ZESZYTY NAUKOWE POLITRCHNIKI ŚLĄSKIEJ 2001
Seria AUTOMATYKA z. 133 Nr kol. 1526

Roman CZYBA

RÓWNANIA DYNAMIKI I WARUNKI WYWAŻANIA W RUCHU PRZESTRZENNYM MODELU SAMOLOTU

Streszczenie. W pracy przedstawiono opis dynamiki lotu samolotu z uwzględnieniem ruchu postępowego i obrotowego oraz aerodynamiki. Wskazano na nieliniowości tkwiące w równaniach dynamiki ciała sztywnego, jak i w aerodynamice samolotu. Następnie zdefiniowano warunki wyważania, a więc sposób określania ustalonego stanu lotu oraz przedstawiono realizację numerycznego algorytmu wyważania dla modelu samolotu F-16 w środowisku Matlab®. Wyniki symulacji lotu w układzie otwartym zaprezentowano dla wartości zmiennych stanu i sterowania uzyskanych z aplikacji komputerowej programu wyważania.

DYNAMIC EQUATIONS AND TRIM FLIGHT CONDITIONS OF SPATIAL MOVEMENT AIRCRAFT MODEL

Summary. In the paper the dynamics flight aircraft description is presented, including translatory and rotational movement with aerodynamics. The presence of nonlinearities in the rigid body dynamic equations and aircraft aerodynamic is introduced. Next a steady-state flight conditions are determined by solving the nonlinear state equations. A solution to the problem is obtained by using a numerical minimization algorithm. For the aircraft model F-16 the numerical trim algorithm of Matlab® package is presented. The results are illustrated by example outcomes of the trimmer program.

1. Wstęp

Skomplikowane właściwości dynamiczne samolotu jako obiektu sterowania wymagają od pilota odpowiedniej koordynacji wychylania sterownic, operowania mocą silnika oraz działania z wyprzedzeniem wynikającym z bezwładności sterowanego obiektu. Dlatego stosowanie układów sterowania lotem w tych obiektach jest jak najbardziej pożądane. Właściwości dynamiczne samolotu zależą nie tylko od jego właściwości aerodynamicznych i konstrukcyjnych, lecz w dużej mierze od zastosowanego prawa sterowania. Klasyczne metody sterowania samolotem zakładają, że dynamika samolotu jest liniowa i stacjonarna wokół

pewnego stanu ustalonego lotu. Niestety, w ekstremalnych warunkach lotu takie systemy sterowania nie działają poprawnie z powodu silnych nieliniowości występujących w dynamice lotu. Proces sterowania złożonymi obiektami w zmieniających się warunkach wymaga odmiennego podejścia do tematu [1],[2],[8], a mianowicie zakładamy, iż zastosowany model samolotu jest obiektem nieliniowym i niestacjonarnym.

Istotną cechą zastosowanego modelu jest jego dokładność, będąca wynikiem uwzględnienia dużej liczby istotnych czynników oraz nieliniowości występujących w układzie. W pracy przedstawiono matematyczny opis dynamiki lotu z uwzględnieniem ruchu postępowego i obrotowego. Na tej podstawie uzyskano nieliniowy układ równań opisujący ruch samolotu w układzie związanym z samolotem i w układzie przepływowym. Istotnym problemem, jaki napotykamy przy modelowaniu dynamiki złożonego ruchu samolotu, jest wyznaczenie warunków początkowych tego ruchu. Problem ten rozszerzono i potraktowano jako zagadnienie określania ustalonego stanu lotu. Do rozwiązania tego zadania przyjęto, że samolot przed powstaniem stanów dynamicznych wykonywał lot poziomy i jednostajny. Warunki stanu ustalonego lotu określimy dla dwóch przypadków: lotu prostoliniowego oraz zakrętu prawidłowego. Wyznaczone w ten sposób parametry lotu mogą być wykorzystane również przy określaniu zmian wartości zadanej podczas symulacji w układzie zamkniętym z układem sterowania. Zagadnienie to stanowi podstawę syntezy sterowania ruchem samolotu w przestrzeni 3D, z tego względu w artykule tym poświęcono wiele uwagi temu zagadnieniu.

2. Kinematyka i dynamika samolotu

Nieliniowy model właściwości dynamicznych samolotu zbudowano przy następujących założeniach upraszczających [5]:

- obiekt latający jest ciałem sztywnym, a więc pomijamy efekt ugięcia skrzydeł,
- model samolotu posiada sześć stopni swobody, które wynikają z równań ruchu.

Wprowadzamy następujące układy współrzędnych, względem których będziemy rozpatrywali ruch samolotu (rys.1):

- układ związany z Ziemią $F_E(O_E, x_E, y_E, z_E)$ o początku O_E, ustalonym na powierzchni Ziemi,
- układ związany z Ziemią $F_{l'}(O_{l'}, x_{l'}, y_{l'}, z_{l'})$ o początku $O_{l'}$, ustalonym w środku masy samolotu,

- układ związany z samolotem $F_B(C,x,y,z)$, którego początek C, ustalony jest w środku masy samolotu ,
- oraz układ przepływowy $F_w(C,x_w,y_w,z_w)$ o początku C, ustalonym w środku masy samolotu.

W celu ilościowego scharakteryzowania położenia kątowego samolotu względem Ziemi, a więc układu F_B względem układu F_I, wprowadzamy trzy kąty Eulera, które podajemy w układzie F_I:

- kąt przechylenia ϕ,
- kąt pochylenia θ,
- kąt odchylenia ψ.

Stan ruchu samolotu jest zdefiniowany przez dwanaście współrzędnych, a więc przyjmujemy następujący wektor stanu [3],[4]:

$$\overline{X} = \left[\overline{V}^T, \overline{\omega}^T, \overline{\Phi}^T, \overline{T}^T\right]^T, \tag{2.1}$$

gdzie:

$\overline{V} = [U,V,W]^T$ - wektor prędkości liniowej,

$\overline{\omega} = [P,Q,R]^T$ - wektor prędkości kątowej,

$\overline{\Phi} = [\phi,\theta,\psi]^T$ - wektor kątów Eulera,

$\overline{T} = [x,y,z]^T$ - inercyjny wektor położenia.

W celu określenia sił i momentów aerodynamicznych działających na samolot konieczna jest znajomość prędkości lotu oraz dwóch kątów: kąta natarcia α i kąta ślizgu β. Są to zmienne aerodynamiczne związane bezpośrednio z powstawaniem warunków pozwalających na lot samolotu. Wielkości te pokazane są na rys. 1, który przedstawia lot samolotu z uwzględnieniem przepływu strug powietrza z jego prawej strony, a więc lot ze ślizgiem.

Do dalszych rozważań wprowadzimy dwa nowe wektory:

$$\left(\overline{V}_a\right)_{F_B} = \begin{pmatrix} V_{ax} \\ V_{ay} \\ V_{az} \end{pmatrix} \text{ - prędkość samolotu względem atmosfery,}$$

$$\left(\overline{V}_W\right)_{F_B} = \begin{pmatrix} U_W \\ V_W \\ W_W \end{pmatrix} \text{ - prędkość atmosfery względem Ziemi,}$$

co pozwoli nam uwzględnić ruch powietrza względem inercyjnego układu współrzędnych związanego z Ziemią. Pomiędzy wektorem $\left(\overline{V}_E\right)_{F_B}$ prędkości samolotu względem Ziemi wyrażonym w układzie F_B a powyższymi zachodzi następujący związek:

$$\left(\overline{V}_a\right)_{F_B} = \left(\overline{V}_E\right)_{F_B} - D_{BW}\left(\overline{V}_W\right)_{F_W} \tag{2.2}$$

oraz

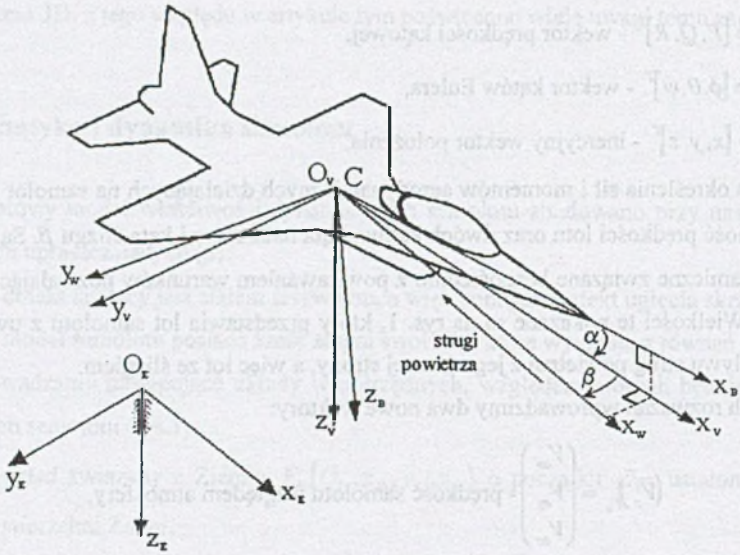
$$\left(V_a\right)_{F_B} = \left(V^2_{ax} + V^2_{ay} + V^2_{az}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.3}$$

Kąty aerodynamiczne określamy względem współrzędnych wektora prędkości samolotu. Korzystając z zależności (2.2-3), możemy zdefiniować kąt natarcia α oraz kąt ślizgu β jako:

$$\alpha = arctg\frac{V_{az}}{V_{ax}} \tag{2.4}$$

$$\beta = arcsin\frac{V_{ay}}{V_a} \tag{2.5}$$

Przed wprowadzeniem odpowiednich równań opisujących ruch samolotu przedstawimy trzy macierze transformacji, które wiążą poszczególne układy współrzędnych względem których będziemy rozpatrywali ruch samolotu jako ciała sztywnego (rys.1).



Rys. 1. Przyjęte układy odniesienia
Fig. 1. Reference coordinate systems

1. Macierz transformacji L_{BV}, która umożliwia przejście z układu związanego z Ziemią o początku ustalonym na samolocie F_V do układu związanego z samolotem F_B:

$$L_{BV}=\begin{bmatrix} \cos\theta\cos\psi & \cos\theta\sin\psi & -\sin\theta \\ \sin\phi\sin\theta\cos\psi-\cos\phi\sin\psi & \sin\phi\sin\theta\sin\psi+\cos\phi\cos\psi & \sin\phi\cos\theta \\ \cos\phi\sin\theta\cos\psi+\sin\phi\sin\psi & \cos\phi\sin\theta\sin\psi-\sin\phi\cos\psi & \cos\phi\cos\theta \end{bmatrix} \tag{2.6}$$

2. Macierz transformacji D_{BW}, która wiąże układ przepływowy F_W oraz układ związany z samolotem F_B:

$$D_{BW}=\begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta & -\cos\alpha\sin\beta & -\sin\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta & 0 \\ \sin\alpha\cos\beta & -\sin\alpha\sin\beta & \cos\alpha \end{bmatrix} \tag{2.7}$$

3. Macierz T_ω wiążąca kąty Eulera z prędkościami kątowymi samolotu:

$$T_\omega=\begin{bmatrix} 1 & \sin\phi\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} & \cos\phi\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \dfrac{\sin\phi}{\cos\theta} & \dfrac{\cos\phi}{\cos\theta} \end{bmatrix} \tag{2.8}$$

Natomiast ruch samolotu opisany jest przez następujący nieliniowy układ dwunastu równań:

$$m\left(\dot{U}+QW-RV+g\sin\theta\right)=F_X \tag{2.9}$$

$$m\left(\dot{V}+RU-PW-g\sin\phi\cos\theta\right)=F_Y \tag{2.10}$$

$$m\left(\dot{W}+PV-QU-g\cos\phi\cos\theta\right)=F_Z \tag{2.11}$$

$$\dot{P}I_X+QR\left(I_Z-I_Y\right)-\left(PQ+\dot{R}\right)I_{XZ}=L \tag{2.12}$$

$$\dot{Q}I_Y+PR\left(I_X-I_Z\right)+\left(P^2-R^2\right)I_{XZ}=M \tag{2.13}$$

$$\dot{R}I_Z+PQ\left(I_Y-I_X\right)+\left(QR-\dot{P}\right)I_{XZ}=N \tag{2.14}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}=T_\omega\begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} \tag{2.15}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_E \\ \dot{y}_E \\ \dot{z}_E \end{pmatrix}=L^T_{BV}\begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix}, \tag{2.16}$$

gdzie:

m - masa samolotu,

g - przyspieszenie ziemskie,

$\overline{F} = [F_X, F_Y, F_Z]^T$ - wektor sumy sil aerodynamicznych i ciągu,

$\overline{M} = [L, M, N]^T$ - wektor momentu pochodzący od sił zewnętrznych i ciągu,

$I = \begin{bmatrix} I_X & -I_{XY} & -I_{XZ} \\ -I_{XY} & I_Y & -I_{YZ} \\ -I_{XZ} & -I_{YZ} & I_Z \end{bmatrix}$ - tensor bezwładności (macierz momentów bezwładności).

Przedstawiony układ równań stanowi podstawę budowy modelu samolotu, dalszej analizy samego modelu, jak i całego układu sterowania.

3. Model aerodynamiczny samolotu

3.1. Siły i momenty działające na samolot

Siły i momenty w środku grawitacji (cg) samolotu mają dwie składowe: aerodynamiczną *(indeks $_A$)* i ciągu silnika *(indeks $_T$)*.

Siły działające na samolot możemy określić w postaci następującego równania wektorowego wyrażonego w układzie F_B [6]:

$$\overline{F} = \begin{pmatrix} F_X \\ F_Y \\ F_Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{XT} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_{XA} \\ F_{YA} \\ F_{ZA} \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

W równaniu tym występuje tylko składowa F_{XT} siły ciągu, a pominięte zostały składowe F_{YT} i F_{ZT}, ponieważ F-16 posiada jeden silnik usytuowany wzdłuż osi symetrii.

Natomiast momenty sił działające na samolot podczas lotu w układzie F_B zaproponowano w [6] jako:

$$\overline{M} = \begin{pmatrix} L \\ M \\ N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -M_{obr}R \\ M_{obr}Q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} L_A \\ M_A \\ N_A \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

gdzie M_{obr} - kręt wirujących elementów silnika.

Siła działająca na ciało poruszające się w pewnym ośrodku z określoną prędkością jest wyrażona za pomocą wzoru:

$$F = c_F \frac{1}{2} \rho V^2{}_\alpha S, \tag{3.3}$$

gdzie:

c_F - bezwymiarowy współczynnik siły,

ρ - gęstość ośrodka,

V_α - prędkość ciała względem ośrodka,

S - powierzchnia charakterystyczna ciała.

Zgodnie ze wzorami (3.1) i (3.3) możemy określić postać sił działających na samolot w czasie lotu jako:

$$\begin{pmatrix} F_X \\ F_Y \\ F_Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{XT} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \rho V^2{}_\alpha S \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix}, \tag{3.4}$$

gdzie:

c_x, c_y, c_z - wartości współczynników sił w układzie F_B wyznaczone doświadczalnie w tunelu aerodynamicznym,

V_α - prędkość samolotu względem atmosfery,

S - powierzchnia skrzydeł.

Natomiast moment siły działający na ciało poruszające się w pewnym ośrodku z określaną prędkością jest określony następującą zależnością:

$$M_M = m_M \frac{1}{2} \rho V^2{}_\alpha S k, \tag{3.5}$$

gdzie:

m_M - bezwymiarowy współczynnik momentu siły,

k - długość charakteryzująca ciało.

Zgodnie z wyrażeniami (3.2) oraz (3.5) możemy przedstawić, w zapisie wektorowym, momenty sił działające na samolot w czasie lotu:

$$\begin{pmatrix} L \\ M \\ N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -M_{ohr} R \\ M_{ohr} Q \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \rho V^2{}_\alpha S \begin{pmatrix} bm_x \\ cm_y \\ bm_z \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

Model samolotu jest nieliniowy zarówno wskutek równań dynamiki ciała sztywnego, jak i aerodynamiki samolotu zawartej na przykład w tablicach danych doświadczalnych określających współczynniki sił i momentów.

Dla przykładowego modelu samolotu F-16 bezwymiarowe współczynniki sił c_i wyznaczone w wyniku badań w tunelu aerodynamicznym są określone w układzie samolotu F_B w następującej formie [6]:

$$c_x = c_x(\alpha, \delta_H) + cQ\frac{1}{2V_a}D_1(\alpha) \tag{3.7}$$

$$c_y = c_y(\beta, \delta_L, \delta_K) + b\frac{1}{2V_a}[D_2(\alpha)R + D_3(\alpha)P] \tag{3.8}$$

$$c_z = c_z(\alpha, \beta, \delta_H) + cQ\frac{1}{2V_a}D_4(\alpha), \tag{3.9}$$

gdzie:

$c_x(\alpha, \delta_H)$ - współczynnik siły działającej wzdłuż osi x w funkcji α, δ_H,

$c_y(\beta, \delta_L, \delta_K)$ - współczynnik siły działającej wzdłuż osi y w funkcji β, δ_L, δ_K,

$c_z(\alpha, \beta, \delta_H)$ - współczynnik siły działający wzdłuż osi z w funkcji α, β, δ_H,

$D_i(\alpha)$ - współczynniki tłumiące zależne od α, $(i = 1, \ldots, 9)$,

c - średnia długość cięciwy płata skrzydła,

b - rozpiętość skrzydeł,

δ_H - ster wysokości,

δ_K - ster kierunku,

δ_L - ster lotek.

Współczynniki momentów sił mają następującą postać [6]:

$$m_x = m_x(\alpha, \beta) + dlda(\alpha, \beta)\frac{\delta_L}{20} + dldr(\alpha, \beta)\frac{\delta_K}{30} + b\frac{1}{2V_a}[D_5(\alpha)R + D_6(\alpha)P] \tag{3.10}$$

$$m_y = m_y(\alpha, \delta_H) + cQ\frac{1}{2V_a}D_7(\alpha) + c_z(x_{cgr} - x_{cg}) \tag{3.11}$$

$$m_z = m_z(\alpha, \beta) + dnda(\alpha, \beta)\frac{\delta_L}{20} + dndr(\alpha, \beta)\frac{\delta_K}{30} + b\frac{1}{2V_a}[D_8(\alpha)R + D_9(\alpha)P] + \\ - c_y\frac{c}{b}(x_{cgr} - x_{cg}), \tag{3.12}$$

gdzie:

x_{cgr} - składowa x położenia środka ciężkości samolotu,

x_{cg} - składowa x reprezentująca przesunięcie środka ciężkości samolotu,

$m_x(\alpha, \beta)$ - współczynnik momentu wzdłuż osi x,

$m_y(\alpha, \delta_H)$ - współczynnik momentu wzdłuż osi y,

$m_z(\alpha,\beta)$ - współczynnik momentu wzdłuż osi z,

$dlda(\alpha,\beta)$ - współczynnik momentu przechylającego względem steru lotek,

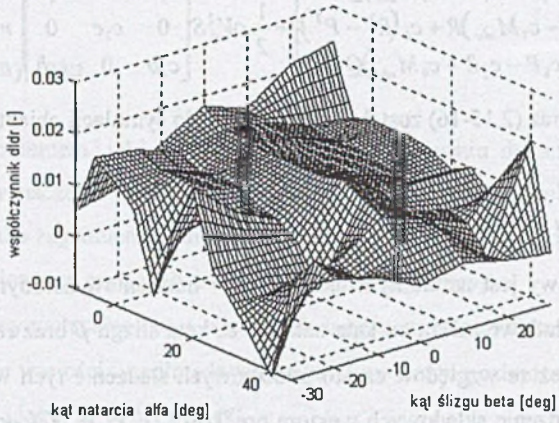
$dldr(\alpha,\beta)$ - współczynnik momentu przechylającego względem steru kierunku,

$dnda(\alpha,\beta)$ - współczynnik momentu odchylającego względem steru lotek,

$dndr(\alpha,\beta)$ - współczynnik momentu odchylającego względem steru kierunku.

We wzorach (3.10), (3.12) wprowadzono dzielniki 20 i 30 w celu znormalizowania bezwymiarowych współczynników momentów sił aerodynamicznych. Podział liczbowy wynika z zakresu zmian wychylenia steru lotek $\delta_L = \pm 20$ [°] i steru kierunku $\delta_K = \pm 30$ [°].

Wykres współczynnika momentu przechylającego względem steru kierunku przedstawia rys. 2.



Rys. 2. Współczynnik momentu *dldr*
Fig. 2. Moment coefficient *dldr*

3.2. Nieliniowy model samolotu

W dalszym toku rozważań pomijamy ruch atmosfery względem Ziemi, a to pozwala stwierdzić, na podstawie równania (2.2), że prędkość samolotu względem Ziemi i względem atmosfery jest taka sama:

$$(\overline{V}_a)_{F_B} = (\overline{V}_E)_{F_B} = \begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix} \tag{3.13}$$

Opis modelu w układzie związanym z samolotem wynika bezpośrednio z równań ruchu bryły sztywnej w przyjętym układzie współrzędnych. Ponadto prosta składnia tych równań ułatwia wykonywanie obliczeń. Z tego względu równania wyrażone w układzie związanym z samolotem wykorzystamy do wyznaczenia warunków wyważania samolotu. Natomiast wyrażenia określające ruch samolotu w układzie przepływowym pozwolą na wyznaczenie nowych zmiennych stanu V_a, β, α, które wykorzystane będą w algorytmie sterowania.

3.2.1. Model w układzie związanym z samolotem

Równania stanu modelu w układzie związanym z samolotem mają następującą postać:

$$\begin{pmatrix} \dot{U} \\ \dot{V} \\ \dot{W} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} RV - QW \\ PW - RU \\ QU - PV \end{pmatrix} + L_{BI} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{pmatrix} + \frac{1}{m} \begin{pmatrix} F_{XT} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2m} \rho V_a^2 S \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix} \tag{3.14}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{P} \\ \dot{Q} \\ \dot{R} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (c_2 P + c_1 R + c_3 M_{obr}) Q \\ (c_5 P - c_7 M_{obr}) R + c_6 (R^2 - P^2) \\ (c_8 P - c_2 R + c_9 M_{obr}) Q \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \rho V_a^2 S \begin{bmatrix} c_3 b & 0 & c_4 b \\ 0 & c_7 c & 0 \\ c_4 b & 0 & c_9 b \end{bmatrix} \begin{pmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{pmatrix} \tag{3.15}$$

Równania (3.14-15) oraz (2.15-16) zostały wykorzystane do symulacji obiektu w środowisku Matlab®.

3.2.2. Model samolotu w układzie przepływowym

Układ przepływowy jest naturalnym układem sił i momentów aerodynamicznych, których poszczególne składowe zależą od kąta natarcia α, kąta ślizgu β oraz rzeczywistej prędkości lotu V_a. Również ze względów czysto pilotażowych śledzenie tych wielkości jest dogodniejsze aniżeli śledzenie składowych wektora prędkości U, V, W. Z tego względu przedstawimy model samolotu w układzie przepływowym, co pozwoli nam przedefiniować wektor stanu i zastąpić zmienne U, V, W nowymi zmiennymi stanu α, β, V_a.

Równania stanu (3.14) możemy zapisać w następującej postaci:

$$\dot{V}_B = -\omega_B \times V_B + L_{BV} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{pmatrix} + \frac{1}{m} \begin{pmatrix} F_{XT} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2m} \rho V_a^2 S \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix} \tag{3.16}$$

Przejście z układu związanego z samolotem do układu przepływowego polega na przekształceniu powyższych równań stanu poprzez macierz transformacji D^T_{BW}:

$$D_{BW}^{T}\frac{d}{dt}(D_{BW}V_{W})=-D_{BW}^{T}\omega_{B}\times D_{BW}^{T}V_{B}+D_{BW}^{T}L_{m}\begin{pmatrix}0\\0\\g\end{pmatrix}+D_{BW}^{T}\frac{1}{m}\begin{pmatrix}F_{XT}\\0\\0\end{pmatrix}+\frac{1}{2m}\rho V_{a}^{2}SD_{BW}^{T}\begin{pmatrix}c_{x}\\c_{y}\\c_{z}\end{pmatrix} \tag{3.17}$$

Po przekształceniach otrzymamy równania:

$$\dot{V}_{a}=g_{1}+\cos\alpha\cos\beta\frac{F_{XT}}{m}+\frac{1}{2m}\rho V_{a}^{2}S(\cos\alpha\cos\beta\, c_{x}+\sin\beta\, c_{y}+\sin\alpha\cos\beta\, c_{z}) \tag{3.18}$$

$$\dot{\beta}=-R_{W}+\frac{g_{2}}{V_{a}}-\cos\alpha\sin\beta\frac{F_{XT}}{mV_{a}}+\frac{1}{2m}\rho V_{a}S(\cos\beta\, c_{y}-\cos\alpha\sin\beta\, c_{x}-\sin\alpha\sin\beta\, c_{z}) \tag{3.19}$$

$$\dot{\alpha}=\frac{Q_{W}}{\cos\beta}+\frac{g_{3}}{\cos\beta\, V_{a}}-\frac{\sin\alpha\, F_{XT}}{\cos\beta\, mV_{a}}+\frac{1}{2m}\rho\frac{V_{a}}{\cos\beta}S(\cos\alpha\, c_{z}-\sin\alpha\, c_{x}), \tag{3.20}$$

które wraz z (3.15), (2.15-16) tworzą układ dwunastu nieliniowych równań stanu wyrażonych w układzie przepływowym.

4. Stan ustalony lotu

Istotnym problemem, jaki napotykamy przy modelowaniu dynamiki złożonego ruchu samolotu jest wyznaczenie warunków początkowych tego ruchu. Problem ten rozszerzono i potraktowano jako zagadnienie określania ustalonego stanu lotu zdeterminowanego przez:

- niezmienne w czasie siły aerodynamiczne i grawitacyjne,
- ustalony ruch samolotu, a więc pochodne po czasie parametrów lotu są równe zero,
- zerowe wartości współrzędnych wektora momentu pochodzącego od sił zewnętrznych i ciągu: $L=0,\ M=0,\ N=0$.

Warunki ustalonego stanu lotu w zwięzłej formie możemy zapisać jako:

$$\dot{V}_{a}=0,\quad \dot{\alpha}=\dot{\beta}=0,\quad \dot{P}=\dot{Q}=\dot{R}=0 \tag{4.1}$$

Rozwiązanie tego zagadnienia z uwzględnieniem powyższych warunków polega na obliczeniu wartości współrzędnych wektora stanu $\overline{X}$ i wektora sterowań $\overline{U}$ określonych jako:

$$\overline{X}=[V_{a},\beta,\alpha,P,Q,R,\phi,\theta,\psi,x,y,z]^{T} \tag{4.2}$$

$$\overline{U}=[\delta_{T},\delta_{H},\delta_{K},\delta_{L}]^{T} \tag{4.3}$$

Rozwiązanie analityczne jest niemożliwe ze względu na to, iż dane aerodynamiczne są uwikłane w złożonych funkcjach (3.18-20), (3.15), (2.15-16). Do rozwiązania użyjemy algorytmu numerycznego.

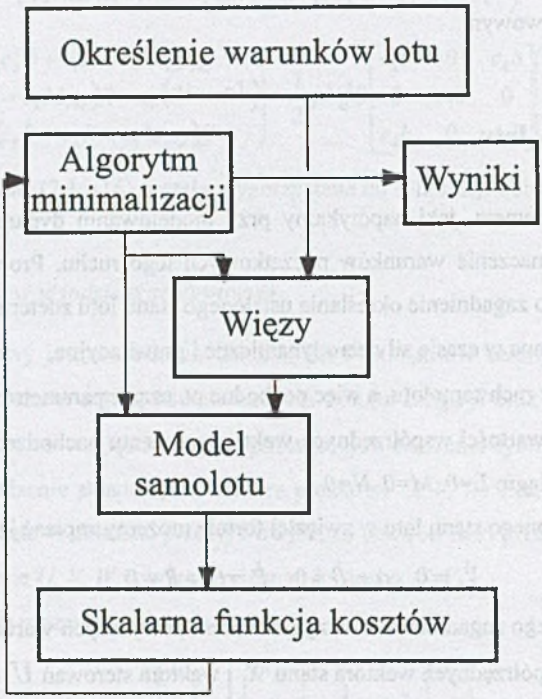
4.1. Algorytm wyważania

Naszym celem jest rozwiązanie nieliniowych równań stanu (2.15-16), (3.15), (3.18-20), a więc określenie związku pomiędzy wartościami zmiennych stanu $\overline{X}$ i sterowania $\overline{U}$ poprzez zastosowanie numerycznego algorytmu minimalizacji. Wykorzystano do tego funkcję *fmins*, zawartą w bibliotece *Optimisation Toolbox* Matlab'a [7], która poszukuje minimum funkcji wielu zmiennych wykorzystując algorytm sympleksu Neldera-Meada.

Funkcję kosztów zdefiniowano na podstawie zależności (4.1) jako sumę kwadratów pochodnych stanu:

$$J = \dot{V}_a^2 + 100\left(\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2\right) + 10\left(\dot{P}^2 + \dot{Q}^2 + \dot{R}^2\right) \tag{4.4}$$

Rysunek 3 przedstawia strukturę algorytmu wyważania.



Rys. 3. Algorytm wyważania
Fig. 3. Trim algorithm

Pewne zmienne stanu określające warunki początkowe algorytmu można zadać niezależnie:

- kąt odchylenia ψ_O,
- wysokość $h_O = -z_E$,

- współrzędne położenia x_E, y_E mogą tymczasowo zostać wyeliminowane z rozważań,
- prędkość lotu $V_{\alpha O}$,
- kąt ścieżki lotu γ_O, który zdefiniowany jest jako:

$$\gamma_O\big|_{\phi=\beta=0} = \theta_O - \alpha_O \tag{4.5}$$

- oraz dla zakrętu prawidłowego prędkość kątową $\dot{\psi}$.

Natomiast pozostałe zmienne stanu są wyznaczane z więzów.

Wszystkie zmienne sterowania δ_T, δ_H, δ_K, δ_L wprowadzane są do modelu tylko przez stabelaryzowane dane aerodynamiczne i dlatego nie możemy określić żadnych analitycznych więzów dla tych wielkości. Z tego względu wprowadzamy początkowe dowolne wartości sterów, które będą poprawiane poprzez minimalizację funkcji celu.

Warunki stanu ustalonego lotu określimy dla dwóch przypadków:

- lotu postępowego,
- zakrętu prawidłowego.

4.1.1. Lot ustalony postępowy

Dla dalszych rozważań przyjmujemy, że samolot znajduje się w stanie ustalonym, jeśli:

- wykonuje lot bez przyspieszeń liniowych i kątowych po trajektorii będącej linią prostą,
- opływ kadłuba samolotu przez atmosferę jest symetryczny,
- lot odbywa się przy kącie przechylenia $\phi = 0$ i kącie ślizgu $\beta = 0$.

A więc w stanie ustalonym parametry lotu będą następujące:

$$\begin{aligned} &\dot{U}_O = \dot{V}_O = \dot{W}_O = 0 \\ &\dot{P}_O = \dot{Q}_O = \dot{R}_O = 0 \\ &\dot{V}_{\alpha O} = \dot{\alpha}_O = \dot{\beta}_O = 0 \end{aligned} \qquad \text{oraz} \qquad \begin{aligned} &U_O \neq 0, W_O \neq 0, V_O = 0 \\ &P_O = Q_O = R_O = 0 \\ &\phi_O = 0, \theta_O \neq 0, \psi_O \neq 0 \\ &V_{\alpha O} \neq 0, \alpha_O \neq 0, \beta_O = 0 \end{aligned}$$

Konfrontując powyższe założenia z równaniami ruchu samolotu (2.9-16) oraz uwzględniając zadane warunki początkowe algorytmu wyznaczamy z więzów pozostałe zmienne stanu α_O, θ_O.

Kąt natarcia α_O oraz prędkość lotu $V_{\alpha O}$ są wzajemnie zależne poprzez ilość siły nośnej F_{XT} potrzebnej do utrzymania samolotu. Korzystając z równań (3.7), (3.14) i zapisując w jawnej postaci składową $\dot{U}$ wektora prędkości, uzyskamy dla ustalonego stanu lotu następującą zależność:

$$0 = -g\sin\theta_O + \frac{F_{XTO}}{m} + \frac{1}{2m}\rho V_{aO}^2 S c_x(\alpha_O, \delta_{HO}) \tag{4.6}$$

W celu wstępnego oszacowania wartości kąta natarcia α_O pomijamy czynnik grawitacji w zależności (4.6). W ten sposób otrzymamy równanie równowagi sił w postaci:

$$\frac{1}{2m}\rho V_{aO}^2 S c_x(\alpha_O, \delta_{HO}) = -\frac{F_{XTO}}{m} \tag{4.7}$$

W tym równaniu kąt natarcia α_O występuje w postaci uwikłanej, gdyż jest parametrem bezwymiarowego współczynnika siły c_x. Wartość kąta natarcia α_O wyznaczamy numerycznie.

Kąt pochylenia θ_O zgodnie z [6] wyznaczamy z więzów prędkości wznoszenia *ROC*.

ROC (Rate-of-Climb) – więzy prędkości wznoszenia

Zależność pomiędzy prędkością w układzie F_W i F_V określona jest przez macierze transformacji L_{BV} i D_{BW} - odpowiednio równania (2.6), (2.7):

$$(\bar{V})_V = L_{BV}^T D_{BW} V_W \tag{4.8}$$

W układzie związanym z Ziemią F_V prędkość wznoszenia łatwo wyrazić poprzez kąt ścieżki lotu jako z-ową składową całkowitej prędkości *(zapis "*" oznacza, że składowe $(V_X)_V, (V_Y)_V$ są nieistotne w trakcie wyprowadzania zależności dla kąta θ)*:

$$\begin{pmatrix} * \\ * \\ -V_a \sin\gamma \end{pmatrix} = L_{BV}^T D_{BW} \begin{pmatrix} V_a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.9}$$

Jeśli równanie trzecie z (4.9) zapiszemy w postaci jawnej i uporządkujemy stronami, to uzyskamy:

$$\sin\gamma = a\sin\theta - b\cos\theta, \tag{4.10}$$

gdzie:

$$a = \cos\alpha\cos\beta$$
$$b = \sin\phi\sin\beta + \cos\phi\sin\alpha\cos\beta$$

Rozwiązując równanie (4.10) względem θ otrzymamy następujący wynik:

$$\theta = arctg\left(\frac{ab + \sin\gamma\sqrt{a^2 - \sin^2\gamma + b^2}}{a^2 - \sin^2\gamma}\right) \tag{4.11}$$

Zapisując równania (4.10-11) dla ustalonego stanu lotu ostatecznie otrzymamy:

$$\sin\gamma_O = a_O \sin\theta_O - b_O \cos\theta_O, \tag{4.12}$$

gdzie:

$$a_O = \cos\alpha_O$$
$$b_O = \sin\alpha_O$$

oraz

$$\theta_O = arctg\left(\frac{\sin\alpha_O \cos\alpha_O + \sin\gamma_O\sqrt{1-\sin^2\gamma_O}}{\cos^2\alpha_O - \sin^2\gamma_O}\right) \tag{4.13}$$

Numeryczne rozwiązanie równania (4.7) oraz równanie (4.13) dostarczą nam rozwiązania dla pozostałych zmiennych stanu, określając tym samym warunki stanu ustalonego lotu postępowego.

4.1.2. Zakręt prawidłowy

Określenie „zakręt prawidłowy" oznacza, że będzie wykonywany bez ślizgu, a więc dla $\beta = 0^o$. W tej sytuacji w stanie ustalonym parametry lotu będą następujące:

$$\dot{U}_O = \dot{V}_O = \dot{W}_O = 0 \qquad U_O \neq 0, V_O \neq 0, W_O = 0$$
$$\dot{P}_O = \dot{Q}_O = \dot{R}_O = 0 \qquad \text{oraz} \qquad P_O = 0, Q_O = 0, R_O \neq 0$$
$$\dot{V}_{\alpha O} = \dot{\alpha}_O = \dot{\beta}_O = 0 \qquad \phi_O \neq 0, \theta_O \neq 0, \psi_O \neq 0$$
$$V_{\alpha O} \neq 0, \alpha_O \neq 0, \beta_O = 0$$

Tak jak w przypadku lotu postępowego, pewne zmienne stanu można określić niezależnie, również kąt natarcia wyznaczamy w ten sam sposób, stosując równanie (4.7), natomiast uwagę skupimy na wyznaczeniu kąta ϕ i θ.

W układzie F_W wektor prędkości V_α jest styczny do trajektorii lotu, którą jest okrąg i dlatego działające przeciążenie możemy wyrazić zgodnie z [6] jako:

$$G = \frac{\dot{\psi} V_\alpha}{g} \tag{4.14}$$

Prawidłowy zakręt jest wykonywany przy takim kącie przechylenia ϕ, który nie generuje składowej bocznej siły aerodynamicznej. Stosując przedstawiony warunek koordynacji $F_Y = 0$ do równania ruchu bocznego (2.10) i uwzględniając warunek stanu ustalonego lotu $\dot{V}_O = 0$, otrzymamy:

$$0 = -RU + PW + g\sin\phi\cos\theta \tag{4.15}$$

Na powyższym równaniu wykonujemy następujące operacje:

- wykorzystując (2.15) zastępujemy prędkości kątowe P, R prędkościami wynikającymi z kątów Eulera, w których $\dot{\phi} = \dot{\theta} = 0$ oraz $\dot{\psi}$ jest prędkością wykonywania zakrętu,

- korzystając z zależności (4.16) prędkości liniowe U, W przeliczamy na układ przepływowy:

$$\left(\overline{V}_a\right)_{F_n} = \begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix} = D_{HW}\left(\overline{V}_a\right)_{F_H} = \begin{pmatrix} V_a \cos\alpha \cos\beta \\ V_a \sin\beta \\ V_a \sin\alpha \cos\beta \end{pmatrix}, \tag{4.16}$$

- uwzględniamy zależność (4.14).

Po przeliczeniu uzyskamy następujący wynik:

$$\sin\phi = G\cos\beta\left(\sin\alpha tg\theta + \cos\alpha\cos\phi\right) \tag{4.17}$$

Zależności (4.17) i (4.11) tworzą układ równań, który umożliwia wyznaczenie warunków ustalonego stanu lotu dla zakrętu prawidłowego z jednoczesnym wznoszeniem. Rozwiązując układ równań ze względu na ϕ otrzymamy:

$$\phi = arctg\left(G\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}\frac{\left(a-b^2\right)+b\,tg\alpha\sqrt{c\left(1-b^2\right)+G^2\sin^2\beta}}{a^2-b^2\left(1+c\,tg^2\alpha\right)}\right), \tag{4.18}$$

gdzie:

$$a = 1 - G\,tg\alpha\sin\beta, \qquad b = \frac{\sin\gamma}{\cos\beta}, \qquad c = 1 + G^2\cos^2\beta.$$

Zapisując (4.18) dla ustalonego stanu lotu ostatecznie otrzymamy:

$$\phi_O = arctg\left(G_O\frac{1}{\cos\alpha_O}\frac{\left(1-b_O^2\right)+b_O\,tg\alpha_O\sqrt{c_O\left(1-b_O^2\right)}}{1-b_O^2\left(1+c_O\,tg^2\alpha_O\right)}\right), \tag{4.19}$$

gdzie:

$$b_O = \sin\gamma_O \qquad c_O = 1 + G_O^2$$

Uwaga:

W algorytmie wyważania w pierwszym kroku minimalizacji, zarówno lotu postępowego jak i zakrętu prawidłowego, uwzględniono wartość kąta ślizgu wynikającą z dowolnie przyjętych początkowych położeń sterów. Stosując warunek $F_y = 0$ dla równania (3.4) z uwzględnieniem (3.8) i współczynnika siły $c_y\left(\beta,\delta_L,\delta_K\right)$ [6]:

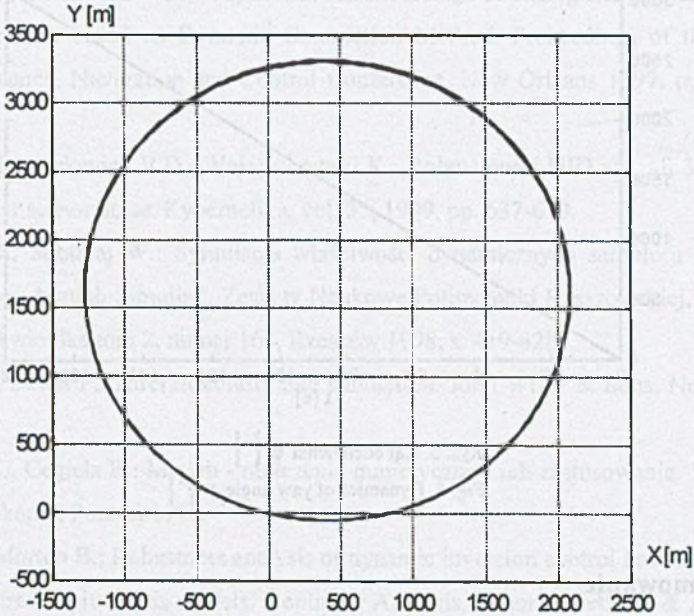
$$c_y\left(\beta,\delta_L,\delta_K\right) = -0.02\cdot\beta + 0.021\cdot\frac{\delta_L}{20} + 0.086\cdot\frac{\delta_K}{30}, \tag{4.20}$$

uzyskano następującą zależność:

$$\beta = \frac{5}{2}0.021\cdot\delta_L + \frac{5}{3}0.086\cdot\delta_K \tag{4.21}$$

4.2. Przykład

Na bazie modelu samolotu przedstawionego w poprzednim rozdziale oraz wyprowadzonych warunków ustalonego stanu lotu stworzono w środowisku Matlab program wyważania dla F-16. W celu sprawdzenia poprawności działania programu wykonano symulację zakrętu prawidłowego w układzie otwartym (rys.4). Wartości zmiennych stanu i sterowania, charakteryzujące ustalony stan lotu, wyznaczono za pomocą algorytmu wyważania i przedstawiono w tabelach (1), (2). Model samolotu wykonuje zakręt z zadaną prędkością kątową $\dot{\psi} = 0.3\,[rad/s]$ w określonym czasie symulacji $t = 180\,[s]$.



Rys. 4. Trajektoria lotu
Fig. 4. Flight trajectory

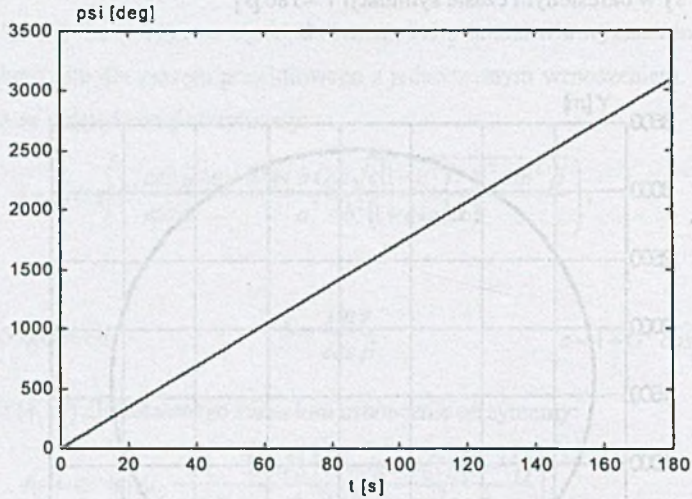
Tabela 1

Zmienne stanu											
V_a [ft/s]	α [°]	β [°]	ϕ [°]	θ [°]	ψ [°]	P [rad/s]	Q [rad/s]	R [rad/s]	x [ft]	y [ft]	h [ft]
502	14.24	0	78.32	2.97	0	-0.015	0.293	0.061	0	0	10000

Tabela 2

Wychylenia sterów			
δ_T [°]	δ_H [°]	δ_K [°]	δ_L [°]
0.8499	-6.256	-0.4218	0.09891

W ograniczonym czasie symulacji i z określoną prędkością kątową model samolotu wykonał 8.6 obrotu (rys.5). Zerowa wartość kąta ślizgu β oraz odpowiedni dobór kąta przechylenia ϕ zapewniły wykonanie lotu po tej samej trajektorii.



Rys. 5. Kąt odchylenia $\psi\left[^{o}\right]$

Fig. 5. Dynamics of yaw angle $\psi\left[^{o}\right]$

5. Podsumowanie

W artykule przedstawiono model matematyczny samolotu w układzie związanym z samolotem i w układzie przepływowym, który wykorzystano do symulacji F-16. Zrealizowano zasadniczy cel pracy, a mianowicie: określono warunki ustalonego stanu lotu (trimmed flight conditions) oraz przedstawiono sposób realizacji numerycznego algorytmu wyważania w środowisku Matlab®. Wyniki działania programu pokazano na przykładzie symulacji lotu w układzie otwartym. Użyty model samolotu jest nieliniowy zarówno wskutek równań dynamiki ciała sztywnego, jak i aerodynamiki samolotu zawartej w tablicach danych doświadczalnych określających współczynniki sił i momentów. Opis w postaci tablic okazał się wyjątkowo nieczytelny i był powodem wielu trudności powstałych w trakcie wyznaczania warunków

ustalonego stanu lotu. Z tego względu przedstawiono w artykule szczegółowy opis modelu i poświęcono wiele uwagi zagadnieniu określania ustalonego stanu lotu.

LITERATURA

1. Balas G., Garrard W., Reiner J.: Robust dynamic inversion for control of highly maneuverable aircraft. Journal of Guidance Control & Dynamics, vol. 18, 1995, pp. 18-24.
2. Blajer W., Graffstein J., Krawczyk M.: Aircraft program motion and control in prescribed trajectory flight. Fourth International Symposium on Methods and Models in Automation and Robotics, Międzyzdroje 1997, pp. 351-356.
3. Błachuta M., Yurkevich V.D., Wojciechowski K.: Design of analog and digital aircraft flight controllers based on Dynamic Contraction Method. Proceedings of the 1997 AIAA Guidance, Navigation and Control Conference, New Orleans 1997, pp. 1719-1729.
4. Błachuta M., Yurkevich V.D., Wojciechowski K.: Robust quasi NID aircraft 3D flight control under sensor noise. Kybernetika, vol. 35, 1999, pp. 637-650.
5. Borowski J., Sobieraj W.: Symulacja właściwości dynamicznych samolotu MIG-29 w środowisku Matlab-Simulink. Zeszyty Naukowe Politechniki Rzeszowskiej, Mechanika z.51, Awionika tom 2, numer 168, Rzeszów 1998, s. 419-428.
6. Stevens B., Lewis F.: Aircraft control and simulation. John Wiley & Sons, New York 1992.
7. Zalewski A., Cegieła R.: Matlab - obliczenia numeryczne i ich zastosowania. Wydawnictwo „Nakom", Poznań 1996.
8. Zhang B., Morton B.: Robustness analysis of dynamic inversion control laws applied to nonlinear aircraft pitch-axis models. Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications, vol. 32, Great Britain 1998, pp. 501-532.

Recenzent: Dr hab. inż. Andrzej Tomczyk

Wpłynęło do Redakcji 18.12.2000 r.

Abstract

In the paper, a mathematical model in the body and wind axis systems of the aircraft F-16 was presented. The major goal of this paper was realized, e.g.: the conditions of the steady-state flight for the object and the trimmer algorithm of Matlab® package were presented. The results of the trimmer program by an example of simulation in the open-loop system were illustrated. The used aircraft model is nonlinear due to the rigid body dynamic equations and to the aerodynamics represented in the data lookup tables of the force and the moment components. The lookup tables description appeared very abstruse and caused many difficulties during defining of steady-state flight conditions. Therefore in the paper detailed description of the aircraft model and the trimmer problem was presented.