ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1983

Seria: ENERGETYKA z. 82 Nr kol. 754

Ernest GIELATA

# KRYTERIA PODOBIEŃSTWA PRZEPŁYWÓW NIEUSTALONYCH PRZEZ RUROCIĄGI PROSTE

Streszczenie. W pracy przedstawiono zlinearyzowane - bezwymiarowe, kryterialne - równania różniczkowe cząstkowe pędu i ciągłości strumienia dla izotermicznego jednowymiarowego przepływu płynu - ściśliwego i lepkiego - rurociągiem poziomym o stałej określonej średnicy D i długości L.

Na podstawie analizy wymiarowej oraz kryterialnych równań hydromechaniki wyjaśniono od czego zależy współczynnik tłumienia oraz jego związek z liczbą tłumienia przebiegu ciśnienia w czasie.

Zwrócono uwagę na szczególne znaczenie - przy ocenie podobieństwa dwóch przebiegów zmian ciśnienia bądź strumienia płynów w określonej geometrii rurociągu - następujących liczb kryterialnych:

- logarytmicznego dekrementu tłumienia oraz
- czasu stabilizacji.

Na jednym przykładzie tzw. uderzenia hydraulicznego, wywołanego nagłym i równoczesnym zamknięciem zasuw na początku i końcu rurociągu, przedstawiono sposób określenia warunków brzegowych i początkowych dla równań podstawowych. Dla tych warunków wyprowadzono wzór określający względne ciśnienie w zależności od bezwymiarowego czasu i względnego położenia w rurociągu.

## 1. Nowa propozycja przedstawienia zlinearyzowanych równań hydromechaniki

W literaturze [1], [2], [3], [5], [8] najczęściej dotychczas spotyka się równania różniczkowe cząstkowe pędu oraz ciągłości strugi - dla jednowymiarowego przepływu płynu z określoną stałą prędkością w całym przekroju rurociągu - zapisane w następującej postaci:

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial x} = - \frac{\lambda_f}{2} \frac{w^2}{D} = - 2 \delta w, \qquad (1.1)$$

$$\frac{\partial \varrho}{\partial \tau} + \frac{\partial (\varrho w)}{\partial x} = 0, \qquad (1.2)$$

gdzie:

- p - ciśnienie,
- x - współrzędna określająca położenie obranego przekroju w stosunku do umownego punktu zerowego,
- $\tau$ - czas,
- $\varrho$ - gęstość płynu,
- w - prędkość uśredniona dla całego przekroju rurociągu,

D - średnica rurociągu,

$\lambda_r$ - liczba tarcia hydraulicznego.

W równaniach (1.1) i (1.2) występują trzy zmienne zależne ($w$, $p$, $\varrho$) i dwie zmienne niezależne ($x$, $\tau$). Równanie (1.1) jest nieliniowe, gdyż prędkość "w" występuje w kwadracie.

Trzecie równanie można uzyskać z zależności:

$$a = \sqrt{\frac{\Delta p}{\Delta \varrho}}, \tag{1.3}$$

gdzie:

$$\frac{\Delta p}{\Delta \varrho} = \frac{\text{odchyłka ciśnienia}}{\text{odchyłka gęstości}}.$$

Równanie (1.3) ma znaczenie uniwersalne [5].

## 1.1. Prędkość dźwięku w gazach i cieczach

Literatura podaje wartości liczbowe prędkości rozprzestrzeniania się fal dźwiękowych w gazach i cieczach. Fala ta porusza się tak szybko, że przemianę kompresji wywołanej przez nią można uważać za adiatermiczną. Ponieważ zmiany stanu wywołane przez falę dźwiękową są nieznaczne, przeto można pominąć tarcie wewnętrzne w ośrodku ogarniętym przez falę i przemianę uważać za izentropę.

Równanie (1.3) można zapisać w postaci:

$$a = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \varrho}\right)_s} \tag{1.3a}$$

Prędkość dźwięku jest miarą ściśliwości ośrodka, w którym dźwięk się rozchodzi.

Przemiana izentropowa wyraża się równaniem:

$$\frac{p}{p_o} = \left(\frac{\varrho}{\varrho_o}\right)^{\varkappa},$$

gdzie:

$\varkappa$ - stosunek ciepła właściwego przy stałym ciśnieniu do ciepła właściwego przy stałej objętości.

Podstawiając: $p = p_o + \Delta p$; $\varrho = \varrho_o + \Delta \varrho$ otrzymamy dla małych odchyleń p i $\Delta \varrho$ ($p_o$, $\varrho_o$ - stałe, określone wartości ciśnienia i gęstości):

$$\frac{\Delta p}{p_o} = \varkappa \frac{\Delta \varrho}{\varrho_o},$$

$$a = \sqrt{\varkappa \frac{p_o}{\varrho_o}} = \sqrt{\varkappa . R . T}, \tag{1.4}$$

gdzie:

R - stała gazowa,

T - temperatura bezwzględna.

Prędkość rozprzestrzeniania się fal dźwiękowych w cieczy przepływającej rurociągiem można określić [1] wzorem:

$$a = \sqrt{\frac{1}{\varrho\left[\frac{1}{K} + \frac{D}{f.E}\right]}}, \tag{1.5}$$

W szczególności dla nieściśliwej cieczy $K \to \infty$ w cienkościennym sprężystym rurociągu mamy:

$$a = \sqrt{\frac{E.f}{\varrho.D}}, \tag{1.5a}$$

zaś dla ściśliwej cieczy w sztywnym rurociągu $\frac{Ef}{D\varrho} \to \infty$ mamy

$$a = \sqrt{\frac{K}{\varrho}}, \tag{1.5b}$$

gdzie:

K - moduł ściśliwości cieczy,

E - moduł sprężystości na ściskanie i rozciąganie materiału rurociągu,

f - grubość ścianki rurociągu,

$\varrho$ - gęstość cieczy,

D - średnica rurociągu.

## 1.2. Współczynnik tłumienia oraz liczba tarcia hydraulicznego

$$\delta = \frac{\lambda f}{4} \cdot \frac{W}{D} \tag{1.6}$$

Czynnik proporcjonalności $\delta$ (współczynnik tłumienia) jest tu miarą tłumienia z wymiarem $(\text{czas})^{-1}$ [8].

Liczba tarcia $\lambda_f$ jest funkcją liczby Reynoldsa dla ruchu uwarstwionego

$$\lambda_f = \frac{64}{Re}, \tag{1.7}$$

natomiast dla ruchu burzliwego ważne jest równanie Blasiusa

$$\lambda_f = 0{,}316(Re)^{-0{,}25}, \tag{1.8}$$

gdy $Re \leqslant 80.000$. Dla zakresu $Re = 5000 - 200.000$ słuszny jest wzór [5]

$$\lambda_f = 0,184(Re)^{-0,2} \tag{1.9}$$

W przypadkach gdy $Re = 250.000 - 500.000$ Eberle zaleca wartość stałą

$$\lambda_f = 0,021 \tag{1.10}$$

Podane równania od (1.8) - (1.10) dla ruchu burzliwego są ważne jedynie dla rur gładkich. Rura jest hydraulicznie gładka, jeżeli nierówności jej ściany mieszczą się w obrębie subwarstwy laminarnej płynu. Dla rur chropowatych $\lambda_f$ ma wartości większe. Miarą chropowatości jest stosunek średniej wysokości $k$ nierówności ściany do promienia rury $r$.

Zakłada się tutaj, że liczba tarcia hydraulicznego znana dla przepływu ustalonego jest taka sama dla przepływu niestacjonarnego. Założenie to podyktowane jest brakiem danych literaturowych [3] dotyczących wartości $\lambda_f$ dla przepływów burzliwych, niestacjonarnych.

### 1.3. Kryterialne równanie pędu i ciągłości strugi

Równania (1.1) i (1.2) wraz z właściwie dobranymi warunkami początkowymi i brzegowymi stanowić mogą układ niezbędny do rozwiązania konkretnego zagadnienia.

Korzystanie z tych równań przy rozwiązywaniu zagadnień dynamicznych zmian ciśnienia i objętości strumienia ogranicza możliwość pełnego wyjaśnienia fizykalnych własności rozpatrywanego układu rurociągu.

Podjęto próbę przedstawienia zlinearyzowanych równań pędu oraz ciągłości strugi w takiej postaci, aby uzyskać najogólniejszy zapis układu równań jako bezwymiarowych i kryterialnych. Aby przepływy były podobne, konieczne jest zachowanie podobieństwa geometrycznego oraz spełnienie kryteriów podobieństwa hydrodynamicznego i gazodynamicznego otrzymywanych w wyniku rozpatrzenia ogólnych równań ruchu, lepkiego i ściśliwego płynu.

Aby to było spełnione, równania (1.1) i (1.2) proponuje się zastąpić zlinearyzowanymi równaniami według następującego zapisu:

$$\frac{\partial M(\xi,\sigma)}{\partial \sigma} + rM(\xi,\sigma) + \frac{1}{L/D} \cdot \frac{\partial P(\xi,\sigma)}{\partial \xi} = 0, \tag{1.11}$$

$$\frac{\partial M(\xi,\sigma)}{\partial \xi} + \frac{L}{D} \cdot \left[\frac{\frac{w_o}{a}}{Re_o}\right]^2 \cdot \frac{\partial P(\xi,\sigma)}{\partial \sigma} = 0, \tag{1.12}$$

gdzie:

$M(\xi,\sigma) = \dfrac{\dot{m}(x,\tau)}{\dot{m}_o}$ - zredukowany strumień masy,

$P(\xi,\sigma) = Eu_o \cdot Re_o \dfrac{P(x,\tau) - P'_o}{\Delta p_o}$ - zredukowane ciśnienie,

$\dot{m}(x,\tau) = \varrho A W(x,\tau)$ – strumień masy przepływający w określonym miejscu x w rurociągu, w czasie $\tau$,

$\dot{m}_o$ – strumień masy odniesiony do średniej umownej prędkości $w_o$ (indeks zero),

$Eu_o$, $Re_o$ – liczby Eulera oraz Reynoldsa odniesione do umownej, średniej prędkości $w_o$,

Re – liczba Reynoldsa odniesiona do prędkości rzeczywistej średniej,

$p'_o$, $\Delta p_o$ – wartość ciśnienia na końcu rurociągu oraz stała różnica ciśnienia, w przepływie ustalonym między $\frac{x}{L} = 0$ i $\frac{x}{L} = 1$,

$p(x,\tau)$ – ciśnienie zmienne ze zmianą współrzędnej x oraz w czasie $\tau$,

$r = \frac{\lambda_r}{2} \cdot Re$ – iloczyn liczby tarcia hydraulicznego i liczby Reynoldsa, dla dowolnej prędkości w,

$\lambda_r = \lambda_r [Re]$ – liczba tarcia hydraulicznego na prostym odcinku rurociągu,

$\xi = \frac{x}{L}$ – liczba określająca współrzędną rozpatrywanego odcinka x rurociągu do jego całkowitej długości,

$\frac{L}{D} = \xi_L$ – długość rozpatrywanego rurociągu do jego średnicy wewnętrznej,

$\left[\frac{\frac{w_o}{a}}{Re_o}\right]$ – iloraz liczb $\frac{w_o}{a}$ do liczby Reynoldsa liczony dla średniej, umownej prędkości $w_o$,

$\left[\frac{\frac{w_o}{a}}{Re_o}\right] = \left[Re_a\right]^{-1}$ – odwrotność liczby Reynoldsa, liczona dla prędkości rozchodzenia się fal dźwiękowych w płynie,

$\sigma = \frac{\nu}{D^2} \cdot \tau$ – bezwymiarowy czas (uwzględnia lepkość płynu),

$\nu$ – kinematyczny współczynnik lepkości.

Równania (1.11) i (1.12) należy uzupełnić odpowiednimi warunkami początkowymi i brzegowymi, aby zagadnienia graniczne były poprawnie postawione. Równania te są równaniami wyjściowymi do analizy stanów nieustalonych i ustalonych technicznie ważnych przepływów w rurociągach.

## 2. Charakterystyczne liczby kryterialne

### 2.1. Współczynnik tłumienia $\delta$ oraz bezwymiarowa liczba tłumienia r

W pracach doktorskich [4], [6] eksperymentalnie określano wartości współczynnika tłumienia $\delta$ ( w rurach uderzeniowych) jako funkcję $\Delta p_o$, przy zmianie następujących czterech parametrów L, D, l i rodzaju gazu. Z pomiarów wynika, że wartość $\delta$ ustala się po krótkim czasie przejściowym kilku (około trzech) okresów i wtedy właśnie słuszne są wyniki pomiarów ciśnienia.

W pracy [6] przedstawiono na podstawie analizy wymiarowej zależność współczynnika tłumienia zmian ciśnienia $\delta$ w postaci funkcji:

$$\delta = \vartheta \cdot \frac{L}{V} \cdot \phi\left[\frac{V}{l^3}, \frac{\varrho \cdot l^2 \cdot p_o}{\vartheta^2}\right] \tag{2.1}$$

W pracy [4] ten sam współczynnik tłumienia określono (także z pomocą analizy wymiarowej) inną funkcją

$$\delta = \frac{a}{L}\phi\left[\frac{\Delta p_o}{\varrho_a 2}, \frac{aL}{\vartheta}, \frac{L}{D}, \frac{L}{l}\right] \tag{2.2}$$

Równanie (2.2) zawiera pięć bezwymiarowych wielkości charakterystycznych.

$$\pi_1 = \frac{\delta L}{a}, \quad \pi_2 = \frac{a\,L}{\vartheta}, \quad \pi_3 = \frac{\Delta p_o}{\varrho_a 2}, \quad \pi_4 = \frac{L}{D}, \quad \pi_5 = \frac{l}{D}. \tag{2.3}$$

Pierwsze wyrażenie można zinterpretować jako liczbę Strouhala, $\pi_2$ przedstawia liczbę Reynoldsa odniesioną do prędkości dźwięku i długości L rurociągu, a $\pi_3$ - liczbę Eulera odniesioną do prędkości dźwięku. Autorzy prac [4], [6] doszli tutaj do fałszywych wniosków, że na kształtowanie przepływu nie ma wpływu prędkość elementu płynu, lecz wyłącznie prędkość dźwięku "a".

Rückauer i Khademi pominęli we współczynniku tłumienia $\delta$ średnią prędkość elementu płynu (wzór 1.6).

Okazuje się, że oprócz występującej we współczynniku tłumienia prędkości rzeczywistej "w" istotne znaczenie ma prędkość umowna "$w_o$" (różna od zera) odpowiadająca ustalonemu przepływowi. W szczególnym przypadku rury uderzeniowej $w_o = 0$. Prędkość $w_o$ nie może być pomijana w rozważaniach.

Określone zależnościami (2.1), (2.2) związki współczynnika tłumienia dla rur uderzeniowych należy opisać inną funkcją, wychodząc wstępnie z następującej zależności:

$$\delta = \delta\,(l, L, D, w_o, a, \vartheta, \varrho, \Delta p_m), \tag{2.4}$$

$$\Delta p_m = p_g - p_m = \Delta p_o\,(1 - \frac{l}{L}), \tag{2.5}$$

gdzie:

$p_g$ - ciśnienie w części "wysokoprężnej" rury (długości l),

$p_m$ - ciśnienie ustalone w całej objętości rury uderzeniowej.

Zależność (2.5) wyprowadzono przy założeniu, że proces przebiega przy stałej temperaturze w oparciu o równanie stanu i bilans masowy.

Wyróżniając w zależności (2.4) trzy wielkości, a to: $D, \vartheta, \Delta p_m$ drogą analizy wymiarowej dochodzi się do funkcji kryterialnej następującej postaci:

$$\delta \cdot \frac{D^2}{\vartheta} = \phi \left[ Eu_o \cdot Re_o, \ \frac{Re_a}{L/D}, \ M, \ \frac{L}{D}, \ \frac{l}{L} \right] \tag{2.6}$$

Równanie (2.6) zawiera sześć bezwymiarowych wielkości charakterystycznych, kryterialnych.

$\pi_1 = \frac{r}{2} = \delta \cdot \frac{D^2}{\vartheta} = \frac{\lambda f}{4} \cdot Re$ - bezwymiarowa, kryterialna liczba tłumienia

$$r = \frac{\lambda f}{2} \cdot Re = 2 \delta \frac{D^2}{\vartheta} \tag{2.7}$$

$$\pi_2 = Eu_o \cdot Re_o = \frac{\Delta p_m}{w_o^2} \cdot \frac{w_o D}{\vartheta} = \frac{\Delta p_m}{w_o} \cdot \frac{D}{\vartheta} \tag{2.8}$$

Wyrażenie ostatnie zawiera iloczyn liczby Eulera i Reynoldsa odniesione do umownej prędkości $w_o$, stałej dla całego przekroju rury.

## 2.2. Bezwymiarowy okres drgań nietłumionych, logarytmiczny dekrement tłumienia, czas stabilizacji

Iloraz liczby Reynoldsa przy prędkości dźwięku do stosunku $L/D$ stanowi istotną liczbę kryterialną.

$$\pi_3 = \frac{Re_a}{L/D} = \frac{Re}{M \cdot \frac{L}{D}} = \frac{a \ D^2}{L \ \vartheta} \tag{2.9}$$

Łatwo zauważyć, że odwrotność ostatniej liczby kryterialnej przedstawia bezwymiarowy czas ($\frac{1}{2}$ okresu) przebiegu zmian ciśnienia na długości $L$ rurociągu.

$$\left[ \frac{Re_a}{L/D} \right]^{-1} = \frac{L}{a} \cdot \frac{\vartheta}{D^2} = \frac{T_o}{2} \cdot \frac{\vartheta}{D^2} \tag{2.10}$$

Jeżeli utworzy się iloczyn liczb kryterialnych, określonych wzorami (2.7) i (2.10), to otrzymamy wartość liczbową logarytmicznego dekrementu tłumienia (LDT).

$$r \cdot \left[ \frac{Re_a}{L/D} \right]^{-1} = \delta \cdot T_o = \Lambda_o \tag{2.11}$$

Jest to LDT wyrażony za pomocą liczb kryterialnych charakteryzujących geometryczne wymiary rury oraz fizyczne właściwości płynu. Łatwo wykazać, że LDT zależny jest od iloczynu liczb: Reynoldsa, Macha i stosunku $\frac{L}{D}$ rurociągu.

Przy przepływie laminarnym jak i turbolentnym o podobieństwie dynamicznym przebiegu przejściowego zmian ciśnienia i strumienia masy gazu w rurociągach decydować będzie między innymi szczególnie wartość liczbowa logarytmicznego dekrementu tłumienia, określona wzorem (2.11).

Dwa przebiegi ciśnienia bądź strumienia masy w czasie stanu nieustalonego są podobne pod względem właściwości dynamicznych, jeżeli po zadaniu sygnału na wejściu (bądź wyjściu) rurociągu - np. w formie skoku jednostkowego - wartość liczbowa logarytmicznego dekrementu tłumienia dla rozpatrywanych przebiegów jest taka sama. Matematycznie związek ten określa się zależnością:

$$(\Lambda_o)_1 = (\Lambda_o)_2 = (\Lambda_o)_3 = \text{idem} \tag{2.12}$$

Na podstawie zlinearyzowanego równania pędu (1.11) można dowieść, że w przepływach ustalonych wartość liczbowa LDT określona jest iloczynem liczb: Eulera i Macha, a więc ilorazem straty ciśnienia na tarcie na długości L rurociągu, przy prędkości umownej $w_o$, do uderzeniowego ciśnienia $(w_o \cdot a \cdot \varrho)$ płynu przepływającego z tą samą prędkością $w_o$ w rozpatrywanym rurociągu średnicy D i długości L.

LDT jest zatem liczbą charakteryzującą podobieństwo przepływów nieustalonych i ustalonych. Przy wartości liczbowej LDT $\to 2\pi$ okres $T_o = \frac{2L}{a}$ rośnie nieograniczenie (rurociąg długi).

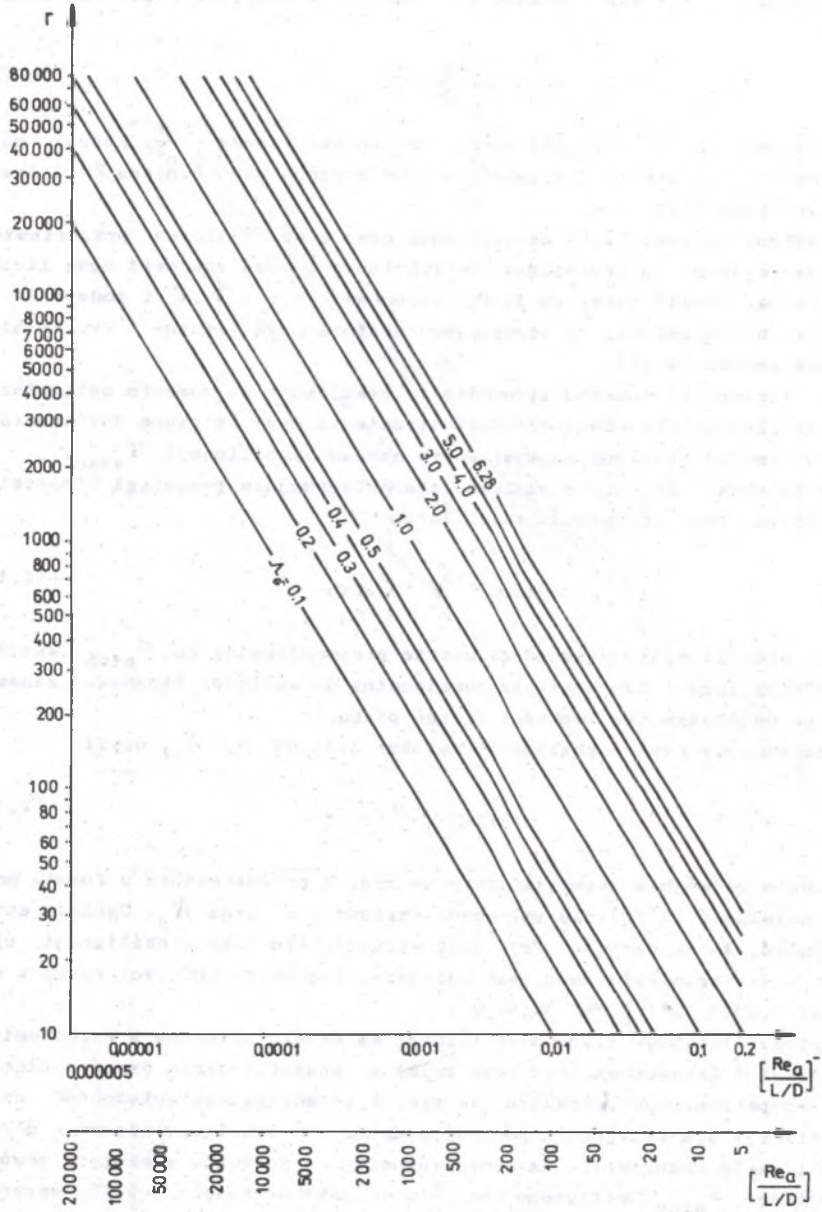
Dla małych wartości LDT przebiegi ciśnienia i strumienia są oscylacyjne. Dla LDT $> 2\pi$ przebiegi ciśnienia są aperiodyczne i silnie zależne od $\frac{x}{L}$.

Na rys. 1 przedstawiono w układzie podwójnie logarytmicznym[x)] zależność (2.11) określającą całkowite podobieństwo rozpatrywanych przebiegów ciśnień bądź strumieni masy w rurociągu dla $\Lambda_o$ = idem. Pozostałe liczby kryterialne $\pi_4 = \frac{w}{a} = M$; $\pi_5 = \frac{L}{D}$; $\pi_6 = \frac{1}{L}$ nie wymagają opisu.

Bezwymiarowy okres drgań nietłumionych można wyrazić wzorem:

$$2\left[\frac{Re_a}{L/D}\right]^{-1} = \frac{2L}{a}\cdot\frac{\vartheta}{D^2} = T_o\cdot\frac{\vartheta}{D^2} \tag{2.13}$$

x) Można tę zależność przedstawić także w układzie naturalnym jako pęk prostych - przyporządkowanych odpowiedniej wartości LDT - wychodzących z początku układu $r = f\left(\frac{Re_a}{L/D}\right)$.




Rys. 1. Zależność $\Lambda_o = r \cdot \left[\frac{Re_a}{L/D}\right]^{-1}$

Równanie (2.13) nasuwa spostrzeżenie, że praktyczniej jest zamiast liczby Strèuhala stosować bezwymiarowy czas (krok czasowy) w postaci zależności:

$$\sigma = \frac{\vartheta}{D^2} \cdot \tau \qquad (2.14)$$

We wzorach (2.13) i (2.14) występuje ten sam iloraz $\frac{\vartheta}{D^2}$, który może przyjmować różne wartości w zależności od rodzaju gazu (zmiana $\vartheta$) i średnicy rurociągu (D).

Określony wzorem (2.14) bezwymiarowy czas stanowi iloraz przyspieszenia konwekcyjnego do przyspieszenia lokalnego i może stanowić nową liczbę kryterialną. Jeżeli wziąć za liczbę Strouhala $Str = \frac{w}{D} \cdot \tau$ i podzielić ją przez liczbę Reynoldsa, to otrzymujemy właśnie nową lliczbę kryterialną wyrażoną wzorem (2.14).

Czas liczony od momentu wprowadzenia zakłócenia do momentu osiągnięcia stanu ustalonego dla ciśnienia bądź strumienia masy (z pewną dokładnością) umownie nazywać będziemy bezwymiarowym czasem stabilizacji $\sigma_{stab}$. Będzie to obok LDT druga wielkość charakteryzująca przebiegi nieustalone ciśnienia bądź strumienia masy. Zatem

$$\sigma_{stab} = \frac{\vartheta}{D^2} \cdot \tau_{stab} \qquad (2.15)$$

Czas stabilizacji w sekundach będzie proporcjonalny do $\sigma_{stab}$, kwadratu średnicy rury i odwrotnie proporcjonalny do wartości liczbowej kinematycznego współczynnika lepkości danego płynu.

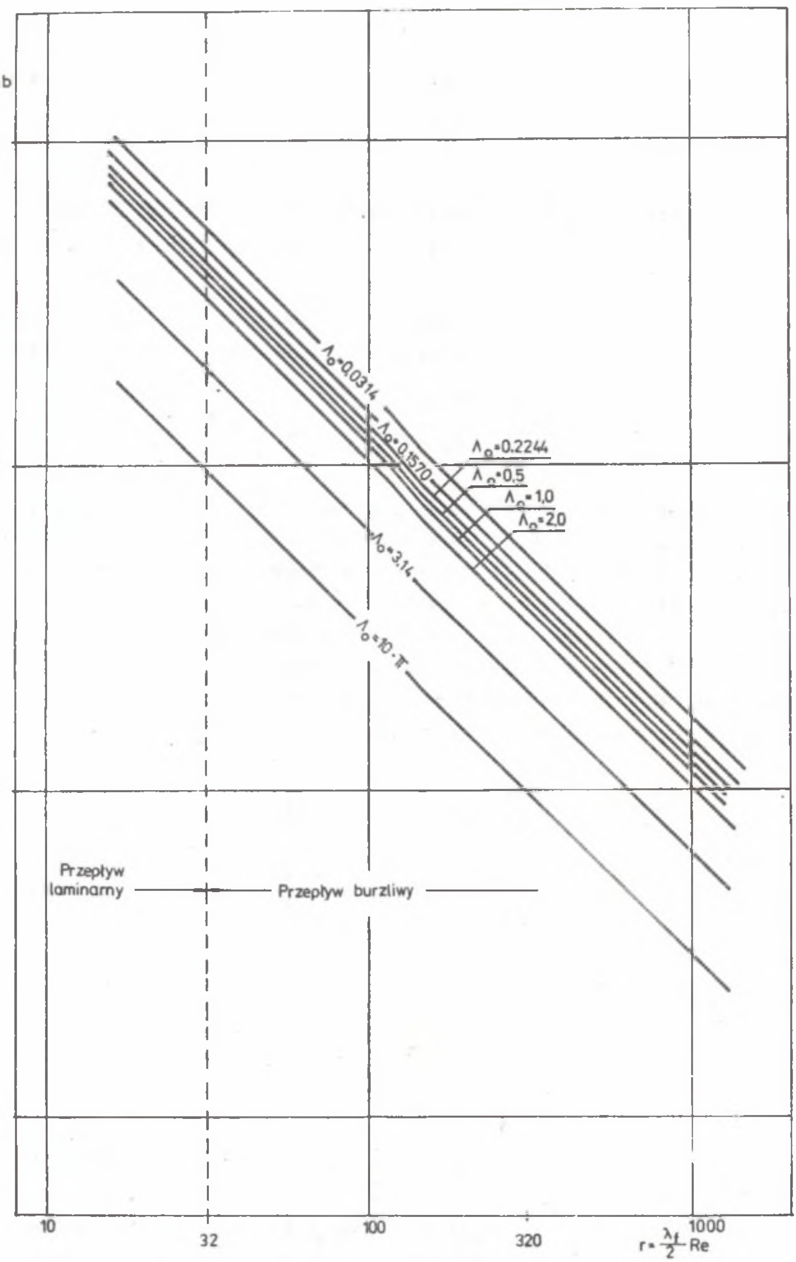
Bezwymiarowy czas stabilizacji zależny jest od r, $\Lambda_o$, czyli:

$$\sigma_{stab} = f(r, \ _o) \qquad (2.16)$$

W układzie podwójnie logarytmicznym na rys. 2 przedstawiono w formie przykładu zależność (2.16) dla wybranych wartości r oraz $\Lambda_o$. Ogólnie można powiedzieć, że im wartość "r" jest większa, tym czas stabilizacji ciśnienia bądź strumienia masy jest mniejszy. Wartości LDT zmieniano w obszarze: $0{,}0314 \leqslant \Lambda_o \leqslant 31{,}4159$.

Wartości liczbowe czasu stabilizacji są ściśle związane z warunkami początkowymi i brzegowymi (być może także z częstotliwością drgań tłumionych) rozpatrywanego przykładu. Na rys. 2 przedstawiono zależność czasu stabilizacji dla przypadku, gdy rurociągiem - w stanie ustalonym - płynie ciecz i nagle (skokowo) - na końcu rurociągu - zostanie zamknięty zawór.

Wartości $\sigma_{stab}$ wyliczono dla $\frac{x}{L} = 1$, jako wartości $\pm$ 0,5% wartości stałej $\Lambda_o$ (niezależnej od czasu) z wielomianu, stanowiącego - w postaci szeregu - opis matematyczny przebiegu dynamicznego względnego ciśnienia (ewentualnego względnego strumienia masy) w czasie.




Rys. 2. Zależność $\sigma_{stab} = f(r, \Lambda_o)$

Szeregi te są wolnozbieżne i przyjmowano $n = n_{max} = 600$ wyrazów. Człon zawierający iloczyn liczby $e^{-\frac{r}{2}\sigma}$ oraz odpowiedniej postaci szeregu, teoretycznie dla $\sigma \to \infty$ dąży do zera. Umownie przyjęto, że dla wartości $\sigma = \sigma_{stab}$ wartość liczbowa $(\Lambda_o)_{stab} = \Lambda_o\ (1 \pm 0{,}005)$.
W innym miejscu rurociągu czas stabilizacji będzie inny.

## 2.3. Częstotliwość tłumiona a logarytmiczny dekrement tłumienia

Związki między częstotliwością tłumioną $\omega_n$ i LDT $= \Lambda_o$ najlepiej będzie objaśnić na konkretnym przykładzie:

Niech poziomym rurociągiem o średnicy D i długości L płynie ciecz. W stanie ustalonym rozkład ciśnienia wzdłuż rurociągu wyraża się wzorem:

$$P(\xi, 0) = Eu_o \cdot Re_o \frac{p(\frac{x}{L}, \sigma)}{p_m} = Eu_o \cdot Re_o \left(1 - \frac{x}{L}\right) = \Delta p\left(1 - \frac{x}{L}\right)$$

Po osiągnięciu stanu ustalonego przyjmuje się równoczesne, skokowe zamknięcie zasuw przy $\frac{x}{L} = 0$ i $\frac{x}{L} = 1$, a zatem względna zmiana strumienia masy będzie $M(0,\sigma) = M(1,\sigma) = 0$ dla $0 < \sigma \leqslant \infty$. Należy określić ogólne rozwiązanie dla przejściowego przebiegu ciśnienia w czasie i w dowolnym miejscu rurociągu. Przebieg dynamicznych zmian ciśnienia w rurociągu jest interesujący z wielu inżynierskich względów.

Wykorzystując równania (1.11) i (1.12) można po pewnych przekształceniach dojść do następujących zależności:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial \xi^2} - b^2 \frac{\partial^2 P}{\partial \sigma^2} - rb^2 \frac{\partial P}{\partial \sigma} = 0, \tag{2.17}$$

$$\frac{\partial^2 M}{\partial \xi^2} - b^2 \frac{\partial^2 M}{\partial \sigma^2} - rb^2 \frac{\partial M}{\partial \sigma} = 0, \tag{2.18}$$

gdzie:

$$b = \left[\frac{L/D}{Re}\right]_a = \left[\frac{\xi_L}{Re}\right]_a.$$

Z warunku:

$$M(0,\sigma) = M(1,\sigma) = 0 \tag{2.19}$$

oraz równania (1.11) dochodzimy do warunków brzegowych w postaci:

$$\frac{\partial P(0,\sigma)}{\partial \xi} = \frac{\partial P(1,\sigma)}{\partial \xi} = 0. \tag{2.20}$$

dla bezwymiarowego czasu w obszarze

$$0 < \sigma < +\infty$$

Warunki początkowe dla $\sigma = 0$ i $0 < \xi < 1$ będą określone stanem równowagi w postaci równań:

$$P(\xi, 0) = \Delta p(1 - \frac{x}{L}) \text{ oraz}$$
$$\left.\frac{\partial P}{\partial \sigma}\right|_{\sigma=0} = 0 \tag{2.21}$$

Po rozwiązaniu ogólnym równania (2.17) i znalezieniu stałych względna zmiana ciśnienia wyraża się wzorem:

$$\frac{P(\xi,\sigma)}{\Delta p} = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} e^{-\frac{r}{2}\sigma} \sum_{n=1,3,5,7...}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left\{ \cos\omega_n \sigma + \frac{r}{2\omega_n} \sin\omega_n \sigma \right\} \cos n\pi \frac{x}{L} \tag{2.22}$$

gdzie:
$$\omega_n = \sqrt{(n\pi)^2 \left[\frac{Re_a}{L/D}\right]^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2}$$

jest częstotliwością tłumioną. Wyłączając przed znak pierwiastka jednomian $\left[\pi . Re_a/\frac{L}{D}\right]$ - stanowiący częstotliwość własną układu - otrzymuje się:

$$\omega_n = \pi \frac{Re_a}{L/D} \cdot \sqrt{n^2 - \left[\frac{r}{2 . \pi \frac{Re_a}{L/D}}\right]^2}$$
$$\omega_n = \pi . \frac{Re_a}{L/D} \sqrt{n^2 - \left[\frac{\Lambda_o}{2\pi}\right]^2} \tag{2.23}$$

Liczbowe wartości częstotliwości tłumionej mogą być - w zależności od liczbowej wartości wyrazu szeregu "n" i $\Lambda_o$ - dodatnie urojone bądź zero. Postać wzoru (2.22) będzie ulegać w tych przypadkach odpowiednim zmianom.

Częstotliwość drgań własnych zależy wyłącznie od $\frac{Re_a}{L/D}$. Częstotliwość drgań tłumionych - dla n-tego wyrazu szeregu można określić ogólnie jako funkcję:

$$\omega_n = f\left(\frac{Re_a}{L/D}, n, \Lambda_o\right). \tag{2.24}$$

Należy nadmienić, że ze względu na wartość liczbową prędkości dźwięku zmiana temperatury płynu, składu gazu, mieszaniny dwóch faz (ciecz, gaz) ma istotny wpływ na zmianę wartości liczbowej $\frac{Re_a}{L/D}$, a zatem i częstotliwości.

## 3. Wnioski

Podobieństwo przebiegu ciśnień i strumienia płynu w rurociągach poziomych o danej, stałej średnicy i długości przy izotermicznym przepływie - według [2], [7] - określone jest stałością liczb $Re = \frac{wL}{\vartheta} = const$; $M = \frac{w}{a} = const$ oraz dodatkowym warunkiem, aby stosunki:

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{L_2 \cdot \vartheta_1}{L_1 \cdot \vartheta_2},$$ były sobie równe.

Zalmanzon [7] stwierdza: jeżeli decydujący wpływ ma tarcie lepkie, to dla możliwie pełnego podobieństwa przepływów należy zapewnić Re = const, jeżeli z kolei prędkość przepływu jest bliska prędkości dźwięku, a wpływ sił tarcia lepkiego jest niewielki, to podstawowym kryterium podobieństwa okazuje się liczba Macha (M = const). Zalmanzon [7] uwzględnia ponadto, że dla podobieństwa przepływów nieustalonych konieczne jest spełnienie warunku stałej wartości liczby Strouhala:

$$\frac{w_1}{L_1} \cdot \tau_1 = \frac{w_2}{L_2} \cdot \tau_2$$

Takie ujęcie zagadnienia przedstawia warunki kryterialne tylko częściowego podobieństwa przepływów.

Logarytmiczny dekrement tłumienia jest podstawową uniwersalną liczbą kryterialną podobieństwa dla przepływów zarówno ustalonych, jak i nieustalonych. Liczba ta jest w każdym z podanych wzorów (2.8), (2.11), (2.12) iloczynem liczb kryterialnych. Wartość liczbowa $\Lambda_o$ związana jest ściśle z bardzo zróżnicowanym jakościowym przebiegiem (oscylacyjny, aperiodyczny) ciśnienia bądź strumienia płynu w rurociągu.

Liczba kryterialna (wzór 2.15) określająca bezwymiarowy czas stabilizacji ciśnienia bądź strumienia masy dotyczy charakterystyki stanów nieustalonych.

## LITERATURA

[1] Bukowski Jerzy, Piotr Kijkowski: Kurs mechaniki płynów. PWN, Warszawa 1980.

[2] Czarnyj I.A.: Nieustanowiwszejesja dwiżenije realnoj żidkosti w trubach. Izdatielstwo "Niedra", 1975.

[3] Glikman: Niestacjonarnyje tieczenije w pnewmogidrawliczeskich cepjach. Izdatielstwo - Masszinostrojenije, 1979.

[4] Khademi Ali: Untersuchung über das zeitliche Abklingen von Stosswellen bei Mehrfachreflexion in einem Stosswellenrohr - dysertacja doktorska. Technische Hochschule - Karlsruhe 1969.

[5] Ochęduszko Stanisław: Termodynamika stosowana. WNT, Warszawa 1964.

[6] Rückauer Christian: Untersuchung uber das zeitliche Abklingen von Stosswellen bei Mehrfachreflexion in einem Stosswellerohr - dysertacja doktorska. Technische Hochschule - Karlsruhe, 1966.

[7] Zalmanzon L.I.: Teoria elementów stosowanych w technice strumieniowej. WNT, Warszawa 1971.

[8] Zierep Jürgen: Kryteria podobieństwa i zasady modelowania w mechanice płynów. PWN, Warszawa 1978.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Janusz Elsner

Wpłynęło do Redakcji w marcu 1982 r.

## КРИТЕРИЯ СХОДСТВА НЕУСТАНОВИВШИХСЯ ТЕЧЕНИЙ ЧЕРЕЗ ПРОСТЫЕ ТРУБОПРОВОДЫ

Р е з ю м е

В настоящей работе были представлены линеаризованные - безразмерные, критериальные - дифференциальные уравнения с частными производными количества движения и неразрывности потока для изотермического одномерного течения сжимаемой и вязкой жидкости через горизонтальный трубопровод обладающий постоянным определенным диаметром D и длиной L.

На основании размерного анализа и критериальных уравнений гидромеханики было определено от чего зависит коэффициент демпферирования и его связь с количеством демпфирования давления во времени.

Уделялось внимание особому значению следующих критериальных чисел при оценке подобия двух ходов изменений давления или потока жидкостей в определенной геометрии трубопроводов:

- логарифмического декремента затухания и
- времени стабилизации.

На одном примере так назывемого гидравлического удара, вызванного внезапным и одновременным закрытием шиберов в начали и конце трубопровода, был представлен способ определения краевых и начальных условий для основных уравнений. Для этих условий была выведена формула определяющая относительное давление в зависимости от безразмерного времени и относительного расположения в трубопроводе.

CRITERIA OF SIMILARITY OF TRANSIENT FLOWS IN A PIPELINE

S u m m a r y

Linearized, dimensionless, partial differential equations of momentum and tenacity of stream for isothermal, one dimensional flow of viscous and compressible liquid through a horizontal pipeline of constant and determined diameter D and length L is presented in the article.
On the basis of the dimensional analysis and dimensionless equations of hydromechanics, it has been explained on what depends the damping coefficient and its relation to the number of dampings of the pressure run in time.
Special attention is paid to the importance of the following dimensionless numbers:

- logarithmic damping decrement,
- time of stabilization,

for estimating the probability of two runs of changes of pressure or stream of liquids in the determined geometry of a pipeline. A way of determining boundary and initial conditions for equations is shown on the basis of one example of the so-called water hammer caused by the sudden and symultaneous closure of bolts at the begining and end of a pipeline.