

Kazimierz KURPISZ

## ZASTOSOWANIE RACHUNKU WYRÓWNAWCZEGO DO ROZWIĄZYWANIA ODWROTNYCH ZADAŃ PRZEWODZENIA CIEPŁA

**Streszczenie.** W artykule przedstawiono możliwości zastosowania rachunku wyrównawczego w rozwiązywaniu odwrotnych zadań ustalonego i nieustalonego przewodzenia ciepła. Uzyskano zmniejszenie niestabilności wyników.

Odwrotne zagadnienia przewodzenia ciepła należą do grupy zagadnień źle uwarunkowanych [6]. Oznacza to, że małe błędy wielkości danych powodują duże błędy wielkości wynikowych. Celem usunięcia tej niekorzystnej właściwości, stosuje się rozmaite metody [1], [6]. Najszerze zastosowanie znalazła metoda regularyzacji [6]. Pozwala ona uzyskiwać stabilne wyniki, ale prowadzi do złożonych problemów optymalizacyjnych. W niniejszej pracy proponuje się zastosowanie rachunku wyrównawczego. Do rozwiązywania rozmaitych zagadnień cieplnych został on wprowadzony przez Szarguta [4]. Przy źle uwarunkowanych problemach, nawet niewielkie poprawki wielkości mierzonych, wywierają korzystny wpływ na wyniki. Metoda ta wymaga bardzo prostych obliczeń, jednakże nie w każdym przypadku pozwala uzyskać stabilne rozwiązania. Ograniczenia te omówiono w dalszej części pracy.

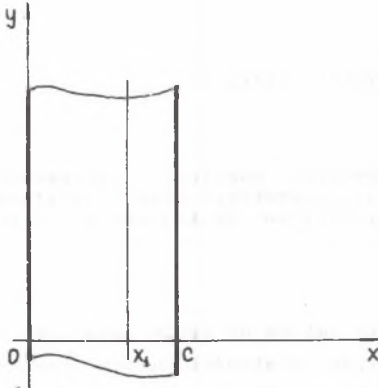
Zastosowanie rachunku wyrównawczego zilustrowano bardzo prostymi przykładami. Bez żadnych trudności merytorycznych można tę metodę uogólnić na przypadki bardziej złożone.

### 1. Rozwiązanie odwrotnych zagadnień przewodzenia ciepła

Jak już wspomniano, metoda zostanie zilustrowana bardzo prostymi przykładami. Zostanie rozpatrzony przypadek nieustalonego, symetrycznego pola temperatury w płycie nieskończonej (por. rys. 1) oraz ustalonego, symetrycznego, dwuwymiarowego pola temperatury (rys. 2). W obydwu przypadkach osią symetrii jest prosta  $X=0$ .

Do rozwiązania zagadnienia odwrotnego zastosowano metodę opracowaną przez autora [2], [3], którą można uważać za uogólnioną metodę Tiomkina [5]. Metoda Tiomkina dotyczy jednowymiarowych zagadnień nieustalonych, z jednorodnym warunkiem początkowym. Rozwiązanie opracowane przez autora nie wymaga znajomości warunku początkowego i może być także stosowane dla pro-

blemów wielowymiarowych, ustalonych, sformułowanych analitycznie lub numerycznie.



Rys. 1. Geometria obszaru jednowymiarowego

Rozwiązanie nieustalonego zagadnienia odwrotnego dla symetrycznej płyty nieskończonej może być zapisane równaniem [2]

$$T(x, Fo) = \sum_{k=0}^{\infty} \phi(x, x_1) F^{(k)}(Fo) \quad (1)$$

W równaniu tym oznaczają (por. rys. 1)

$X = x/c$  - bezwymiarowa współrzędna,

$Fo = a\tau/c^2$  - liczba Fouriera

$F(Fo)$  - wewnętrzna odpowiedź temperaturowa,

$$F^{(k)}(Fo) = d^k F / dFo^k.$$

Wewnętrzna odpowiedź temperaturowa jest funkcją przedstawiającą przebieg w czasie temperatury w punkcie  $X = X_1$  ( $X_1 \in [0, 1]$ ). Funkcja ta musi spełniać równanie przewodzenia ciepła także dla  $Fo \rightarrow 0$ , tzn.

$$F(Fo) = T_f(x_1, Fo),$$

gdzie:

$$\frac{\partial T_f(x, Fo)}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 T_f(x, Fo)}{\partial x^2},$$

a zatem nie jest warunkiem brzegowym w klasycznym tego słowa znaczeniu. Musi mieć także ograniczone pochodne.

Funkcje  $\phi_k(x, x_1)$  wyznacza się z zależności

$$\phi_0 = 1$$

.....

$$\phi_k = \frac{x^{2k}}{(2k)!} - \sum_{n=0}^{k-1} \frac{x_1^{2(k-n)}}{[2(k-n)]!} \phi_n \quad (2)$$

Przy numerycznym formułowaniu zagadnień początkowo-brzegowych, rozwiązanie problemów odwrotnych, w szczególnych przypadkach, znacznie upraszcza się. Tak będzie wtedy, gdy znana jest temperatura węzła położonego w osi syme-

trii płyty lub na brzegu ciała, przy znanym warunku brzegowym. Dla uproszczenia przyjmuje się dalej, że ten warunek brzegowy jest jednorodnym warunkiem brzegowym III rodzaju ( $T_1$  oznacza temperaturę zredukowaną). Równanie różnicowe dla tego wężla może być zapisane następująco:

$$\frac{dT_1}{dZ} = A_{11} T_1 + A_{12} T_2. \quad (3)$$

A dla pozostałych

$$\frac{dT_2}{dZ} = A_{21} T_1 + A_{22} T_2 + A_{23} T_3 \quad (4)$$

.....

$$\frac{dT_i}{dZ} = A_{i,i-1} T_{i-1} + A_{i,i} T_i + A_{i,i+1} T_{i+1} \quad (5)$$

$$i = 3, 4, \dots, N,$$

gdzie  $N$  oznacza liczbę węzłów. Z równania (3) można wyznaczyć temperaturę  $T_2$ , a z (4) -  $T_3$  itd. Ogólna postać rozwiązania

$$T_i = \sum_{k=0}^{N-1} \phi_{k,i-1} T_1^{(k)}(Z), \quad i = 2, 3, \dots, N, \quad (6)$$

gdzie współczynniki  $\phi_{k,i}$  wyznacza się z układu równań

$$A \cdot \phi_0 + B = 0 \quad (7)$$

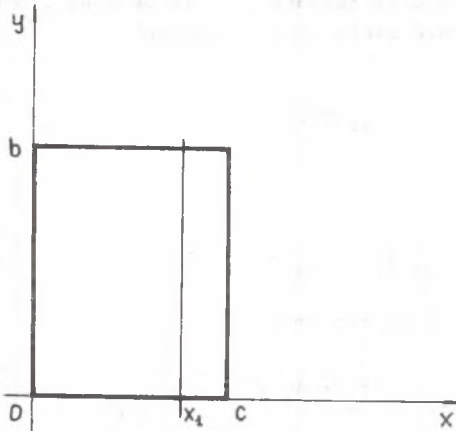
$$A \cdot \phi_k = \phi_{k-1}$$

jeżeli tylko  $A_{ij} = \text{const}$ , zaś wektor  $B$  ma jeden niezerowy element (pierwszy) równy  $A_{11}$ . Macierz  $A$  jest macierzą trójkątną i zawiera współczynniki równań różnicowych od 1 do  $N-1$  (z  $N-1$  równania (5) wyznacza się  $N$ -tą temperaturę).

W ogólnym przypadku macierz  $A$  jest macierzą trójprzekątniową, zawierającą współczynniki wszystkich równań, a szereg (6) staje się szeregiem nieskończonym. Współczynniki  $\phi_{k,i}$  wyznacza się z układów równań typu (7).

Rozwiązanie symetrycznego, dwuwymiarowego pola temperatury w stanie ustalonym może być zapisane równaniem [3]

$$T(X, Y) = \sum_{k=0}^{\infty} \phi_{2k}(X, X_1) F^{(2k)}(Y). \quad (8)$$



Rys. 2. Geometria obszaru dwuwymiarowego

W równaniu tym oznaczają (por. rys. 2)

$X = x/c$  - bezwymiarowe współrzędne,

$Y = y/c$  -

$F(Y)$  - wewnętrzna odpowiedź temperaturowa,

$$F^{(k)}(Y) = d^k F / dY^k.$$

Wewnętrzna odpowiedź temperaturowa jest funkcją, przedstawiającą przebieg temperatury wzdłuż współrzędnej  $Y$  dla dowolnie wybranej współrzędnej  $X_1$  ( $X_1 \in [0, 1]$ ). Funkcja ta musi spełniać równanie przewodzenia ciepła także na brzegach  $Y$ , tzn.

$$F(Y) = T_f(X_1, Y),$$

gdzie:

$$\frac{\partial^2 T_f(x, Y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_f(x, Y)}{\partial Y^2} = 0,$$

a zatem nie jest warunkiem brzegowym w klasycznym tego słowa znaczeniu. Musi mieć także ograniczone pochodne.

Funkcje  $\phi_k(X, X_1)$  wyznaczą się z zależności

$$\phi_0 = 1$$

.....

$$\phi_{2k} = (-1)^k \frac{X^{2k}}{(2k)!} - \sum_{n=0}^{k-1} (-1)^n \frac{X_1^{2(k-n)}}{[2(k-n)]!} \phi_{2n}. \quad (9)$$

## 2. Wyznaczanie pochodnych w rozwiązaniach zagadnień odwrotnych

Informację o wewnętrznej odpowiedzi temperaturowej uzyskuje się z pomiarów. Ma ona zatem charakter dyskretny. Celem wyznaczenia wartości pochodnych dyskretnie dane aproksymowano wielomianem przy użyciu metody naj-

mniejszych kwadratów. Najprostsze rozwiązanie otrzymuje się w przypadku, gdy krok próbkowania jest stały, tzn. dane zbiera się dla

$$\dots, z_j - 2h, z_j - h, z_j, z_j + h, z_j + 2h, \dots, \quad (10)$$

gdzie  $z_j$  odpowiada wybranemu momentowi czasowemu dla zagadnień nieustalonych lub punktowi  $Y$  dla zagadnień ustalonych. Przyjęto następującą postać wielomianu

$$F(z) = a_1 + a_2 \frac{z - z_j}{h} + a_3 \left( \frac{z - z_j}{h} \right)^2 + \dots \quad (11)$$

Z powyższego wynika, że

$$F(z_j) = a_1, \quad F'(z_j) = \frac{a_2}{h}, \quad F^{(k)}(z_j) = \frac{k!}{h^k} a_{k+1}.$$

Współczynniki  $a_k$  są liniową kombinacją wartości funkcji  $F(z)$  w punktach (10) i mogą być ogólnie zapisane (por. [5])

$$a_k = \sum_{l=1}^{l_1+l_2+1} c_{k,l} F(j+1-l_1-1), \quad (12)$$

gdzie oznaczono

$$F(j) = F(z_j),$$

zaś dane zbiera się dla punktów

$$j-1, j-1+1, \dots, j, \dots, j+1, j+1-1, j+1-2. \quad (13)$$

Metoda najmniejszych kwadratów prowadzi do układu równań liniowych na współczynniki  $a_k$ . Przy wykorzystaniu wielomianu w postaci (11) oraz reprezentacji współczynników w postaci (12) można wykazać, że współczynniki  $c_{k,l}$  spełniają następujący układ równań

$$A_1 \cdot C_1 = D_1, \quad 1 = 1, 2, \dots, l_1+l_2+1, \quad (14)$$

gdzie:

$$A_{1,k,l} = \sum_{i=1}^{l_1+l_2+1} (i-1-l_1-1)^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, q+1,$$

$$A_{i,q+1,1} = \sum_{n=1}^{l_1+l_2+1} (n-1, -1)^{q+i-1}, \quad i = 2, 3, \dots, q+1,$$

$$A_{i,k,1} = A_{i-1,k+1,1}, \quad \begin{array}{l} i = 2, 3, \dots, q+1 \\ k = 1, 2, \dots, q, \end{array}$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} c_{1,1} \\ \dots \\ c_{k,1} \\ \dots \\ c_{q+1,1} \end{bmatrix},$$

$$D_1 = \begin{bmatrix} d_{1,1} \\ \dots \\ d_{k,1} \\ \dots \\ d_{q+1,1} \end{bmatrix},$$

$$d_{1,1} = 1$$

$$d_{k,1} = (1-1, -1)^{k-1}, \quad k = 2, 3, \dots, q+1,$$

zaś  $q$  jest stopniem wielomianu. Ostatecznie

$$F^{(k)}(j) = \frac{k!}{h^k} \sum_{l=1}^{l_1+l_2+1} c_{k+1,l} F^{(j+1-l, -1)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (15)$$

Postać (15) jest o tyle wygodna, że w odróżnieniu od klasycznej formy zapisu metody najmniejszych kwadratów współczynniki  $c_{k,1}$  nie zależą od wartości funkcji i przy ustalonych  $l_1$  i  $l_2$  wystarczy tylko raz rozwiązać układ równań (14).

Na podstawie zależności (15) można też oszacować błąd pochodnej. Jeżeli błąd wartości funkcji jest stały i równy  $\delta_F$ , to w przybliżeniu

$$\delta |F^{(k)}(j)| < \delta_F \frac{k!}{h^k} \sum_{l=1}^{l_1+l_2+1} |c_{k,1}|. \quad (16)$$

Błąd ten jednak nie uwzględnia błędu wynikającego ze złego dopasowania wielomianu do zadanej funkcji.

Przeprowadzone próbnie obliczenia dla szerokiej klasy funkcji elementarnych pozwalają stwierdzić, że metodą tą można uzyskiwać stabilne co najwyżej czwarte pochodne. Wymaga to ograniczenia liczby wyrazów szeregów (1),

(6), (8). Przy dużych gradientach temperatur  $dT/dX$  może to stanowić istotne ograniczenie w stosowaniu prezentowanej metody.

### 3. Zastosowanie rachunku wyrównawczego

Jak już wspomniano na wstępie, odwrotne zagadnienia przewodzenia ciepła należą do źle uwarunkowanych. Tiomkin [5] twierdzi, że już zastosowanie metody najmniejszych kwadratów do aproksymacji temperatur, pozwala usunąć tę niekorzystną właściwość. Przeprowadzone obliczenia pozwalają stwierdzić, że wniosek ten nie zawsze jest słuszny.

Zastosowanie rachunku wyrównawczego jest możliwe, o ile dysponujemy pewnymi informacjami dodatkowymi o warunkach przepływu ciepła. Takim dodatkowym warunkiem może być np. warunek brzegowy na powierzchni  $X=1$ . Niech to będzie jednorodny warunek brzegowy III rodzaju

$$\frac{dT}{dX} + Bi T = 0, \quad \text{dla } X = 1, \quad (17)$$

gdzie  $Bi$  oznacza liczbę Biota. Równanie to jest słuszne dla każdego momentu czasowego.

Podstawiając równanie (1) do (17) otrzymuje się niezgodność "w" równania warunku (17)

$$\sum_{k=0}^M [\phi_k'(1, X_1) + Bi \phi_k(1, X_1)] P_k(F_0) = -w. \quad (18)$$

W równaniu tym oznaczono

$$\begin{aligned} \phi_k' &\equiv d\phi/dX \\ P_k &\equiv F^{(k)}(F_0) \end{aligned} \quad (19)$$

$M$  - liczba wyrazów szeregu (1).

Założono dalej, że błędem obarczone są tylko wartości pochodnych  $P_k$  oraz liczba Biota. Można oczywiście listę tych wielkości poszerzyć. Za miarę błędu bezwzględnego  $m_k$  pochodnych  $P_k$  przyjęto wielkość opisaną równaniem (16). Błąd bezwzględny liczby Biota  $\delta Bi = m_{M+1}$  może być wyznaczony zwykłymi metodami wyznaczania błędów wielkości złożonej.

Zgodnie z zasadami rachunku wyrównawczego wprowadza się poprawki  $v_i$  ( $i = 1, 2, \dots, M+1$ ) wielkości występujących w równaniu warunku (18). Warto-

ści tych poprawek oblicza się z warunku na minimum ważonej sumy kwadratów poprawek

$$\sum_{i=1}^{M+1} \frac{v_i^2}{m_i} = \min. \quad (20)$$

Minimum (20) z warunkiem (18) prowadzi do układu równań, z którego można wyznaczyć poszukiwane poprawki  $v_i$ . Podobnie można wykorzystać rachunek wyrównawczy dla problemów ustalonych.

Dla zagadnień sformułowanych numerycznie równanie warunku może wyglądać inaczej. Jeżeli mierzoną temperaturą jest temperatura osi symetrii lub jeżeli do konstrukcji rozwiązania nie wykorzystano warunku brzegowego, to równanie warunku może być zdykretyzowany warunek brzegowy

$$\frac{T_N - T_{N+1}}{R_{\lambda}} = \frac{T_{N+1}}{R_{\alpha}}. \quad (21)$$

W równaniu tym  $R_{\lambda}$ ,  $R_{\alpha}$  oznaczają odpowiednie opory przepływu ciepła między węzłami  $N$  a  $N+1$  oraz  $N+1$  a otoczeniem,  $T_{N+1}$  oznacza temperaturę brzegu ciała, która może być wyznaczona z równania różnicowego dla  $N$ -tego węzła (węzeł przypowierzchniowy).

$$\frac{dT_N}{d\zeta} = A_{N,N-1} T_{N-1} + A_{N,N} T_N + A_{N,N+1} T_{N+1}.$$

Jeżeli natomiast mierzoną temperaturą jest temperatura powierzchni ciała i w konstruowaniu rozwiązania uwzględniono warunek brzegowy (por. pkt. 1), to równaniem warunku może być równanie różnicowe dla węzła położonego w osi symetrii

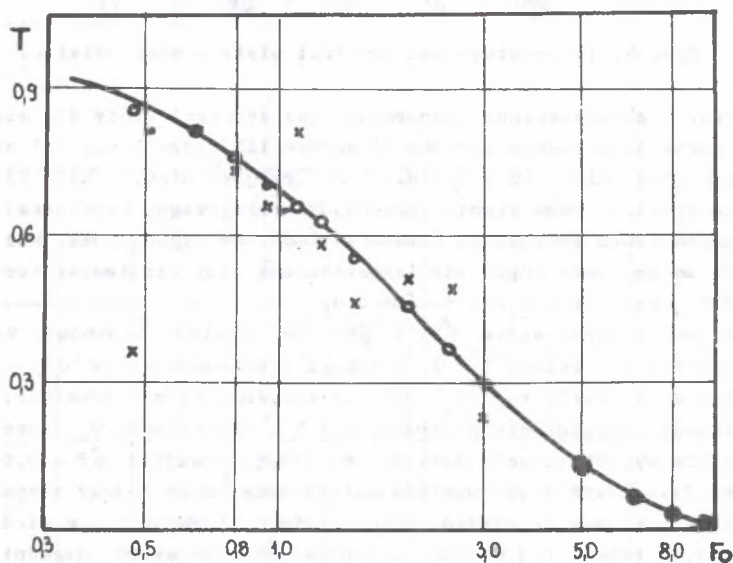
$$\frac{dT_1}{d\zeta} = A_{11} T_1 + A_{12} T_2. \quad (22)$$

W tym przypadku mamy bowiem  $N$  równań różnicowych dla  $N$  węzłów, a tylko  $N-1$  niewiadomych (temperatura jednego węzła jest znana). Zastosowanie równania warunku w postaci (22) ma jednak tę niekorzystną właściwość, że wymaga wyznaczenia kolejnej pochodnej funkcji  $F(\zeta)$ , a zatem zmniejszenia liczby wyrazów szeregu (6). Może to spowodować dalsze ograniczenia w stosowaniu metody, o czym wspomniano w punkcie 2.



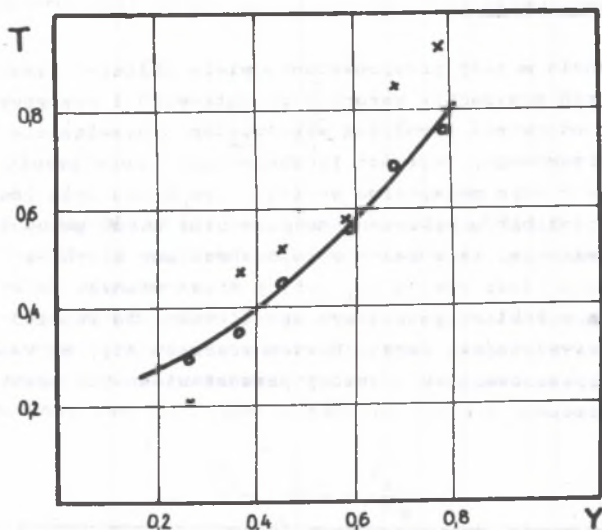
## 4. Wyniki obliczeń i wnioski

Celem sprawdzenia metody przeprowadzono wiele obliczeń liczbowych. Dotyczyły one różnych przypadków warunków początkowych i brzegowych dla  $Bi = 0,05-5,0$ . Jako odpowiedź termiczną wykorzystanie rozwiązanie zagadnienia początkowo-brzegowego. Wartości liczbowe tego rozwiązania obarczano losowo błędem, przy czym maksymalna wartość tego błędu była równa  $\delta F$ . Dla wyznaczenia wartości błędu wykorzystano generator liczb pseudolosowych o rozkładzie równomiernym. Pierwsza z wylosowanych par liczb  $p_1$  służyła do obliczenia wartości błędu równej  $p_1 \cdot F$ , a druga służyła do wyboru znaku błędu. Zastosowanie takiego generatora spowodowało, że rozkład błędów był gorszy niż w rzeczywistości. Często bowiem zdarzało się, że wszystkie kolejne błędy miały ten sam znak. Poniżej przedstawiono dla przykładu niektóre wyniki obliczeń.



Rys. 3. Temperatura osi symetrii płyty - stan nieustalony

Na rys. 3 przedstawiono temperaturę osi symetrii płyty, przy jednorodnym warunku brzegowym III rodzaju, warunku początkowym  $T_0 = 1$ , przy  $Bi = 0,5$ . Linia ciągłą przedstawiono rozwiązanie zagadnienia początkowo-brzegowego, krzyżykami rozwiązanie zagadnienia odwrotnego (równanie (1)) bez uzgadniania, kółeczkami - z uzgadnianiem. Jako odpowiedź temperaturową przyjęto temperaturę powierzchni płyty. Przyjęto także  $\delta F = 0,005$  i  $\delta Bi = 0$ .



Rys. 4. Temperatura osi symetrii płyty - stan ustalony

Na rys. 4 przedstawiono temperaturę osi symetrii płyty dla stanu ustalonego, przy jednorodnym warunku brzegowym III rodzaju dla  $X=1$  oraz przy warunkach  $T=0$  dla  $Y=0$  i  $T=1$  dla  $Y=B$ . Przyjęto  $Bi=0,5$ ,  $B=1$ . Linia ciągłą przedstawiono rozwiązanie zagadnienia brzegowego, krzyżkami rozwiązanie zagadnienia odwrotnego (równanie (8)) bez uzgadniania, kółeczkami - z uzgadnianiem. Jako odpowiedź temperaturową przyjęto temperaturę powierzchni  $X=1$ , przy  $\delta F = 0,005$  i  $\delta Bi = 0$ .

Analizowano także wpływ  $\delta F$  i  $\delta Bi$  na wyniki liczbowe. Wpływ ten przedstawiono w tabelach 1 i 2. W tabeli 1 pokazano wpływ  $\delta Bi$  na wyniki uzgadniania. W tabeli tej  $T_A$  oznacza temperaturę osi symetrii, uzyskaną z rozwiązania zagadnienia prostego, zaś  $T$  - odwrotnego,  $T_0$  oznacza warunek początkowy. Obliczenia dotyczą  $Bi = 0,5$ . Przyjęto  $\delta F = 0,005$ . Przy analizie powyższych wyników należy uwzględnić losowy charakter błędów i stąd brak powtarzalności w wartościach liczbowych odpowiedzi temperaturowej. Z tabeli tej wynika, że wpływ  $\delta Bi$  na wyniki uzgadniania nie jest duży. Podobny wniosek nasuwa analiza wyników uzyskanych przy innych liczbach Biota.

W tabeli 2 przedstawiono wpływ  $\delta F$ . W tabeli tej  $T_A$  oraz  $T$  oznaczają to samo, co w tabeli 1, zaś  $\tilde{T}$  oznacza wyniki rozwiązania odwrotnego bez uzgadniania. Pierwsze dwie kolumny  $\tilde{T}$  i  $T$  odpowiadają 10 węzłom aproksymacji, a ostatnia kolumna - 14. Podobnie, jak tabela 1 przedstawione wyniki dotyczą temperatury osi symetrii płyty nieskończonej w stanie nieustalonym, na podstawie informacji o temperaturze powierzchni płyty.

Tabela 1

$T_o$	$F_o$	$T_A$	T		
			$\delta Bi = 0,05$	$\delta Bi = 0,1$	$\delta Bi = 0,25$
$T_o = 1,0$	1,5	0,5643	0,5701	0,5804	0,5582
	2,0	0,4559	0,4535	0,4494	0,4329
	2,5	0,3683	0,3697	0,3659	0,3759
	3,0	0,2976	0,2911	0,3046	0,2698
$T_o = 1-X^2$	1,5	0,3874	0,3681	0,3712	0,3551
	2,0	0,3130	0,3226	0,3099	0,3140
	2,5	0,2528	0,2628	0,2601	0,2461
	3,0	0,2043	0,1970	0,1900	0,1876
$T_o = X^2$	1,5	0,1769	0,1789	0,1652	0,1927
	2,0	0,1430	0,1518	0,1359	0,1377
	2,5	0,1155	0,1126	0,1239	0,1138
	3,0	0,0933	0,1040	0,1058	0,0945

Tabela 2

$T_o$	$F_o$	$T_A$	$\delta F = 0,01$		$\delta F = 0,05$		$\delta F = 0,05$ przy $L=14$	
			$\tilde{T}$	T	$\tilde{T}$	T	$\tilde{T}$	T
$T_o = 1,0$	1,5	0,5643	0,6828	0,5809	0,9943	0,4025	0,2674	0,5342
	2,0	0,4559	0,5594	0,4759	0,0102	0,4460	0,3342	0,4682
	2,5	0,3683	0,6844	0,3688	0,4596	0,2362	0,4674	0,3499
	3,0	0,2976	0,6481	0,2983	0,2555	0,2242	0,0417	0,3026
$T_o = 1-X^2$	1,5	0,3874	0,4236	0,3553	0,5253	0,3848	0,3198	0,3559
	2,0	0,3130	0,0052	0,2837	0,1905	0,3394	0,5575	0,3315
	2,5	0,2528	0,1265	0,2385	0,5067	0,1810	0,1383	0,2512
	3,0	0,2043	0,3716	0,2070	0,8088	0,2211	0,0081	0,2359
$T_o = X^2$	1,5	0,1769	0,3030	0,1701	0,9855	0,2077	0,4090	0,1475
	2,0	0,1430	0,4435	0,1554	0,4952	0,1840	0,5156	0,1538
	2,5	0,1155	0,5683	0,1347	0,0644	0,1768	0,1693	0,1260
	3,0	0,0933	0,1072	0,1056	0,0289	0,1060	0,2247	0,0900

Z tabeli tej wynika duży wpływ dobrej aproksymacji funkcji F, z tym że w prezentowanych obliczeniach nie optymalizowano stopnia wielomianu, a przyjmowano go jako stały.

Podobne rezultaty osiągnięto dla zadań sformułowanych numerycznie. Z przytoczonych przykładów widać korzystny wpływ zastosowania rachunku wyrównawczego. Tylko dla małych  $F_0$ , jeśli występują silne niestabilności, rachunek wyrównawczy nie jest wystarczającą metodą. Podobnie dla dużych  $\delta F$  (por. 2 i 3 kolumna tabeli 2). Podkreślić jednak należy, że błąd  $F = 0,05$  jest dość dużym błędem (oznacza to np. przy  $T_0 = X^2$  błąd rzędu 5 K przy średnio  $20^\circ\text{C}$ ).

W przytoczonych przykładach zastosowano wielomiany 4-5 stopnia. Do wyznaczenia współczynników wykorzystano 10 wartości temperatur, z tym że dla stanu nieustalonego wartość wielomianu dla  $j$ -tego momentu czasowego obliczano na podstawie temperatur w  $j, j-1, j-2, \dots$  momentach czasowych.

#### LITERATURA

- [1] Hills R.G., Mulholland G.P.: The accuracy and resolving power of the one-dimensional transient inverse heat conduction, theory and applied to discrete and inaccurate measurements, Int. J. of Heat and Mass Transfer, 1979, 22, No 8, 1221-1229.
- [2] Kurpisz K.: Wyznaczanie pola temperatury przy braku informacji o warunkach brzegowych i początkowym. Spr. z pracy naukowo-badawczej NB-95/RME-3/81, wykonanej w Instytucie Techniki Ciepłej Politechniki Śl.
- [3] Kurpisz K.: Zagadnienia odwrotne przewodzenia ciepła dla pól ustalonych. Materiały Sympozjum "Modelowanie w mechanice", 1982.
- [4] Szargut J.: Zastosowanie rachunku wyrównawczego w technice ciepłej. Pomiary, Automatyka i Kontrola, 1980, nr 4.
- [5] Tiomkin A.: Obratnyje metody tieploпроводности. Izd. Energia, 1973.
- [6] Tichonow A.: Obratnyje zadaczi tieploпроводности. Inż.Fiz.Żurnal, 1975, 29, No 1, 7-12.

Recenzent: prof. dr hab. inż. Stanisław Gdula

Wpłynęło do Redakcji w sierpniu 1982 r.

#### ПРИМЕНЕНИЕ УРАВНИТЕЛЬНОГО ВЫЧИСЛЕНИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

#### Резюме

В статье представлена возможность применения уравнительного вычисления для решения обратных задач стационарной и нестационарной теплопроводности. Было получено уменьшение неустойчивости результатов.

THE APPLICATION OF THE LEAST SQUARES METHOD FOR SOLVING INVERSE  
PROBLEMS OF HEAT CONDUCTION

S u m m a r y

The application of the least squares method for solving inverse problems of steady and non-steady heat conduction is presented in this paper. The decrease of non-stability of results has been obtained.