonu. Od tego pola odejmujemy pole F_{oh} zatopionej części pontonu przy braku fali, otrzymując w ten sposób nadwyżkę powierzchni ΔF. Obliczenia powtarzamy dla kolejnych wartości h i β (ΔF jest okresową funkcją β, który to kąt jest związany z przesuwaniem się fali na tle pontonu).
Nadwyżka wyporu, będąca siłą wymuszającą drgania, równa się:

$$W = L \gamma \Delta F. \tag{12}$$

Obliczenia przeprowadzone dla konkretnych wartości parametrów wskazują, że zależność ΔW (h,t) ma dość złożony charakter.
W dalszych obliczeniach stosujemy aproksymację:

$$W = (K - M \Delta h) \sin \omega t, \tag{13}$$

gdzie:

$\Delta h = h - h_o$,

K,M - stałe,

ω - częstość fali obliczona za pomocą wykresu z rys. 5.

Uwzględniając to otrzymujemy równania różniczkowe ruchu układu w postaci:

$$a\ddot{\varphi} + b\ddot{\psi} + 2A^2 c\gamma\varphi = -A\Big\{(K - MA\varphi)\left[\sin\varphi t + \sin(\omega t + \alpha)\right] + \\ + MB\psi\left[\sin(\omega t + \alpha) - \sin\omega t\right]\Big\},$$

$$b\ddot{\varphi} + d\ddot{\psi} + 2B^2 c\gamma\psi = -B\Big\{(K - MA\varphi)\left[\sin\omega t - \sin(\omega t + \alpha)\right] - \\ - MB\psi\left[\sin\omega t + \sin(\omega t + \alpha)\right]\Big\}. \tag{14}$$

Kąt fazowy α wynika z różnicy faz fali na obu pontonach. Jeśli odległość osi pontonów wynosi a_1, to:

$$\alpha = \frac{a_1 - \lambda}{\lambda} 2\pi \tag{15}$$

Równania (14) swą budową przypominają równanie Mathieu, co świadczy o parametrycznym typie wzbudzenia drgań. Odpowiedzialna za to jest zmiana nadwyżki ΔW przy zmianie zanurzenia pontonu. Nie ma ogólnej metody pozwalającej znaleźć dokładne, analityczne rozwiązanie (14). Rozwiązania tego układu należy szukać z pomocą metod przybliżonych, jednakże stosowane uproszczenia na ogół dają wyniki zgodne z rzeczywistością jedynie w pewnym skończonym okresie czasu, po upływie którego coraz bardziej od niej odbiegają.

Z powodu trudności rozwiązania układu równań (14) konieczne stają się dalsze uproszczenia modelu. Przyjmijmy, że dla niewielkich wychyleń, amplituda siły wymuszającej nie zależy od chwilowego zanurzenia pontonu:

$$\Delta W = K \sin \omega t. \tag{16}$$

Uwzględniając to oraz wprowadzając tłumienie poprzez funkcję dysypacji

$$Q = \mu \left(\frac{\dot{h}_1^2}{2} + \frac{\dot{h}_2^2}{2} \right),$$

gdzie:

μ - współczynnik tłumienia,

$h_{1,2}$ - prędkości zmiany głębokości zanurzenia pontonów,

otrzymamy równania różniczkowe ruchu układu w postaci:

$$\begin{aligned} a\ddot{\varphi} + b\ddot{\psi} + 2\mu\ A^2\dot{\varphi} + 2A^2 c\gamma\varphi &= AK\left[\sin(\omega t + \alpha) + \sin \omega t\right], \\ b\ddot{\varphi} + d\ddot{\psi} + 2\mu\ B^2\dot{\psi} + 2B^2 c\gamma\psi &= BK\left[\sin(\omega t + \alpha) + \sin \omega t\right]. \end{aligned} \tag{17}$$

Równania te opisują już drgania wymuszone kinematycznie (lecz nieparametrycznie).

Równania (17) sprowadzamy do postaci bezwymiarowej, przyjmując bezwymiarowy czas $\tau = \omega t$. Otrzymujemy układ w postaci:

$$\begin{aligned} l_{11}\frac{d^2\varphi}{d\tau^2} + l_{12}\frac{d^2\psi}{d\tau^2} + \mu l \frac{d\varphi}{d\tau} + \varphi &= l_{13}\sin\left(\tau + \frac{\alpha}{2}\right), \\ l_{21}\frac{d^2\varphi}{d\tau^2} + l_{22}\frac{d^2\psi}{d\tau^2} + \mu l \frac{d\psi}{d\psi} + \psi &= l_{23}\cos\left(\tau + \frac{\alpha}{2}\right), \end{aligned} \tag{18}$$

gdzie:

$$l_{11} = \frac{a\omega^2}{2A^2 c\gamma}, \qquad l_{12} = \frac{b\omega^2}{2A^2 c\gamma},$$

$$l_{21} = \frac{b\omega^2}{2B^2 c\gamma}, \qquad l_{22} = \frac{d\omega^2}{2B^2 c\gamma},$$

$$l_{13} = \frac{K}{A c\gamma}\cos\frac{\alpha}{2}, \qquad l_{23} = \frac{}{B c\gamma}\sin\frac{\alpha}{2},$$

$$w = \mu l = \frac{\omega\mu}{c\gamma}.$$

Rozwiązanie układu równań (17) jest sumą całki ogólnej układu jednorodnego oraz całki szczególnej układu niejednorodnego.

Tłumienie sprawia, iż po upływie pewnego czasu ustalą się drgania opisane funkcjami:

$$\varphi = E_1 \sin\left(\tau + \frac{\alpha}{2}\right) + E_2 \cos\left(\tau + \frac{\alpha}{2}\right),$$
$$\psi = E_3 \sin\left(\tau + \frac{\alpha}{2}\right) + E_4 \cos\left(\tau + \frac{\alpha}{2}\right). \tag{19}$$

Podstawienie (19) do (18) daje układ czterech równań liniowych na obliczenie nieznanych czterech stałych $E_1, \ldots E_4$. Po rozwiązaniu otrzymujemy wzory:

$$E_1 = \frac{1}{\Delta}\left[w^2 L_1 l_{13} + w\, l_{12} l_{23}(L_1 + L_2) + L_2\, l_{13}(L_1 L_2 - l_{12} l_{21})\right],$$

$$E_2 = \frac{-1}{\Delta}\left[w^3 l_{13} + w^2 l_{12} l_{23} + w\, l_{13}(L_2^2 + l_{12} l_{21}) + l_{12} l_{23}(l_{12} l_{21} - L_1 L_2)\right]$$

$$E_3 = \frac{1}{\Delta}\left[w^3 l_{23} - w^2 l_{13} l_{21} + w\, l_{23}(L_1^2 + l_{21} l_{12}) + l_{13} l_{21}(L_1 L_2 - l_{21} l_{12})\right]$$

$$E_4 = \frac{1}{\Delta}\left[w^2 L_2 l_{23} - w\, l_{21} l_{13}(L_1 + L_2) + L_1\, l_{23}(L_1 L_2 - l_{12} l_{21})\right],$$

gdzie:

$$\Delta = w^4 + w^2(L_2^2 + 2\, l_{12} l_{21} + L_1^2) + L_2 L_1 - l_{21} l_{12}^2,$$

$$L_1 = 1 - l_{11},$$

$$L_2 = 1 - l_{22}.$$

Korzystając ze znanych wzorów [5] zastępujemy sumę harmonicznych o jednakowej częstości jedną harmoniczną. W oparciu o (19) ruch układu można więc opisać funkcjami jednoczłonowymi:

$$\varphi = E \sin(\omega t + \vartheta_1),$$

$$\psi = F \sin(\omega t + \vartheta_2).$$

Amplituda E drgań mostu stanowi wielkość wyjściową do obliczenia naprężeń dynamicznych w konstrukcji pomostu podczas ruchu ustalonego. W tym względzie korzystamy z wyników pracy [4].

5. PRZYKŁAD OBLICZENIOWY

Pomost posiada następujące parametry (oznaczenia jak na rys. 1, 3, 4):

$L_m = 12$ m,
$L = 3$ m,
$R = 0,4$ m,
$a_1 = 3,5$ m,
$EJ = 2,1 \times 11,119$ m^4
$S = 0,0013548$ m^2,
$m_p = 1162$ kg,
$m = 917,4$ kg,
$\varphi_o = 75^o$,
$f = 0,2$ m,
$I_p = 260$ kgm^2,
$e = 2,067$ m,
$\psi_o = 56,84^o$,
$w = 0,25$.

Dla powyższych danych statyczna głębokość zanurzenia pontonu $h_o = 0,4257$m,

$$\left(\frac{dP}{dh}\right)_{h_o} = 0,7984 \text{ m}.$$

Ze wzoru (5) obliczamy częstości układu o jednym stopniu swobody

$$\omega_o = 5,46 \text{ 1/s}$$

Ze wzoru (8) obliczamy częstości własne układu o dwu stopniach swobody. Pierwsza z nich pokrywa się z częstością obliczoną powyżej

$$\omega_o' = \omega_o ,$$

druga wynosi

$$\omega_o'' = 21,75 \text{ 1/s}.$$

Przyjmujemy do obliczeń taką prędkość wiatru, dla której częstość fali równa się ω_o'.
Zachodzi to, jak wynika z wykresu na rys. 5, dla prędkości wiatru u = 3,4 m/s.
Pozostałe parametry fali: $\lambda = 0,4$ m, $h_f = 0,06$ m.
Przeprowadzamy obliczenia nadwyżki wyporu (9 - 11).
W wyniku uśrednienia otrzymujemy wartości stałej K = 8,2 N.

Jak wynika ze wzoru (15) kąt α wynosi 7,75 . 2 π . Wobec okresowości prawych stron równań (18) jest to równoważne wartości α = 1,75π.
Po wykonaniu przeliczeń otrzymujemy:

$$E = 7{,}6213 \cdot 10^{-5} \text{ rad},$$

$$F = 1{,}678 \cdot 10^{-3} \text{ rad}.$$

W oparciu o wyniki pracy [4] można stwierdzić, że pomost w wyniku drgań, oprócz obciążenia statycznego, obciążony zostanie dodatkowym momentem zginającym, którego maksymalna wartość wyniesie M_{gmax} = 9051 Nm (czas opóźniania w modelu Voigta przyjęto równy τ = 0,001 s).
Z uwagi na skomplikowany charakter zależności momentu zginającego od prędkości wiatru, znalezienie prędkości, dla której moment osiągnie maksimum wymaga obliczenia wartości momentu dla całego interesującego nas zakresu prędkości podzielonego z pewnym krokiem. Obliczenia te łatwo przeprowadzić za pomocą maszyny cyfrowej.

LITERATURA

[1] B.A.Šuljak: Fizyka wałn na powierchnosti sypuciej sredy i żidkosti. Nauka, Moskwa 1971.

[2] N.N.Bogoljubow, J.A.Mitropolskij: Asimptoticeskije metody w teorii nieliniejnych kolebanij. Nauka, Moskwa 1976.

[3] J.K.Piszczek, J.Walczak: Drgania w budowie maszyn, PWN, Kraków 1967.

[4] G.Pakuła: Dynamika belki poddanej wymuszeniu kinematycznemu. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej (w druku).

[5] Z.Osiński: Teoria drgań. PWN, Warszawa 1978.

Wpłynęło do Redakcji we wrześniu 1981 Recenzent: Doc dr inż. Roman Klus

ДИНАМИКА ПОНТОННОГО ПОМОСТА

Р а з ю м е

Помост опирается на двух шарнирных опорах, одна из которых находится на материке, а вторая плавает по поверхности озера на платформе лежащей на двух понтонах. Ветер дующий с определенной скоростью вызывает возникновение волн на поверхности озера. Волна вынуждает колебания системы. В настоящей работе вычислены амплитуды установившихся колебаний.

THE DYNAMICS OF A PONTOON PLATFORM

S u m m a r y

There is an articulated joint between two pillars and a platform which is supported on them. One of the pillars is fixed on the ground while the other floats on the surface of a lake on another platform supported on two pontoons. The wind, blowing with a certain speed, starts a wave an the surface of the lake. The wave, subsequently, enforces vibration of the system. The paper has calculated the amplitude of established vibrations.