

Grzegorz DYSARZ

WPLYW ZMIAN MACIERZY INTENSYWNOŚCI PRZEJŚĆ NA STEROWANIE W LINIOWYCH SYSTEMACH ZE SKOKAMI

Streszczenie. W pracy przedstawiono komputerowy symulator procesów markowskich dla dwóch stanów. Przebadano wpływ zmian macierzy intensywności przejść na jakość sterowania w liniowych układach ze skokami. Zaproponowano sterowanie, będące wynikiem syntezy uwzględniającej dwa modele z różnymi macierzami intensywności przejść, zależnie od wartości normy wektora stanu.

THE EFFECT OF INTENSITIVITY TRANSITION MATRIX CHANGES ON CONTROL OF LINEAR SYSTEMS WITH JUMPS

Summary. This paper deals with the problem of influence change of matrix transition probabilities on control quality in Jump Linear Quadratic (JLQ) systems. The proposed control law is based on two models with two different matrixs transition probabilities state norm dependent. Computer's generator of Markov process is also presented.

1. Wstęp

Liniowe systemy ze skokami, omówione w pracy, są obecnie przedmiotem intensywnych badań. Wynika to z faktu, że stanowią one odpowiedni model dla szeregu procesów pojawiających się w zagadnieniach sterowania realnymi układami. Służą one między innymi do modelowania systemów zasilania energetycznego [3], sterowania odbiornikami energii słonecznej [4], elastycznych systemów produkcyjnych [5], układów sterowania tolerujących zakłócenia. Parametry układów rzeczywistych nie są stałe. Ulegają one często nagłym zmianom, w wyniku na przykład awarii elementów systemu, gwałtownej zmiany punktu pracy, skokowych zakłóceń, a ich zmienność ma zazwyczaj charakter przypadkowy. Można więc sobie wyobrazić układ pracujący w różnych trybach pracy,

wynikających z faktu, że struktura i parametry podlegają nagłym zmianom. Zmiany te mogą być opisane poprzez ciągle skończone procesy Markowa.

W artykule tym przedstawiono:

1. Propozycję komputerowego symulatora procesów markowskich o dwóch trybach.

Generator bazuje na procedurze generowania interwałów czasowych pomiędzy kolejnymi skokami, zgodnie z zadaną macierzą intensywności przejść.

2. Wpływ zmienności macierzy intensywności przejść w zależności od normy wektora stanu na jakość sterowania w systemach JIQ.

2. Podstawowe pojęcia i definicje

Model ciągłych układów liniowych ze skokami Markowa jest opisany równaniem [1]:

$$\dot{x}(t) = A(r(t))x(t) + B(r(t))u(t), \quad (1)$$

gdzie:

$x(t) \in R^n$ - wektor stanu,

$u(t) \in R^m$ - sterowanie (wejście),

A - $(n \times n)$ - wymiarowa macierz o elementach a_{ij} , gdzie $i, j = 1, 2, \dots, n$,

B - $(n \times m)$ - wymiarowa macierz o elementach b_{ij} , gdzie $i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m$.

Macierze A i B są funkcjami przypadkowych ciągłych procesów Markowa $r(t)$ o dyskretnych stanach przybierających wartości z ograniczonego zbioru $S = \{1, 2, \dots, s\}$ z macierzową funkcją prawdopodobieństw przejść P określoną jako:

$$P(h) = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1s} \\ p_{21} & \dots & \dots & p_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{s1} & \dots & \dots & p_{ss} \end{bmatrix} = \Pr\{r(t+h) = j \mid r(t) = i\} = \begin{cases} q(i, j)h + 0(h); & i \neq j \\ 1 + q(i, i)h + 0(h); & i = j \end{cases}, \quad (2)$$

gdzie: $h > 0$, $p_{ij}(h) = p(h, i, j)$ jest prawdopodobieństwem przejścia ze stanu i do j w czasie h .

Własności macierzowej funkcji prawdopodobieństw przejść [6]:

2.1. Dla wszystkich $i, j \in S$ funkcja $p(*, i, j)$ jest tożsamościowo równa zero lub dodatnia na przedziale $(0, \infty)$.

2.2. Dla wszystkich $i, j \in S$ funkcja $p(*, i, j)$ jest jednostajnie ciągła na $[0, \infty)$.

2.3. Funkcja ta jest różniczkowalna na przedziale $[0, \infty)$.

2.4. Prawostronną pochodną tej funkcji w zerze nazywamy macierzą intensywności przejść.

$$P'(0) = \Lambda = [q(i, j)]_{i, j \in S},$$

stąd elementy macierzy Λ są opisane następującymi zależnościami:

$$2.4.1. \quad q(i, j) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{p(h, i, j)}{h} \geq 0$$

$$2.4.2. \quad q(i, i) = -q(i) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{p(h, i, i) - 1}{h} \leq 0,$$

czyli można napisać, że

$$p(h, i, j) = q(i, j)h + 0(h)$$

oraz

$$p(h, i, i) - 1 = q(i, i)h + 0(h)$$

$$p(h, i, i) = 1 + q(i, i)h + 0(h)$$

$0(h)$ oznacza nieskończenie małą wyższego rzędu taką, że $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{0(h)}{h} = 0$.

Ponieważ prawdziwe jest równanie:

$$\sum_{j=1}^S q(i, j) = 0,$$

można je zapisać w postaci:

$$q(i, i) + \sum_{j=1; j \neq i}^S q(i, j) = 0,$$

skąd:

$$q(i, i) = - \sum_{j=1; j \neq i}^S q(i, j)$$

Przedmiotem optymalizacji jest następujący kwadratowy wskaźnik jakości [1]:

$$I(t_0, x(t_0), r(t_0), T, u) = E \left\{ \int_{t_0}^T [x^T(t) Q(r(t)) x(t) + u^T(t) R(r(t)) u(t)] dt \mid x(t_0), r(t_0) \right\} \quad (3)$$

Dla systemu opisanego równaniami (1)-(2) ze wskaźnikiem jakości (3) optymalne prawo sterowania ma następującą postać:

$$u(t, i) = -L_i(t)x(t),$$

gdzie: $L_i(t) = R_i^{-1} B_i^T K_i(t)$ dla $r(t) = i$,

(4)

a funkcja optymalnej jakości określona jest przez:

$$G_i(x, t, T) = J(t_0, x_0, r_0, T) - J(t_0, x_0, r_0, t) = x^T(t)K_i(t)x(t),$$

a $K_i(t)$ są jednoznacznie dodatnio półokreślonymi rozwiązaniami następującego układu skojarzonych różniczkowych macierzowych równań Riccatiego

$$\dot{K}_i(t) + [A_i - B_i L_i(t)]^T K_i(t) + K_i(t)[A_i - B_i L_i(t)] + \sum_{j=1}^s q(i, j)K_j(t) + Q_i + L_i^T R_i L_i = 0, \quad (5)$$

gdzie: $A_i = A(r(t))$ dla $r(t) = i$

$$B_i = B(r(t)) \text{ dla } r(t) = i$$

$$L_i = L(r(t)) \text{ dla } r(t) = i$$

$$R_i = R(r(t)) \text{ dla } r(t) = i$$

$$Q_i = Q(r(t)) \text{ dla } r(t) = i$$

$$K_i = K(r(t)) \text{ dla } r(t) = i$$

3. Komputerowy generator procesów Markowa dla dwóch trybów

W celu przeprowadzenia komputerowej symulacji systemu (1)-(2) konieczne jest zaprojektowanie odpowiedniego narzędzia generującego przejścia systemu z jednego trybu w drugi zgodnie z właściwościami procesów Markowa o odpowiednich parametrach. Proponuje się wykorzystanie czasów pobytu w każdym z trybów. Generator będzie bazował na losowaniu czasu pobytu w danym stanie zgodnie z odpowiednim rozkładem prawdopodobieństwa, a następnie po upływie tego czasu na przełączeniu układu w inny tryb pracy itd.

Z własności 2.4.2 wynika, że:

$$q(i) = -q(i, i) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1 - p(h, i, i)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{P[r(t+h) \neq i | r(t) = i]}{h},$$

gdzie $q(i)$ jest intensywnością ucieczki ze stanu i

$$-q(i) = q(i, i) = - \sum_{j=1, j \neq i}^s q(i, j),$$

więc dla odpowiednio małego przyrostu h i z dokładnością do nieskończenie małych wyższych rzędów otrzymuje się:

$$P[r(t+h) \neq i | r(t) = i] = q(i)h + o(h)$$

Dla $t \geq 0$ $q(i)h + 0(h)$ jest prawdopodobieństwem warunkowym zdarzenia polegającego na tym, że proces w chwili $t+h$ nie znajduje się w stanie i pod warunkiem, że w chwili t znajdował się również w stanie i .

$q(i)$ można powiązać z czasem pobytu procesu w stanie i , tzn. z czasem $t_p(i)$, który upływa do momentu wyjścia systemu z trybu i [6].

Przyjmując, że:

$$P_i[t_p(i) \geq t] = g_i(t); t \geq 0,$$

określa się jednocześnie prawdopodobieństwo przebywania systemu w trybie i .

Z własności Markowa mamy:

$$g_i(t+h) = P_i[t_p(i) \geq t+h] = P_i[r(u) = i; 0 < u \leq t+h \mid x(t) = i] = g_i(t)g_i(h) \quad (6)$$

Ponieważ spełniona jest równość:

$$g_i(h) = p(h, i, i) + 0(h) = 1 - q(i)h + 0(h), \quad (7)$$

zatem

$$g_i(t+h) = g_i(t)g_i(h) \quad (8)$$

Dla $h \rightarrow 0^+$ zgodnie z (6)

otrzymuje się:

$$g_i(h) = p(h, i, i) = 1 - q(i)0(h),$$

co pozwala zapisać $p(h, i, i)$ za pomocą współczynnika intensywności ucieczki $q(i)$.

Podstawiając za $g_i(h)$ w (8) zależność (7) otrzymuje się:

$$g_i(t+h) = g_i(t)[1 - q(i)0(h)]$$

$$g_i(t+h) = g_i(t) - g_i(t)q(i)0(h)$$

$$\frac{g_i(t+h) - g_i(t)}{h} = -g_i(t)q(i)\frac{0(h)}{h}$$

Stąd:

$$g_i'(t) = -q(i)g_i(t) \quad (9)$$

Równanie to rozwiązane z warunkiem początkowym $g_i(0) = 1$ przyjmuje postać:

$$g_i(t) = \exp[-q(i)t] \quad (10)$$

Otrzymane rozwiązanie stanowi rozkład prawdopodobieństw czasów pobytu w danym trybie. Czas pobytu układu w trybie i jest zatem zmienną losową o rozkładzie wykładniczym z parametrem $q(i)$. Generator będzie zatem działał w sposób następujący: Startując układ z trybu 1 losujemy jednocześnie zmienną o rozkładzie prawdopodobieństwa wykładniczym z

parametrem $q(l)$. Otrzymana wielkość jest czasem pobytu w trybie 1. Po upływie tego czasu układ przechodzi do trybu 2 i cała procedura się powtarza.

4. Zależność macierzy intensywności przejść od stanu.

U podstaw dotychczasowych rozważań leżały dwa założenia:

4.1. Dynamika modelu jest określona prawidłowo.

4.2. Macierz intensywności przejść jest stała.

W układach rzeczywistych nie jesteśmy w stanie bezbłędnie określić dynamiki obiektu. Urealnienie problemu 4.1 polega na wprowadzeniu do modelu (1) - (2) niepewności macierzy A i B , a następnie wyliczeniu poprawki na sterowanie wynikającej z niepełnej ich znajomości [2].

Podobnie macierz intensywności przejść nie jest w rzeczywistości stała i w pełni znana. Prawdopodobieństwo awarii np. urządzeń wykonawczych czy pomiarowych nie jest stałe, lecz zależy od wielu czynników. Dla przykładu prawdopodobieństwo awarii układów elektronicznych zależy od przekroczenia dopuszczalnych warunków pracy takich, jak: temperatura, wilgotność itp. Prawdopodobieństwo awarii rozproszonego systemu wodowskazowego w rzekach zależy od przekroczenia stanu krytycznego wody. Dla normalnego stanu wody prawdopodobieństwo awarii urządzeń pomiarowych jest niewielkie. Jednak kiedy stan wody się podniesie i mamy do czynienia z lokalnymi wylewami rzeki lub powodzią, prawdopodobieństwo uszkodzenia wodowskazu lub zalania linii telekomunikacyjnej znacznie wzrasta. Mamy do czynienia z nagłą skokową zmianą macierzy intensywności przejść, związaną z zaistnieniem nieoptymalnych warunków.

W pracy proponuje się rozważenie sterowania będącego wynikiem syntezy uwzględniającej dwa modele z różnymi macierzami intensywności przejść zależnie od wartości $\|x\|$.

Dla układu nominalnego

$$\dot{x}(t) = A[r(t)]x(t) + B[r(t)]u(t)$$

ze wskaźnikiem jakości

$$J = E \left\{ \int_0^T (x^T(t)Q(r(t))x(t) + u^T(t)R(r(t))u(t)) dt \mid x(t_0)r(t_0) \right\}$$

zakłada się istnienie dwóch macierzy intensywności przejść:

$$\Lambda^1 = \begin{bmatrix} q_{11}^1 & q_{12}^1 \\ q_{21}^1 & q_{22}^1 \end{bmatrix} \text{ dla } \|x\| < g \text{ oraz } \Lambda^2 = \begin{bmatrix} q_{11}^2 & q_{12}^2 \\ q_{21}^2 & q_{22}^2 \end{bmatrix} \text{ dla } \|x\| \geq g,$$

gdzie g oznacza wartość normy wektora stanu, przy której następuje skokowa zmiana wartości macierzy intensywności przejść.

Należy zatem rozważyć dwa niezależne układy:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A[r^1(t)]x(t) + B[r^1(t)]u(t) \mid \Lambda^1 \\ \dot{x}(t) &= A[r^2(t)]x(t) + B[r^2(t)]u(t) \mid \Lambda^2 \end{aligned} \quad (11)$$

Dla opisanej wyżej sytuacji otrzymuje się dwie pary alternatywnych sterowań:

$$\begin{aligned} u_1^1(t) &= -L_1^1 x(t) \\ u_1^2(t) &= -L_1^2 x(t) \end{aligned}$$

W poniżej przedstawionym przykładzie przyjęto, że wartość $R_i = 1$, $Q_i = 1$ dla $i=1,2$. Przebieg prostokątny symbolizuje przełączanie się układu pomiędzy trybami: poziom sygnału=-1 odpowiada trybowi 1, poziom sygnału=1 odpowiada trybowi 2. Dla ułatwienia obserwacji i interpretacji wyników posłużono się akademickim przykładem skalarnym, jednak w ogólnym przypadku wyniki można odnieść do wielowymiarowych układów rzeczywistych. Symulacje przeprowadzono dla 100 realizacji procesu Markowa z zadanymi macierzami intensywności przejść w celu lepszego zilustrowania wpływu nieprawidłowo wyliczonego sterowania na zachowanie układu. Wartości początkowe stanu układu ustalono na 20, natomiast g na 2. Jako podstawę czasową przyjęto 0.01s, taki jest również stały krok całkowania.

Przykład

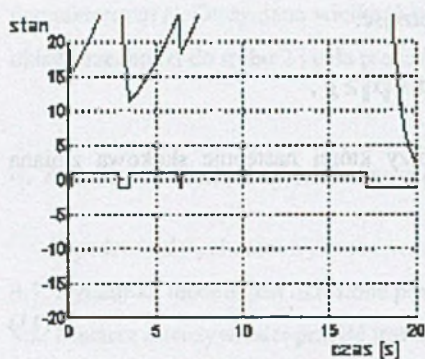
$$\begin{aligned} A_1 &= -1.3 & B_1 &= 1 \\ A_2 &= 0.3 & B_2 &= 0.1 \end{aligned}$$

$$\Lambda_1 = \begin{bmatrix} -0.1 & 0.1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ dla } \|x\| \leq g \quad (12)$$

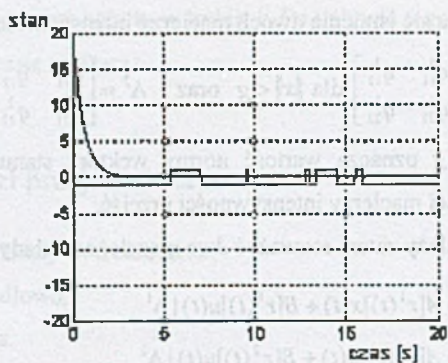
$$\Lambda_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0.1 & -0.1 \end{bmatrix} \text{ dla } \|x\| > g \quad (13)$$

$$L_1^1 = 0.425 \quad L_1^2 = 5.764$$

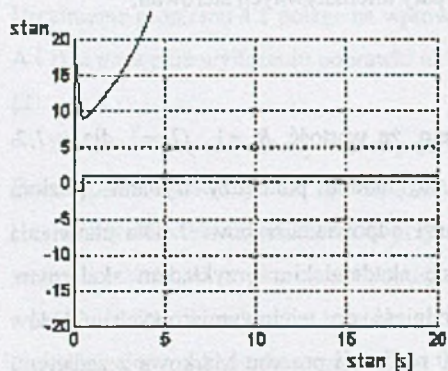
$$L_2^1 = 0.329 \quad L_2^2 = 5.297$$



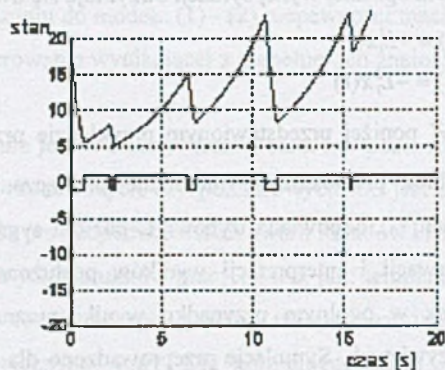
a)



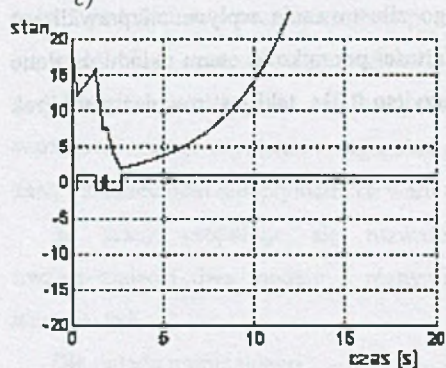
b)



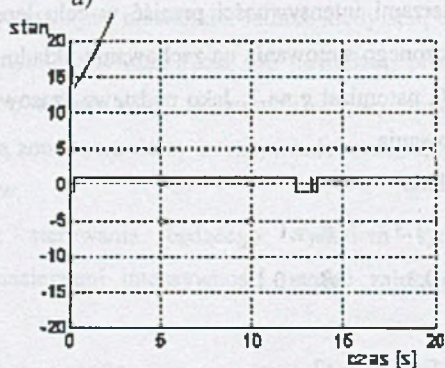
c)



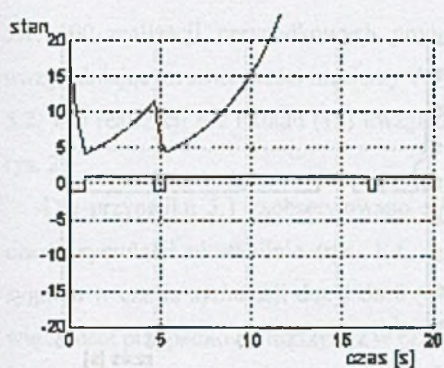
d)



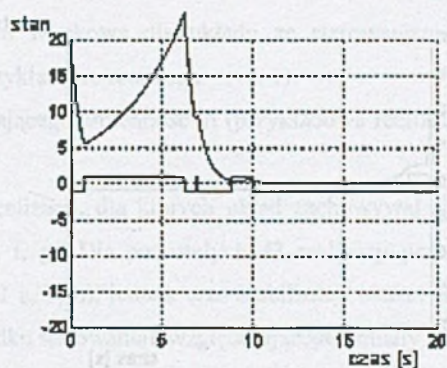
e)



f)

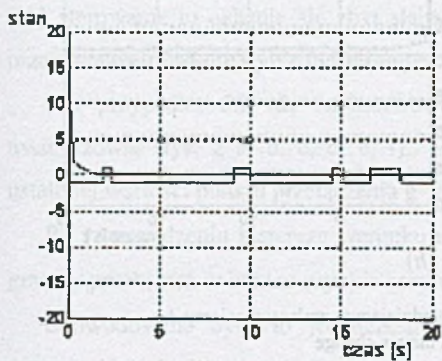


g)

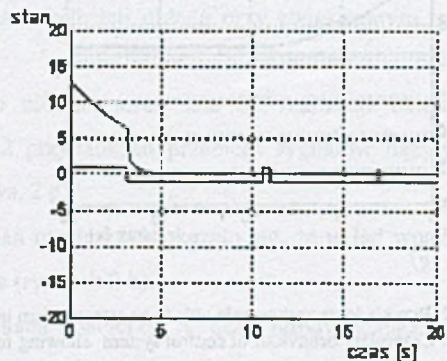


h)

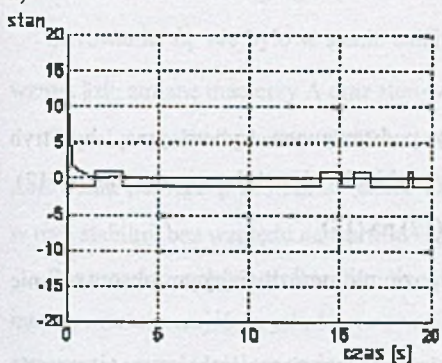
Rys. 1. Przykładowe zachowanie się układu ze sterowaniem nie uwzględniającym zmian macierzy Λ .
 Fig. 1. Exemplary behaviour of control system not allowing for Λ matrix change.



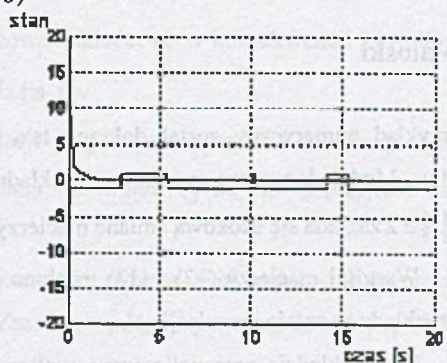
a)



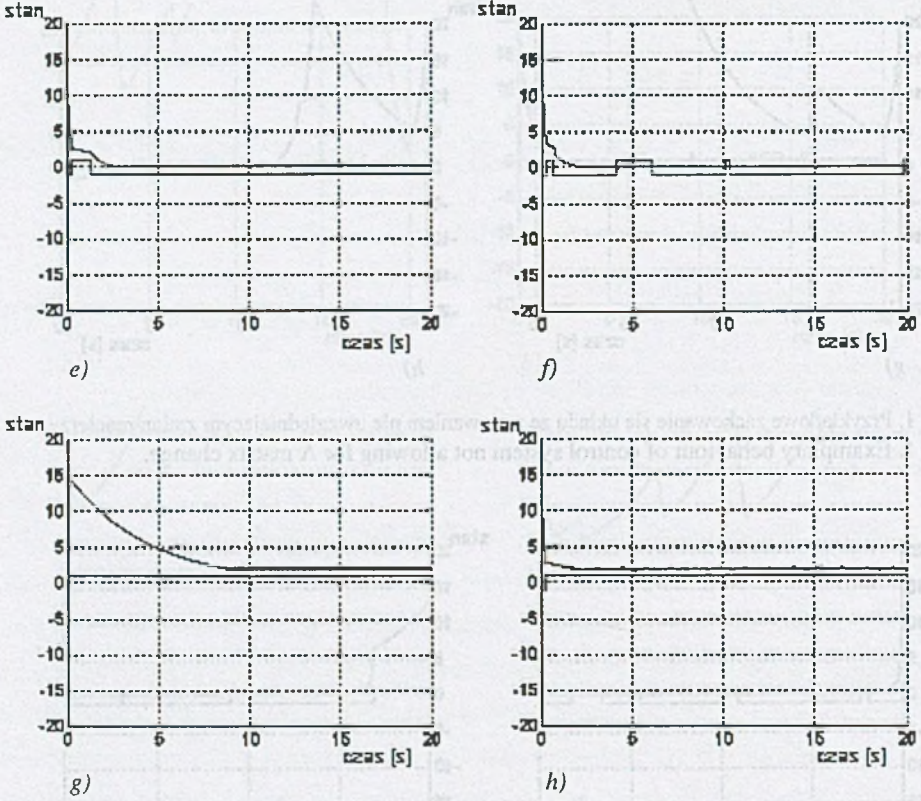
b)



c)



d)



Rys. 2. Przykładowe zachowanie układu ze sterowaniem uwzględniając zmiany macierzy Λ
 Fig. 2. Exemplary behaviour of control system allowing for Λ matrix change

5. Wnioski

Przykład numeryczny został dobrany tak, aby podstawowym trybem pracy był tryb stabilny. Model dopuszcza przebywanie układu w trybie 2, niestabilnym, zgodnie z (12). Dla $\|x\| \geq 2$ zakłada się skokową zmianę macierzy z (12) na (13).

Wartości macierzy (12) i (13) ustalono na poziomie umożliwiającym obserwowanie zmian układu w czasie symulacji.

W przykładzie przeanalizowano wpływ zmienności macierzy intensywności przejść na jakość sterowania. Przebadano:

5.1. 100 realizacji przypadkowych procesów Markowa dla układu ze sterowaniem nie uwzględniającym zmienności macierzy Λ (przykładowe realizacje - rys. 1).

5.2. 100 realizacji dla układu (11) uwzględniającego zmienność Λ (przykładowe realizacje - rys. 2).

Dla przypadku 5.1 zaobserwowano 57 realizacji, dla których układ zachowywał się w czasie symulacji niestabilnie (rys. 1 c, d, e, f, g). Dla pozostałych 43 realizacji przebieg sygnału w czasie symulacji dążył do 0 (rys. 1 a, b, h), jednak czas stabilizacji okazał się w większości przypadków dłuższy niż w przypadku sterowania uwzględniającego zmiany Λ .

U podstaw takiego zachowania leży fakt, że w systemach JLQ sterowanie jest optymalne ze względu na możliwość przejścia w inny tryb pracy. Obliczone na podstawie stałej macierzy (12) sterowanie dopuszcza przejście układu w tryb niestabilny, jednak na stosunkowo krótki czas ($q(2)=1$). Zakładając jednak skokową zmianę macierzy z (12) na (13) sterowanie to okazuje się zbyt słabe dla stabilizacji układu przy zwiększonym czasie przebywania układu w trybie niestabilnym.

Dla przypadku 5.2 nie zaobserwowano niestabilności. Dla 88 realizacji układ się ustabilizował (rys. 2 a, b, c, d, e, f). W 12 przypadkach przebiegi sygnałów dążyły do ustalonej wartości punktu przełączenia $g=2$ (rys. 2 g).

Po wprowadzeniu histerezy warunku zmian macierzy Λ okazało się, że układ wpada na granicy przełączeń w bardzo szybkie oscylacje (rysunek 2 h).

Spowodowane było to jednoczesną zmianą macierzy Λ oraz odpowiadającego jej sterowania w chwili osiągnięcia przez układ $\|x\|=2$.

Sterowanie L_2^1 nie było w stanie ustabilizować układu, co w konsekwencji powodowało wzrost $\|x\|$, zmianę macierzy Λ oraz sterowania na L_2^2 .

W celu wyeliminowania zjawiska oscylacji proponuje się zmianę założonej strategii sterowania poprzez przedłużenie czasu działania sterowania L_2^2 do chwili przejścia układu w tryb stabilny bez względu na wartość $\|x\|$.

Reasumując należy podkreślić, że widoczny jest wpływ skokowych zmian macierzy intensywności przejść na jakość sterowania. Zasadne wydaje się wprowadzenie poprawki na sterowanie uwzględniające zmienność Λ .

LITERATURA

1. Ji Y., Chizeck H. J.: Controllability, Stabilizability, and Continuous-Time Markovian Jump Linear Quadratic Control, IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 35 No 7, July 1990.
2. Świerniak A., Boukas E. K.: Robustification procedure for LQ problem, Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej s. Automatyka z. 114, pp.267-274, Gliwice.
3. Willsky A. S. and Levy B. C.: Stochastic stability research for complex power systems, DOE Contract, LIDS, MIT, Rep. ET-76-C-01-2295, 1979.
4. Sworder D. D. and Rogers R. O.: An LQ-solution to a control problem associated with a solar thermal central receiver, IEEE Trans Automat. Contr., vol. AC-28, 1983, pp. 971-978.
5. Boukas E. K. and Haurie A.: Manufacturing flow control and preventive maintenance a stochastic control approach, IEEE Trans. Automat. Contr., v.AC-35, No.9, pp.1024-1031.
6. Iosifescu M.: Skończone procesy Markowa i ich zastosowanie. PWN, Warszawa 1988.
7. Świerniak A., Simek K., Boukas E. K.: Intelligent Robust Control of Fault Tolerant Systems: in Artificial Intelligence in Real Time Control (ed H. E. Rauch), Elsevier, 1998, pp. 245-248.

Recenzent: Dr hab. inż. Józef Korbicz

Wpłynęło do Redakcji 15.03.2001 r.

Abstract

The parameters of real systems are not constant. They are changed after the influence of failure components for instance. In this paper the author considers systems which are linear and whose mode dynamics is described by a discrete-state Markov process but transition matrix is depends on state norm. The proposed control law (see chapter 4) is based on two models with different matrixes transition probabilities state norm dependent (Fig. 2). Figure 1 shows system state with control law which is independent on transition matrix's changes.

A considerable influence of transition matrixes' changes on control quality is clearly visible. In chapter 3 computer's generator of Markov process is presented.