ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1999
Seria: ELEKTRYKA z. 168 Nr kol. 1418

Aleksander ŻYWIEC

RÓWNANIA OGÓLNE SPRZĘGŁA INDUKCYJNEGO WYDATNOBIEGUNOWEGO Z LITYM RDZENIEM I Z UZWOJENIEM ROBOCZYM W TWORNIKU

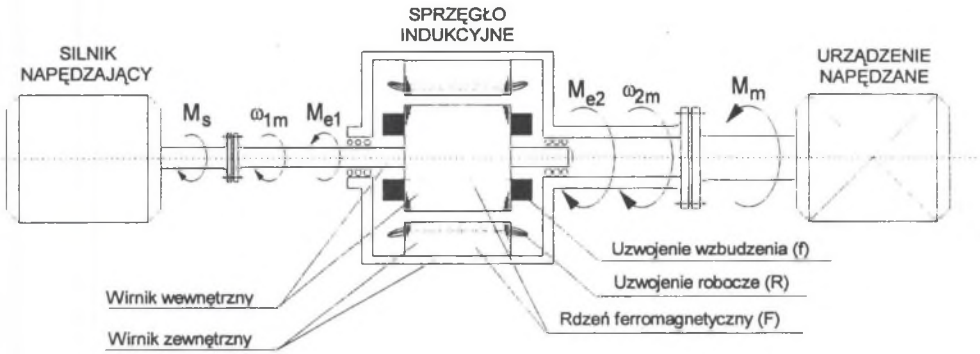
Streszczenie. Przedstawiono równania stanu elektrodynamicznego sprzęgła indukcyjnego obcowzbudnego. Uwzględniono wydatnobiegunowość rdzenia wirnika wewnętrznego, wpływ uzwojenia roboczego w tworniku oraz oddziaływanie elektromagnetyczne rdzenia litego. Równania ogólne we współrzędnych fazowych zlinaryzowano przez zastosowanie transformacji Parka. Przedstawiono model matematyczny sprzęgła we współrzędnych osiowych d-q.

GENERAL EQUATIONS OF SALIENT - POLE INDUCTIVE CLUTCH WITH A SOLID CORE AND AN ARMATURE WINDING

Summary. The paper presents the general equations of electrodynamic state of an inductive separate-excited clutch. The salient-poling of the internal rotor, the reaction of the armature winding and the electromagnetic reaction of the solid core have been taken into account. The general equations in the natural (phase) co-ordinates have been linearized using Park's transformation. The mathematical model of an inductive clutch in the rectangular co-ordinates d-q has been presented.

1. UWAGI WSTĘPNE

Sprzęgła są stosowane do mechanicznego połączenia ze sobą dwóch elementów wirujących, którymi są: silnik napędzający i urządzenie napędzane. Sprzęgło indukcyjne składa się z dwóch części wzajemnie ułożyskowanych, z których jedna nazywana jest wirnikiem wewnętrznym, zaś druga - wirnikiem zewnętrznym (rys.1). Zwykle wirnik wewnętrzny jest połączony mechanicznie z silnikiem napędzającym, natomiast wirnik zewnętrzny jest połączony mechanicznie z urządzeniem napędzanym.



Rys.1. Uproszczony przekrój wzdłużny sprzęgła indukcyjnego obcowzbudnego
Fig. 1. Simplified longitudinal section of an inductive separate - excited clutch

Uzwojenie wirnika wewnętrznego sprzęgła jest zasilane prądem stałym i wytwarza pole magnetyczne stałe względem tego wirnika. Przy wirowaniu obu części sprzęgła z różną prędkością, wytworzone pole magnetyczne jest względem części zewnętrznej polem wirującym kołowym. Wówczas w sprzęgle indukcyjnym powstaje moment elektromagnetyczny (analogicznie do przypadku klasycznej maszyny indukcyjnej). Dzięki temu sprzęgło indukcyjne umożliwia przenoszenie momentu obrotowego bez tarcia. Zatem poszczególne części sprzęgła indukcyjnego nie ulegają zużyciu i dlatego sprzęgło może być stosowane do przenoszenia dowolnie dużego momentu obrotowego.

W niniejszej pracy zostaną przedstawione uogólnione równania stanu elektrodynamicznego sprzęgła indukcyjnego, w których uwzględnia się uzwojenie robocze i oddziaływanie elektromagnetyczne litego rdzenia wirnika wewnętrznego i wirnika zewnętrznego. Równania takie umożliwiają wyznaczenie (w sposób analityczny bądź metodą symulacji komputerowej) właściwości sprzęgieł indukcyjnych (o różnych wykonaniach) w dowolnym stanie pracy ustalonej bądź nieustalonej.

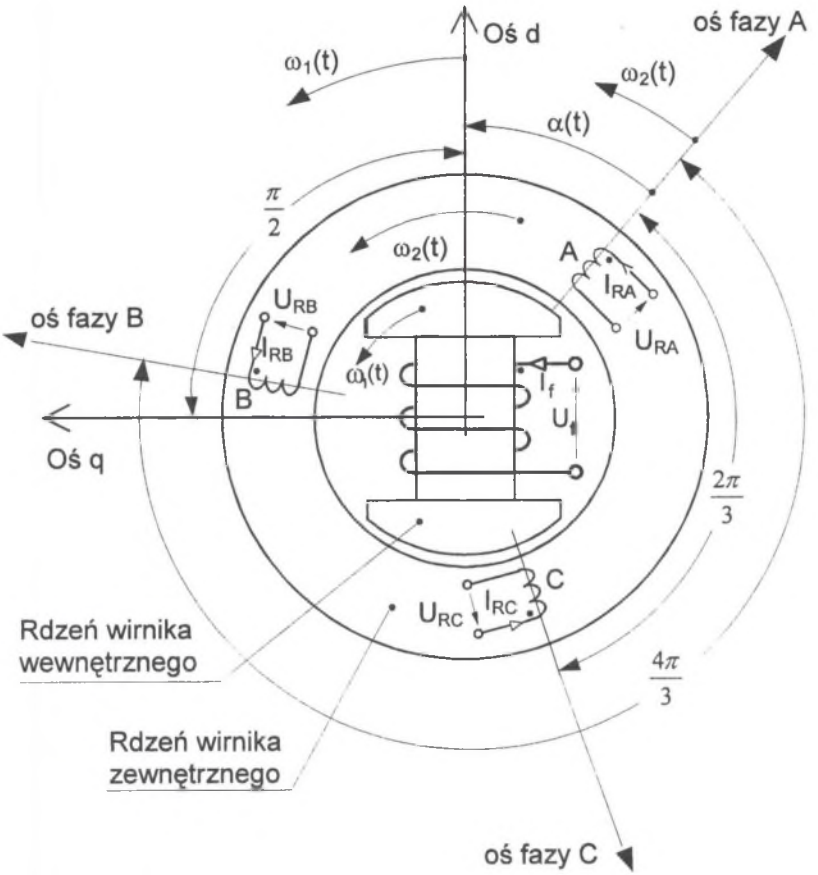
2. MODEL FIZYCZNY SPRZĘGŁA I ZAŁOŻENIA UPRASZCZAJĄCE

Uproszczone przekroje podłużne i poprzeczne modelu fizycznego sprzęgła przedstawiono na rys.1 i rys. 2. Do analizy przyjmuje się sprzęgło indukcyjne z uzwojeniem roboczym i rdzeniem litym, którego wirnik wewnętrzny jest wykonany jak wirnik maszyny

synchronicznej wydatnobiegunowej. W rdzeniu wirnika wewnętrznego jest umieszczone uzwojenie skupione (cewkowe bądź toroidalne), nazywane uzwojeniem wzbudzenia, o końcówkach wyprowadzonych do pierścieni ślizgowych, a stąd - poprzez szczotki elektryczne - do nieruchomej tabliczki zaciskowej. Uzwojenie wzbudzenia sprzęgła obcowzbudnego zasila się prądem stałym, z zewnętrznego źródła. Wirnik zewnętrzny sprzęgła indukcyjnego ma rdzeń ferromagnetyczny, w którego żłobkach jest umieszczone uzwojenie robocze klatkowe lub dwuklatkowe albo rzadko - uzwojenie wielofazowe przyłączone do pierścieni ślizgowych. Rdzenie wirnika wewnętrznego oraz zewnętrznego mogą być pakietowane bądź lite. Stosowane są również sprzęgła z litym rdzeniem wirnika zewnętrznego bez uzwojenia roboczego. Sprzęgła indukcyjne mogą różnić się rozwiązaniem rdzenia wirnika wewnętrznego i zewnętrznego oraz sposobem umieszczenia uzwojenia wzbudzenia [1, 2, 4].

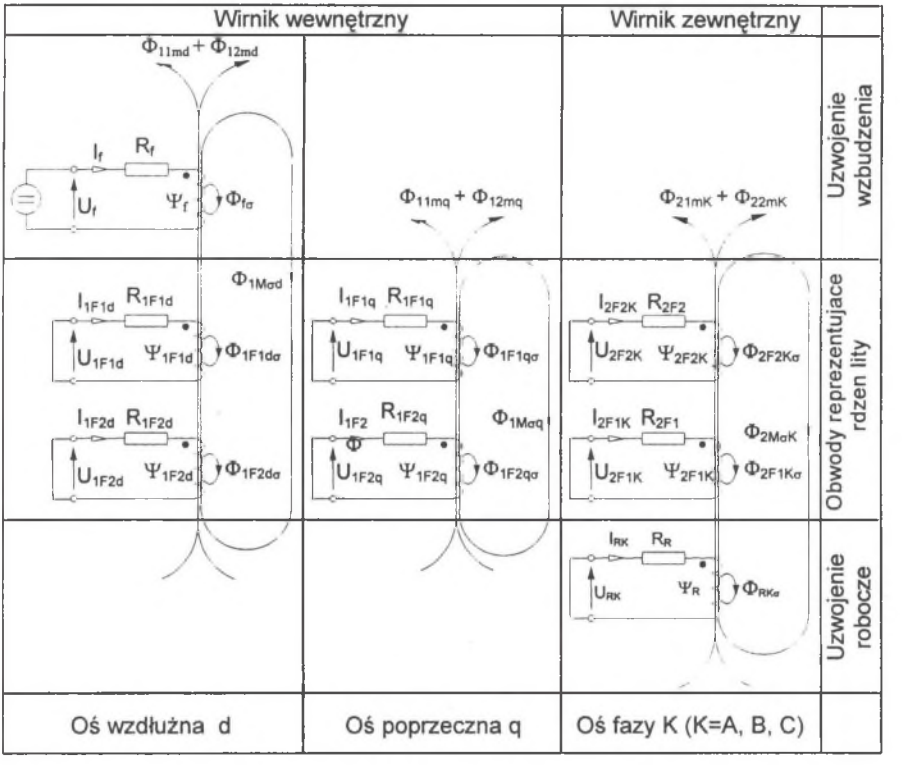
W celu wyprowadzenia równań ogólnych, ważnych dla różnych wykonań sprzęgła indukcyjnego, oraz w celu uproszczenia ich zapisu, do dalszej analizy przyjmuje się następujące założenia (rys.1 i rys. 2):

- wirnik wewnętrzny jest wydatnobiegunowy o liczbie par biegunów równej p_b i wykazuje dwuosiową symetrię magnetyczną: w osi wzdłużnej d, w osi poprzecznej q,
- rozkład permeancji drogi strumienia magnetycznego głównego wzdłuż rozwiniętego obwodu magnetycznego jest funkcją periodyczną parzystą ze składową stałą, zawierającą jedynie harmoniczne parzyste,
- uzwojenie wzbudzenia *(f)* jest skupione w osi wzdłużnej d wirnika wewnętrznego i jest zasilane napięciem U_f wymuszającym prąd I_f,
- oddziaływanie prądów wirowych w rdzeniu litym wirnika wewnętrznego jest reprezentowane za pomocą czterech zastępczych uzwojeń zwartych, przy czym dwa uzwojenia *(1F1d,1F2d)* w osi wzdłużnej d i dwa uzwojenia *(1F1q,1F2q)* w osi poprzecznej q,
- wirnik zewnętrzny jest symetrycznym cylindrem umieszczonym współosiowo z wirnikiem wewnętrznym,
- uzwojenie robocze *(R)* jest trójfazowe *(A,B,C)* symetrycznie rozłożone w rdzeniu wirnika zewnętrznego,



Rys. 2. Uproszczony przekrój poprzeczny sprzęgła indukcyjnego obcowzbudnego
Fig. 2. Simplified cross section of an inductive separate - excited clutch

- oddziaływanie prądów wirowych w rdzeniu litym wirnika zewnętrznego jest reprezentowane za pomocą dwóch zastępczych *(2F1,2F2)* uzwojeń zwartych trójfazowych *(A,B,C)*, symetrycznych, umieszczonych współosiowo z uzwojeniem roboczym,
- obwód magnetyczny (rdzeń) sprzęgła jest nienasycony,
- pomija się wpływ zjawiska wypierania prądu w uzwojeniach sprzęgła,
- pomija się wyższe harmoniczne rozkładu przestrzennego pola magnetycznego wzdłuż rozwiniętego obwodu magnetycznego.



Rys.3. Rozmieszczenie obwodów zastępczych sprzęgła indukcyjnego obcowzbudnego
Fig. 3. Arrangement of equivalent circuits of an inductive separate - excited clutch

Na rys.3 przedstawiono poglądowo rozmieszczenie uzwojeń sprzęgła i zaznaczono strumienie magnetyczne sprzężone z tymi uzwojeniami.

3. RÓWNANIA OGÓLNE SPRZĘGŁA INDUKCYJNEGO WE WSPÓŁRZĘDNYCH NATURALNYCH

Równania ogólne sprzęgła indukcyjnego obejmują zestaw równań różniczkowych, wynikających z równań równowagi elektrycznej, magnetycznej i mechanicznej oraz z równań opisujących działania dynamiczne w polu magnetycznym. Na podstawie równań ogólnych jest możliwe wyznaczenie (w sposób analityczny bądź metodą symulacji komputerowej) właściwości sprzęgła indukcyjnego w dowolnym stanie pracy nieustalonej bądź ustalonej.

Przy przyjętych założeniach i przy systemie strzałkowania zaznaczonym na rys.1-3 oraz po sprowadzeniu parametrów wszystkich uzwojeń na stronę uzwojenia wzbudzenia, obowiązują następujące równania dla dowolnego stanu pracy sprzęgła (kropką u góry zaznaczono wielkości sprowadzone na stronę uzwojenia wzbudzenia):

– równania równowagi elektrycznej:

- równania Kirchhoffa dla uzwojeń wirnika wewnętrznego:

$$\begin{bmatrix} [U^{\bullet}_{1d}(t)] \\ [U^{\bullet}_{1q}(t)] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [R^{\bullet}_{1d}] & [0] \\ [0] & [R^{\bullet}_{1q}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [I^{\bullet}_{1d}(t)] \\ [I^{\bullet}_{1q}(t)] \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} [\psi^{\bullet}_{1d}(t)] \\ [\psi^{\bullet}_{1q}(t)] \end{bmatrix}, \tag{1}$$

- równania Kirchhoffa dla uzwojeń wirnika zewnętrznego:

$$\begin{bmatrix} [U^{\bullet}_{2A}(t)] \\ [U^{\bullet}_{2B}(t)] \\ [U^{\bullet}_{2C}(t)] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [R^{\bullet}_{2}] & [0] & [0] \\ [0] & [R^{\bullet}_{2}] & [0] \\ [0] & [0] & [R^{\bullet}_{2}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [I^{\bullet}_{2A}(t)] \\ [I^{\bullet}_{2B}(t)] \\ [I^{\bullet}_{2C}(t)] \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} [\psi^{\bullet}_{2A}(t)] \\ [\psi^{\bullet}_{2B}(t)] \\ [\psi^{\bullet}_{2C}(t)] \end{bmatrix}, \tag{2}$$

– równania równowagi mechanicznej:

- równanie ruchu mechanicznego wirnika wewnętrznego:

$$M_s(t) = M_{e1}(t) + \frac{1}{p_b} J_1 \frac{d\omega_1(t)}{dt}, \tag{3}$$

- równanie ruchu mechanicznego wirnika zewnętrznego:

$$M_{e2}(t) = M_m(t) + \frac{1}{p_b} J_2 \frac{d\omega_2(t)}{dt}, \tag{4}$$

- równanie równowagi momentów:

$$M_{e1}(t) = M_{e2}(t) = M_e(t), \tag{5}$$

– równanie wiążące prędkości kątowe elektryczne $\omega_1(t) = p_b \omega_{1m}(t)$ oraz $\omega_2(t) = p_b \omega_{2m}(t)$ z kątem elektrycznym $\alpha(t)$, określającym wzajemne położenie wirników sprzęgła:

$$\alpha(t) = \int_0^t \{\omega_1(t) - \omega_2(t)\} dt, \tag{6}$$

przy czym: J_1 i J_2 – moment bezwładności mas wirujących wirnika wewnętrznego i wirnika zewnętrznego sprzęgła.

– równanie określające moment elektromagnetyczny przy liniowej charakterystyce magnesowania (alternatywnie: przy wymuszeniu prądu lub strumienia sprzężonego):

$$M_e(t)=\frac{p_b}{2}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial\alpha(t)}\begin{bmatrix}\psi^{\bullet}_{1d}(t)\\ \psi^{\bullet}_{1q}(t)\end{bmatrix}^T\right)\begin{bmatrix}I^{\bullet}_{1d}(t)\\ I^{\bullet}_{1q}(t)\end{bmatrix}+\left(\frac{\partial}{\partial\alpha(t)}\begin{bmatrix}\psi^{\bullet}_{2A}(t)\\ \psi^{\bullet}_{2B}(t)\\ \psi^{\bullet}_{2C}(t)\end{bmatrix}^T\right)\begin{bmatrix}I^{\bullet}_{2A}(t)\\ I^{\bullet}_{2B}(t)\\ I^{\bullet}_{2C}(t)\end{bmatrix}\right\}, \tag{7a}$$

$$M_e=-\frac{p_b}{2}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial\alpha(t)}\begin{bmatrix}I^{\bullet}_{1d}(t)\\ I^{\bullet}_{1q}(t)\end{bmatrix}^T\right)\begin{bmatrix}\psi^{\bullet}_{1d}(t)\\ \psi^{\bullet}_{1q}(t)\end{bmatrix}+\left(\frac{\partial}{\partial\alpha(t)}\begin{bmatrix}I^{\bullet}_{2A}(t)\\ I^{\bullet}_{2B}(t)\\ I^{\bullet}_{2C}(t)\end{bmatrix}^T\right)\begin{bmatrix}\psi^{\bullet}_{2A}(t)\\ \psi^{\bullet}_{2B}(t)\\ \psi^{\bullet}_{2C}(t)\end{bmatrix}\right\}, \tag{7b}$$

W równaniach (7a,b) wprowadzono wektory (macierze kolumnowe) napięć prądów i strumieni sprzężonych, zdefiniowane następującymi zależnościami ogólnymi (w których W oznacza dowolną wielkość, tzn. napięcie U, prąd I, strumień sprzężony ψ):

- dla wirnika wewnętrznego:

$$\left[W^{\bullet}_{1d}(t)\right]=\left[W_f(t),W^{\bullet}_{1F1d}(t),W^{\bullet}_{1F2d}(t)\right]^T, \tag{8a}$$

$$\left[W^{\bullet}_{1q}(t)\right]=\left[W^{\bullet}_{1F1q}(t),W^{\bullet}_{1F2q}(t)\right]^T, \tag{8b}$$

-dla wirnika zewnętrznego:

$$\left[W^{\bullet}_{2A}(t)\right]=\left[W^{\bullet}_{RA}(t),W^{\bullet}_{2F1A}(t),W^{\bullet}_{2F2A}(t)\right]^T, \tag{9a}$$

$$\left[W^{\bullet}_{2B}(t)\right]=\left[W^{\bullet}_{RB}(t),W^{\bullet}_{2F1B}(t),W^{\bullet}_{2F2B}(t)\right]^T, \tag{9b}$$

$$\left[W^{\bullet}_{2C}(t)\right]=\left[W^{\bullet}_{RC}(t),W^{\bullet}_{2F1C}(t),W^{\bullet}_{2F2C}(t)\right]^T \tag{9c}$$

oraz macierze rezystancji uzwojeń, zdefiniowane następująco:

- dla wirnika wewnętrznego

$$\left[R^{\bullet}_{1d}\right]=diag\left\{R_f,R^{\bullet}_{1F1d}\ R^{\bullet}_{1F2d}\right\}, \tag{10a}$$

$$\left[R^{\bullet}_{1q}\right]=diag\left\{R^{\bullet}_{1F1q}\ R^{\bullet}_{1F2q}\right\}, \tag{10b}$$

- dla wirnika zewnętrznego:

$$\left[R_2^{\bullet}\right] = diag\left\{R_R^{\bullet}, R_{2F1}^{\bullet}, R_{2F2}^{\bullet}\right\}. \tag{11}$$

Figurujące w równaniach (1),...,(7) składowe poszczególnych wektorów strumieni sprzężonych są uzależnione od odpowiednich składowych wektorów prądów sprzęgła.

Strumień sprzężony dowolnego *i-tego* uzwojenia (czyli składowe odpowiedniego wektora strumieni sprzężonych sprzęgła) można zapisać jako sumę trzech składników (rys.3): strumienia rozproszenia "własnego" $\psi_{i\sigma}(t)$, strumienia rozproszenia "wielokrotnego" $\psi_{iM\sigma}(t)$ pochodzącego od uzwojeń rozmieszczonych współosiowo z tym uzwojeniem oraz strumienia głównego $\psi_{im}(t)$. Z kolei strumień sprzężony "główny" dowolnego uzwojenia jest efektem sprzężeń własnych i wzajemnych poszczególnych uzwojeń wirnika wewnętrznego i wirnika zewnętrznego sprzęgła, poprzez strumień magnetyczny główny. Zatem poszczególne wektory strumieni sprzężonych sprzęgła można przedstawić jako sumę czterech składników, w następującej postaci:

– dla uzwojeń wirnika wewnętrznego:

$$\begin{bmatrix} \left[\psi_{1d}^{\bullet}(t)\right] \\ \left[\psi_{1q}^{\bullet}(t)\right] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left[\psi_{1\sigma d}^{\bullet}(t)\right] \\ \left[\psi_{1\sigma q}^{\bullet}(t)\right] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \left[\psi_{1M\sigma d}^{\bullet}(t)\right] \\ \left[\psi_{1M\sigma q}^{\bullet}(t)\right] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \left[\psi_{11md}^{\bullet}(t)\right] \\ \left[\psi_{11mq}^{\bullet}(t)\right] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \left[\psi_{12md}^{\bullet}(t)\right] \\ \left[\psi_{12mq}^{\bullet}(t)\right] \end{bmatrix}, \tag{12}$$

– dla uzwojeń wirnika zewnętrznego

$$\begin{bmatrix} \left[\psi_{2A}^{\bullet}(t)\right] \\ \left[\psi_{2B}^{\bullet}(t)\right] \\ \left[\psi_{2C}^{\bullet}(t)\right] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left[\psi_{2\sigma A}^{\bullet}(t)\right] \\ \left[\psi_{2\sigma B}^{\bullet}(t)\right] \\ \left[\psi_{2\sigma C}^{\bullet}(t)\right] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \left[\psi_{2M\sigma A}^{\bullet}(t)\right] \\ \left[\psi_{2M\sigma B}^{\bullet}(t)\right] \\ \left[\psi_{2M\sigma C}^{\bullet}(t)\right] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \left[\psi_{21mA}^{\bullet}(t)\right] \\ \left[\psi_{21mB}^{\bullet}(t)\right] \\ \left[\psi_{21mC}^{\bullet}(t)\right] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \left[\psi_{22mA}^{\bullet}(t)\right] \\ \left[\psi_{22mB}^{\bullet}(t)\right] \\ \left[\psi_{22mC}^{\bullet}(t)\right] \end{bmatrix}. \tag{13}$$

Można przyjąć, że strumienie sprzężone rozproszenia ("własnego" oraz "wielokrotnego") uzwojenia nie zależą od wzajemnego położenia wirników sprzęgła. Wówczas dla dowolnego uzwojenia strumienie te są określone jako odpowiednie iloczyny indukcyjności rozproszenia "własnego" bądź "wielokrotnego" (o stałych wartościach) i prądów płynących w uzwojeniach sprzężonych poprzez rozpatrywany strumień rozproszenia. Stąd wynikają następujące zależności:

– dla uzwojeń wirnika wewnętrznego

$$\begin{bmatrix} \psi^{\bullet}_{1\sigma d}(t) \\ \psi^{\bullet}_{1\sigma q}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \psi^{\bullet}_{1Mod}(t) \\ \psi^{\bullet}_{1Moq}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left[L^{\bullet}_{1\sigma d}\right]+\left[L^{\bullet}_{1Mod}\right] & 0 \\ 0 & \left[L^{\bullet}_{1\sigma q}\right]+\left[L^{\bullet}_{1Moq}\right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I^{\bullet}_{1d}(t) \\ I^{\bullet}_{1q}(t) \end{bmatrix}, \tag{14}$$

– dla uzwojeń wirnika zewnętrznego

$$\begin{bmatrix} \psi^{\bullet}_{2\sigma A}(t) \\ \psi^{\bullet}_{2\sigma B}(t) \\ \psi^{\bullet}_{2\sigma C}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \psi^{\bullet}_{2MoA}(t) \\ \psi^{\bullet}_{2MoB}(t) \\ \psi^{\bullet}_{2MoC}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left[L^{\bullet}_{2\sigma}\right]+\left[L^{\bullet}_{2Mo}\right] & 0 & 0 \\ 0 & \left[L^{\bullet}_{2\sigma}\right]+\left[L^{\bullet}_{2Mo}\right] & 0 \\ 0 & 0 & \left[L^{\bullet}_{2\sigma}\right]+\left[L^{\bullet}_{2Mo}\right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I^{\bullet}_{2A}(t) \\ I^{\bullet}_{2B}(t) \\ I^{\bullet}_{2C}(t) \end{bmatrix}, \tag{15}$$

gdzie:

- macierze indukcyjności rozproszenia „własnego" i „wielokrotnego" uzwojeń wirnika wewnętrznego

$$\left[L^{\bullet}_{1\sigma d}\right] = diag\left\{L_{f\sigma}, L^{\bullet}_{1F1\sigma d}, L^{\bullet}_{1F2\sigma d}\right\}, \tag{16a}$$

$$\left[L^{\bullet}_{1\sigma q}\right] = diag\left\{L^{\bullet}_{1F1\sigma q}, L^{\bullet}_{1F2\sigma q}\right\}, \tag{16b}$$

$$\left[L^{\bullet}_{1Mod}\right] = L^{\bullet}_{1Mod}\left[1\right]_{3x3} \quad \text{oraz} \quad \left[L^{\bullet}_{1Moq}\right] = L^{\bullet}_{1Moq}\left[1\right]_{2x2}, \tag{16c,d}$$

- macierz indukcyjności rozproszenia „ własnego" i „wielokrotnego" uzwojeń wirnika zewnętrznego

$$\left[L^{\bullet}_{2\sigma}\right] = diag\left\{L^{\bullet}_{R\sigma}, L^{\bullet}_{2F1\sigma}, L^{\bullet}_{2F2\sigma}\right\} \quad \text{oraz} \quad \left[L^{\bullet}_{2Mo}\right] = L^{\bullet}_{2Mo}\left[1\right]_{3x3}, \tag{16 e,f}$$

przy czym poszczególne elementy macierzy indukcyjności rozproszenia uzwojeń sprzęgła, sprowadzone na stronę uzwojenia wzbudzenia, mają stałe wartości.

Wyznaczenie strumieni sprzężonych "głównych" poszczególnych uzwojeń sprzęgła jest bardziej skomplikowane, z uwagi na zależność sprzężeń magnetycznych (własnych i wzajemnych) tych uzwojeń od wzajemnego położenia kątowego wirników sprzęgła. Wynika to z dwuosiowej budowy wirnika wewnętrznego. Znaczne uproszczenie obliczeń otrzymuje się przy uwzględnieniu tylko podstawowej harmonicznej rozkładów przestrzennych siły magnetomotorycznej uzwojeń sprzęgła i przy przyjęciu, że rozkład permeancji wzdłuż rozwiniętego obwodu magnetycznego sprzęgła jest funkcją periodyczną parzystą (ze składową stałą) kąta określającego położenie punktu obwodu wirnika zewnętrznego względem osi

wzdłużnej wirnika wewnętrznego, zawierającą jedynie harmoniczne parzyste. Przy takich założeniach indukcyjność wzajemna, reprezentująca strumień sprzężony "główny" dwóch uzwojeń (K oraz L) sprzęgła o nienasyconym rdzeniu, których osie są przesunięte odpowiednio o kąty elektryczne $\alpha_{eK}(t)$ oraz $\alpha_{eL}(t)$ względem osi wzdłużnej *(d)* sprzęgła, jest określona następującą zależnością [3]:

$$L_{KLm}(t) = L_{KLm}\cos\{\alpha_{eL}(t) - \alpha_{eK}(t)\} + \Delta L_{KLm}\cos\{\alpha_{eL}(t) + \alpha_{eK}(t)\},$$

w której L_{KLm} oraz ΔL_{KLm} są indukcyjnościami wzajemnymi uzwojeń K oraz L wyznaczonymi dla przypadku pokrywania się osi tych uzwojeń (tzn. $\alpha_{eK}(t) = \alpha_{eL}(t)$), przy czym L_{KLm} i ΔL_{KLm} odpowiadają odpowiednio składowej stałej i amplitudzie drugiej harmonicznej rozkładu permeancji sprzęgła. Z zależności powyższej otrzymuje się indukcyjność własną "główną" K-tego uzwojenia sprzęgła po podstawieniu $K=L$.

Uwzględniając przedstawione uwagi otrzymuje się następującą postać zależności określających wektory strumienia sprzężonego "głównego"(rys.3b):

– dla uzwojeń wirnika wewnętrznego

$$\begin{bmatrix} [\psi^{\bullet}_{11md}(t)] \\ [\psi^{\bullet}_{11mq}(t)] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [\psi^{\bullet}_{12md}(t)] \\ [\psi^{\bullet}_{11mq}(t)] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [L^{\bullet}_{11md}] & 0 \\ 0 & [L^{\bullet}_{11mq}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [I^{\bullet}_{1d}(t)] \\ [I^{\bullet}_{1q}(t)] \end{bmatrix} + [L^{\bullet}_{12m}(\alpha)] \begin{bmatrix} [I^{\bullet}_{2A}(t)] \\ [I^{\bullet}_{2B}(t)] \\ [I^{\bullet}_{2C}(t)] \end{bmatrix}, \quad (17)$$

– dla uzwojeń wirnika zewnętrznego

$$\begin{bmatrix} \psi^{\bullet}_{21mA}(t) \\ \psi^{\bullet}_{21mB}(t) \\ \psi^{\bullet}_{21mC}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \psi^{\bullet}_{22mA}(t) \\ \psi^{\bullet}_{22mB}(t) \\ \psi^{\bullet}_{22mC}(t) \end{bmatrix} = [L^{\bullet}_{12m}(\alpha)]^T \begin{bmatrix} [I^{\bullet}_{1d}(t)] \\ [I^{\bullet}_{1q}(t)] \end{bmatrix} + [L^{\bullet}_{22m}(\alpha)] \begin{bmatrix} [I^{\bullet}_{2A}(t)] \\ [I^{\bullet}_{2B}(t)] \\ [I^{\bullet}_{2C}(t)] \end{bmatrix}, \quad (18)$$

w których poszczególne macierze indukcyjności są określone następującymi zależnościami:

- macierze indukcyjności głównych wzajemnych uzwojeń wirnika wewnętrznego w osi d oraz q

$$[L^{\bullet}_{11md}] = L^{\bullet}_{md}[1]_{3x3} \quad \text{oraz} \quad [L^{\bullet}_{11mq}] = L^{\bullet}_{mq}[1]_{2x2}, \quad (19a,b)$$

- macierze indukcyjności głównych wzajemnych uzwojeń wirnika wewnętrznego i wirnika zewnętrznego

$$\left[L^{\bullet}_{12m}(\alpha)\right]=\begin{bmatrix}\left[L^{\bullet}_{12md}\right]\cos\left(\alpha(t)\right) & \left[L^{\bullet}_{12md}\right]\cos\left\{\alpha(t)+\frac{4\pi}{3}\right\} & \left[L^{\bullet}_{12md}\right]\cos\left\{\alpha(t)+\frac{2\pi}{3}\right\}\\ \left[L^{\bullet}_{12mq}\right]\sin\left(\alpha(t)\right) & \left[L^{\bullet}_{12mq}\right]\sin\left\{\alpha(t)+\frac{4\pi}{3}\right\} & \left[L^{\bullet}_{12md}\right]\sin\left\{\alpha(t)+\frac{2\pi}{3}\right\}\end{bmatrix}, \tag{19c}$$

- macierz indukcyjności głównych wzajemnych uzwojeń wirnika zewnętrznego

$$\left[L^{\bullet}_{22m}(\alpha)\right]=\begin{bmatrix}\left[L^{\bullet}_{2m}\right]+\left[\Delta L^{\bullet}_{2m}\right]\cos\left\{2\alpha(t)\right\} & -\frac{1}{2}\left[L^{\bullet}_{2m}\right]+\left[\Delta L^{\bullet}_{2m}\right]\cos\left\{2\alpha(t)+\frac{4\pi}{3}\right\} & -\frac{1}{2}\left[L^{\bullet}_{2m}\right]+\left[\Delta L^{\bullet}_{2m}\right]\cos\left\{2\alpha(t)+\frac{2\pi}{3}\right\}\\ -\frac{1}{2}\left[L^{\bullet}_{2m}\right]+\left[\Delta L^{\bullet}_{2m}\right]\cos\left\{2\alpha(t)+\frac{4\pi}{3}\right\} & \left[L^{\bullet}_{2m}\right]+\left[\Delta L^{\bullet}_{2m}\right]\cos\left\{2\alpha(t)+\frac{2\pi}{3}\right\} & -\frac{1}{2}\left[L^{\bullet}_{2m}\right]+\left[\Delta L^{\bullet}_{2m}\right]\cos\left\{2\alpha(t)\right\}\\ -\frac{1}{2}\left[L^{\bullet}_{2m}\right]+\left[\Delta L^{\bullet}_{2m}\right]\cos\left\{2\alpha(t)+\frac{2\pi}{3}\right\} & -\frac{1}{2}\left[L^{\bullet}_{2m}\right]+\left[\Delta L^{\bullet}_{2m}\right]\cos\left\{2\alpha(t)\right\} & \left[L^{\bullet}_{2m}\right]+\left[\Delta L^{\bullet}_{2m}\right]\cos\left\{2\alpha(t)+\frac{4\pi}{3}\right\}\end{bmatrix} \tag{19d}$$

przy czym z zasad sprowadzania parametrów uzwojenia trójfazowego na stronę uzwojenia dwuosiowego wynika, że:

$$\left[L^{\bullet}_{12md}\right]=\sqrt{\frac{2}{3}}L^{\bullet}_{md}[1]_{3\times3} \qquad \text{oraz} \qquad \left[L^{\bullet}_{12mq}\right]=\sqrt{\frac{2}{3}}L^{\bullet}_{mq}[1]_{2\times3}, \tag{20a,b}$$

$$\left[L^{\bullet}_{2m}\right]=\frac{2}{3}\frac{L^{\bullet}_{md}+L^{\bullet}_{mq}}{2}[1]_{3x3} \qquad \text{oraz} \qquad \left[\Delta L^{\bullet}_{2m}\right]=\frac{2}{3}\frac{L^{\bullet}_{md}-L^{\bullet}_{mq}}{2}[1]_{3x3}. \tag{20c,d}$$

W zależnościach (19a,b) oraz (20a,...,d) indukcyjności $L^{\bullet}_{md}$ i $L^{\bullet}_{mq}$ są sprowadzonymi na stronę uzwojenia wzbudzenia indukcyjnościami magnesującymi ("głównymi") sprzęgła, odpowiednio w osi wzdłużnej d i w osi poprzecznej q.

Przedstawione równania (1),...,(7) równowagi elektrycznej i mechanicznej oraz zależności (17) i (18), wiążące ze sobą odpowiednie wektory strumieni sprzężonych i prądów, stanowią model matematyczny sprzęgła we współrzędnych naturalnych. Widać, że taki model matematyczny jest układem równań różniczkowych nieliniowych, z nieliniowościami typu iloczynowego i trygonometrycznego. Nieliniowość równań wynika ze zmienności indukcyjności własnych i wzajemnych uzwojeń sprzęgła, będącej wynikiem zależności sprzężeń tych uzwojeń (poprzez strumień magnetyczny główny) od kąta $\alpha(t)$ wzajemnego położenia wirników sprzęgła (rys. 2).

4. RÓWNANIA OGÓLNE I SCHEMAT ZASTĘPCZY SPRZĘGŁA INDUKCYJNEGO WE WSPÓŁRZĘDNYCH OSIOWYCH

Linearyzację układu równań różniczkowych sprzęgła indukcyjnego uzyskuje się przez odpowiednią "zamianę zmiennych". Jedną z możliwych dróg jest zastosowanie transformacji Parka (*d-q-0*) dla obwodów wirnika zewnętrznego (rys. 2 i rys. 3) i wprowadzenie nowych wektorów osiowych (we współrzędnych *d-q-0*, rys. 4):

$$\left[W_{2d}^{\bullet}(t)\right] = \left[W_{Rd}^{\bullet}(t);\, W_{2F1d}^{\bullet}(t);\, W_{2F2d}^{\bullet}(t)\right]^T, \tag{21a}$$

$$\left[W_{2q}^{\bullet}(t)\right] = \left[W_{Rq}^{\bullet}(t);\, W_{2F1q}^{\bullet}(t);\, W_{2F2q}^{\bullet}(t)\right]^T, \tag{21b}$$

$$\left[W_{20}^{\bullet}(t)\right] = \left[W_{R0}^{\bullet}(t);\, W_{2F10}^{\bullet}(t);\, W_{2F20}^{\bullet}(t)\right], \tag{21c}$$

w miejsce wektorów fazowych $\left[W_{2A}^{\bullet}(t)\right], \left[W_{2B}^{\bullet}(t)\right], \left[W_{2C}^{\bullet}(t)\right]$, zgodnie z relacją

$$\begin{bmatrix} \left[W_{2d}^{\bullet}(t)\right] \\ \left[W_{2q}^{\bullet}(t)\right] \\ \left[W_{20}^{\bullet}(t)\right] \end{bmatrix} = \left[C_p(\alpha)\right] \begin{bmatrix} \left[W_{2A}^{\bullet}(t)\right] \\ \left[W_{2B}^{\bullet}(t)\right] \\ \left[W_{2C}^{\bullet}(t)\right] \end{bmatrix}. \tag{22}$$

Macierz transformacyjna jest zdefiniowana następującą zależnością:

$$\left[C_p(\alpha)\right] = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} cos\{\alpha(t)\} & cos\left\{\alpha(t) + \frac{4\pi}{3}\right\} & cos\left\{\alpha(t) + \frac{2\pi}{3}\right\} \\ -sin\{\alpha(t)\} & -sin\left\{\alpha(t) + \frac{4\pi}{3}\right\} & -sin\left\{\alpha(t) + \frac{2\pi}{3}\right\} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}. \tag{23}$$

Z zależności (22) i (23) widać, że w przypadku założonej symetrii uzwojeń wirnika zewnętrznego wektor składowej zerowej $\left[W_{20}(t)\right]$ jest zerowy. Wtedy - po transformacji - równania równowagi elektrycznej i mechanicznej w nowych zmiennych (czyli we współrzędnych osiowych *d-q*) przyjmują następującą postać:

– równania równowagi elektrycznej:

- równania Kirchhoffa dla uzwojeń wirnika wewnętrznego

  (mają postać taką, jak równania (1) we współrzędnych naturalnych)

$$\begin{bmatrix} [U_{1d}^{\bullet}(t)] \\ [U_{1q}^{\bullet}(t)] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [R_{1d}^{\bullet}] & [0] \\ [0] & [R_{1q}^{\bullet}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [I_{1d}^{\bullet}(t)] \\ [I_{1q}^{\bullet}(t)] \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} [\psi_{1d}^{\bullet}(t)] \\ [\psi_{1q}^{\bullet}(t)] \end{bmatrix}, \tag{24}$$

- równania Kirchhoffa dla uzwojeń wirnika zewnętrznego (wynikają z równania (2) po wprowadzeniu do nich wielkości osiowych wirnika zewnętrznego w miejsce wielkości fazowych, zgodnie z transformacją (22))

$$\begin{bmatrix} [U_{2d}^{\bullet}(t)] \\ [U_{2q}^{\bullet}(t)] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [R_2^{\bullet}] & [0] \\ [0] & [R_2^{\bullet}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [I_{2d}^{\bullet}(t)] \\ [I_{2q}^{\bullet}(t)] \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} [\psi_{2d}^{\bullet}(t)] \\ [\psi_{2q}^{\bullet}(t)] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\{\omega_1(t)-\omega_2(t)\} \\ \{\omega_1(t)-\omega_2(t)\} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\psi_{2d}(t)] \\ [\psi_{2q}(t)] \end{bmatrix}, \tag{25}$$

– równania równowagi mechanicznej:

(mają postać jak równania (3), (4), (5) we współrzędnych naturalnych)

- równanie ruchu mechanicznego wirnika wewnętrznego:

$$M_s(t) = M_{e1}(t) + \frac{1}{p_b} J_1 \frac{d\omega_1(t)}{dt}, \tag{26}$$

- równanie ruchu mechanicznego wirnika zewnętrznego:

$$M_{e2}(t) = M_m(t) + \frac{1}{p_b} J_2 \frac{d\omega_2(t)}{dt}, \tag{27}$$

- równanie równowagi momentów:

$$M_{e1}(t) = M_{e2}(t) = M_e(t), \tag{28}$$

– równanie wiążące prędkości kątowe $\omega_1(t)$ i $\omega_2(t)$ z kątem elektrycznym $\alpha(t)$:

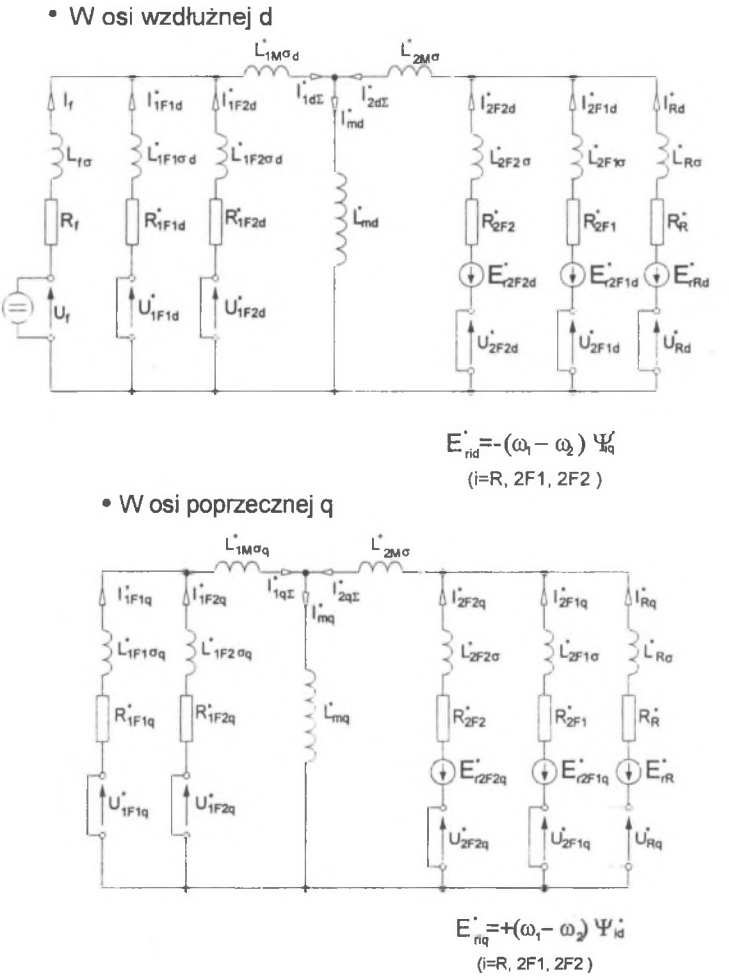
(ma postać taką, jak równanie (6) we współrzędnych naturalnych)

$$\alpha(t) = \int_0^t \{\omega_1(t) - \omega_2(t)\} dt, \tag{29}$$

– równanie określające moment elektromagnetyczny:

(wynika z przekształcenia równania (7) po wprowadzeniu wielkości osiowych wirnika zewnętrznego w miejsce wielkości fazowych, zgodnie z relacją (22))

$$M_e(t) = p_b\left\{\left[\psi^{\bullet}_{2d}(t)\right]^T\left[I^{\bullet}_{2q}(t)\right] - \left[\psi^{\bullet}_{2q}(t)\right]^T\left[I^{\bullet}_{2d}(t)\right]\right\}. \tag{30}$$



Rys.4. Schematy zastępcze sprzęgła indukcyjnego we współrzędnych 2-osiowych *d-q*
Fig. 4. Equivalent circuits of the inductive clutch in the 2-axis co-ordinates *d-q*

W wyniku powyższych przekształceń równań równowagi sprzęgła, zależności wiążące ze sobą wektory osiowe strumieni sprzężonych i prądów uzwojeń przyjmują następującą postać:

$$\begin{bmatrix} [\psi^{\bullet}_{1d}(t)] \\ [\psi^{\bullet}_{1q}(t)] \end{bmatrix} = [L^{\bullet}_{11}] \begin{bmatrix} [I^{\bullet}_{1d}(t)] \\ [I^{\bullet}_{1q}(t)] \end{bmatrix} + [L^{\bullet}_{12}] \begin{bmatrix} [I^{\bullet}_{2d}(t)] \\ [I^{\bullet}_{2q}(t)] \end{bmatrix}, \tag{31a}$$

$$\begin{bmatrix} [\psi^{\bullet}_{2d}(t)] \\ [\psi^{\bullet}_{2q}(t)] \end{bmatrix} = [L^{\bullet}_{12}]^{T} \begin{bmatrix} [I^{\bullet}_{1d}(t)] \\ [I^{\bullet}_{1q}(t)] \end{bmatrix} + [L_{22}] \begin{bmatrix} [I^{\bullet}_{2d}(t)] \\ [I^{\bullet}_{2q}(t)] \end{bmatrix}. \tag{31b}$$

Figurujące w równaniach (31a,b) macierze indukcyjności własnych i wzajemnych uzwojeń sprzęgła (sprowadzone na stronę uzwojenia wzbudzenia) są określone następującymi zależnościami:

$$[L^{\bullet}_{11}] = \begin{bmatrix} [L^{\bullet}_{1\sigma d}] + [L^{\bullet}_{1M\sigma d}] + [L^{\bullet}_{11md}] & 0 \\ 0 & [L^{\bullet}_{1\sigma q}] + [L^{\bullet}_{1M\sigma q}] + [L^{\bullet}_{11mq}] \end{bmatrix}, \tag{32a}$$

$$[L^{\bullet}_{12}] = \begin{bmatrix} [L^{\bullet}_{md}] & 0 \\ 0 & [L^{\bullet}_{mq}] \end{bmatrix}, \tag{32b}$$

$$[L^{\bullet}_{22}] = \begin{bmatrix} [L^{\bullet}_{2\sigma}] + [L^{\bullet}_{2M\sigma}] + [L^{\bullet}_{22md}] & 0 \\ 0 & [L^{\bullet}_{2\sigma}] + [L^{\bullet}_{2M\sigma}] + [L^{\bullet}_{22mq}] \end{bmatrix}, \tag{32c}$$

przy czym macierze indukcyjności rozproszenia uzwojeń sprzęgła są określone zależnościami (16a,...,f), zaś macierze indukcyjności „głównych" (magnesujących) sprzęgła w osiach d i q są określone zależnościami (19a,b) oraz następującymi równaniami:

$$[L^{\bullet}_{md}] = L^{\bullet}_{md}[1]_{3\times 3} \quad \text{oraz} \quad [L^{\bullet}_{mq}] = L^{\bullet}_{mq}[1]_{2\times 3}, \tag{33a,b}$$

$$[L^{\bullet}_{22md}] = L^{\bullet}_{md}[1]_{3\times 3} \quad \text{oraz} \quad [L^{\bullet}_{22mq}] = L^{\bullet}_{mq}[1]_{3\times 3}. \tag{34a,b}$$

Równaniom (24) i (25) równowagi elektrycznej, po uwzględnieniu zależności (31a,b) określających strumienie sprzężone, odpowiadają osiowe schematy zastępcze sprzęgła indukcyjnego przedstawione na rys. 4.

Równania (24),...,(30) równowagi elektrycznej i mechanicznej oraz zależności (31a,b) wiążące ze sobą odpowiednie wektory osiowe strumieni sprzężonych i prądów, stanowią zlinearyzowany model matematyczny sprzęgła we współrzędnych osiowych *d-q*. W wyniku rozwiązania tych równań, dla narzuconych warunków zasilania uzwojeń przy zadanych momentach silnika napędzającego oraz urządzenia napędzanego (rys. 1), otrzymuje się zależności określające właściwości sprzęgła w stanie pracy ustalonej bądź nieustalonej.

4. UWAGI KOŃCOWE

Przedstawiono równania stanu elektrodynamicznego sprzęgła indukcyjnego o uogólnionej budowie. W szczególności w równaniach uwzględniono oddziaływanie elektromagnetyczne uzwojenia roboczego oraz rdzenia litego wirnika wewnętrznego i wirnika zewnętrznego. Dzięki takiemu ujęciu problemu, przedstawione równania mogą być wykorzystane do badania właściwości całej klasy sprzęgieł indukcyjnych o różnych wykonaniach.

Przedstawione równania umożliwiają badanie właściwości sprzęgła indukcyjnego zarówno w stanie pracy ustalonej, jak też w stanach nieustalonych. Stanowią one podstawę do opracowania odpowiednich programów komputerowych, umożliwiających prowadzenie badań symulacyjnych pracy różnych typów sprzęgieł indukcyjnych w stanie nieustalonym bądź w stanie ustalonym.

LITERATURA

1. Pełczewski W.: Sprzęgła elektromagnetyczne. WNT, Warszawa,1965.
2. Tunia H., Łastowiecki J.: Elektryczne elementy automatyki. PWN, Warszawa 1986.
3. Paszek W.: Stany nieustalone maszyn elektrycznych prądu przemiennego, WNT, Warszawa 1976.

4. Pawełczyk G.: Sprzęgło indukcyjne samowzbudne. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, ser. Elektryka z.154, Gliwice 1996, s.109 ÷ 120.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Piotr Wach

Wpłynęło do Redakcji dnia 25 grudnia 1998 r.

Abstract

An inductive clutch is used to couple two rotating mechanical devices together (the driving motor and the device being driven) which are to rotate in relation to each other (Fig.1). The inductive clutch enables the above mentioned coupling at any rotation velocities owing to the clutch electromagnetic torque. The inductive clutch does not wear out because of bearing of the rotors of the coupled devices.

Chapter 2 presents the physical model of an inductive clutch and the assumed simplifications. The externally excited salient-pole inductive clutch has been examined. In Fig. 1 and Fig.2 the simplified sections of the clutch (longitudinal and cross) have been shown. The analysis has taken into account the electromagnetic reactions of solid core and armature winding. Fig.3 presents the lay-out of the equivalent circuits.

The general equations of the salient-pole inductive-clutch in the natural (phase) co-ordinates have been given in Chapter 3. These are non-linear equations consisting of electrical equilibrium Eqns (1) and (2), mechanical equilibrium Eqns (3) ....(7) and electromagnetic coupling Eqns (12)...(15), (17), (18). Current, voltage and linkage flux vectors defined by the formulas (8a,b) and (9a,b) have been introduced into the matrix of equations. Resistance and inductance matrices of the clutch are described by Eqns (10a,b), (11), (16a...f), (19,a...d), (20a...d).

The linearized equations of the inductive clutch have been presented in Chapter 4. Using Park's transformation (23) one gets both the electrical equilibrium Eqns (24), (25) and the equation describing the electromagnetic torque of the clutch (30). In Fig. 4 the equivalent circuits of a salient-pole inductive clutch with a solid core and an armature winding have been shown.

The formulated general equations and the equivalent circuits may be used for investigation of properties of various inductive clutches under normal and transient working conditions.