ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 2002
Seria: AUTOMATYKA z. 134 Nr kol. 1554

Aleksander BACHMAN, Adam JANIAK, Tomasz KRYSIAK
Politechnika Wrocławska

JEDNOMASZYNOWY PROBLEM SZEREGOWANIA ZADAŃ O ZMIENNYCH WARTOŚCIACH

Streszczenie. W pracy rozpatrzono jednomaszynowy problem szeregowania, w którym wartości zadań są opisane potęgową funkcją zależną od czasów zakończenia ich wykonywania. Rozpatrzono kryterium maksymalizacji sumy wartości zadań. Analizowany problem został przeformułowany w taki sposób, że zamiast maksymalizacji sumy wartości zadań, optymalizowanym kryterium jest minimalizacja sumy strat ich wartości. Określono złożoność obliczeniową ogólnej wersji problemu wykorzystując transformację z Problemu Podziału. Dla szczególnych przypadków badanego problemu wykazano szereg własności określających optymalne rozwiązanie.

SINGLE MACHINE SCHEDULING PROBLEM WITH JOB VALUES DEPENDENT ON THEIR COMPLETION TIMES

Summary. The paper deals with a single machine scheduling problem where job values are characterized by an exponential function dependent on the completion time of job execution. Maximization of the total values is considered as an optimization criterion. However, to simplify the considerations, we reformulate the problem so that the total lost of job values should be minimized. We prove that the general version of the problem stated above is NP-hard. The proof is done from the well known Partition Problem. We construct some optimal algorithms which solve special cases of the general problem in polynomial time.

1. Wprowadzenie

W teorii szeregowania zadań, prawie wszystkie kryteria optymalizacji są opisane jako funkcje zależne od czasów zakończenia wykonywania zadań. Oznacza to, że czas zakończenia wykonywania zadania jest jednym z podstawowych parametrów określających wkład danego zadania do funkcji kryterialnej. Często w praktyce wkład danego zadania do funkcji kryterialnej należy traktować jako jego wartość. Dotychczas w literaturze naukowej rozważano głównie modele z liniową funkcją opisującą zależność wartości zadania od czasu zakończenia jego wykonywania, tzn. $1||\sum w_i C_i$. Wspomniany problem jest wielomianowo rozwiązywalny w czasie $O(n\log n)$ [4] poprzez uszeregowanie zadań w niemalejącym porządku według współczynników p_i / w_i. W pracy [7] zaproponowano zupełnie inne kryterium opisujące jakość optymalizowanego procesu. Wprowadzono tam bowiem potęgowy model opisujący zmianę wartości zadania w zależności od momentu zakończenia jego wykonywania. Praktyczne uzasadnienie takiego modelu można znaleźć opisując proces odzyskiwania części zamiennych z produktów zaawansowanych technologicznie (np. wysłużonego sprzętu komputerowego lub samochodów), które ze względu na swój wiek, bądź przepracowany czas, nie nadają się do dalszej eksploatacji jako całość lub ich dalsza eksploatacja jest związana z wysokim ryzykiem powstania awarii. Rozpatrywane wysłużone produkty nie nadają się do pracy jako całość, ale niektóre ich podzespoły są jeszcze sprawne, w miarę nowoczesne i mogą zostać wykorzystane jako części zamienne w produktach nowszej generacji. Wobec powyższego, pojawia się tutaj problem odzyskania sprawnych podzespołów (części) z wysłużonych produktów. Głównym kryterium branym pod uwagę w tego typu działalności jest zapotrzebowanie na podzespoły (części), które wpływa bezpośrednio na ich wartość rynkową. Wartość rynkowa natomiast jest związana z momentem, kiedy te podzespoły będą dostępne do dalszego wykorzystania. Okazuje się bowiem, że wspomniana wartość rynkowa poszczególnych podzespołów (części) maleje potęgowo w czasie. Co więcej, tempo spadku wartości jest inne dla każdego podzespołu. Celem optymalizacji procesu demontażu jest znalezienie takiej kolejności rozmontowywania produktów, dla której suma wartości uzyskanych podzespołów jest jak największa. Liniowe i kwadratowe funkcje opisujące zmianę wartości zadania (badane m.in. w [1], [5] oraz [6]) nie nadają się do modelowania powyżej opisanego procesu. Zmiany wartości zadań w tym procesie najlepiej charakteryzuje funkcja potęgowa.

W ogólności, omawiane powyżej różne przypadki funkcji opisującej zależność wartości zadania od czasu zakończenia jego wykonywania można opisać jako $v_i(C_i)$. W modelu tym mieszczą się zarówno rozważane już przypadki funkcji liniowej, czy kwadratowej, jak i nowe modele (np. funkcje potęgowe, czy też funkcje dyskretne). W niniejszej pracy rozważany będzie model opisany przez funkcję potęgową, za pomocą której można dobrze scharakteryzować proces demontażu produktów zaawansowanych technologicznie. W celu uproszczenia analizy model wartości zadania $v_i(C_i)$ został przedstawiony jako różnica pomiędzy jego wartością początkową a funkcją straty. Dzięki temu przeformułowaniu kryterium maksymalizacji sumy wartości zadań zostało zastąpione kryterium minimalizacji sumy strat ich wartości.

Dalsza część pracy jest zorganizowana następująco. Rozdział 2 zawiera dokładne sformułowanie rozpatrywanego problemu. W rozdziale 3 wykazano NP-trudność ogólnej wersji badanego problemu, natomiast w rozdziale 4 wykazano szereg własności określających optymalne rozwiązania dla jego szczególnych przypadków. W rozdziale 5 zawarto krótkie podsumowanie uzyskanych wyników oraz przedstawiono dalsze kierunki badań.

2. Sformułowanie problemu

Dany jest zbiór n niezależnych i niepodzielnych zadań dostępnych w chwili $t=0$, które mają być wykonywane na pojedynczej maszynie. Dla każdego zadania dany jest czas jego wykonywania p_i, jego wartość początkowa $z_i(0)$ oraz funkcja straty $w_i(t)$ określająca wielkość straty wartości zadania w momencie t. Zakładamy, że

a) wartość początkowa zadania wynosi $z_i(0)\overset{\Delta}{=}Z_iD$, gdzie Z_i oznacza rzeczywistą wartość rynkową zadania (Z_i jest dodatnią liczbą całkowitą), natomiast D oznacza pewien dodatni współczynnik korekcyjny zapewniający dodatnią wartość zadania w czasie całego procesu realizacji zadań,

b) funkcja straty $w_i(t)$ jest zdefiniowana jako $w_i(t)=v_it^{a_i}$, gdzie v_i oraz a_i oznaczają odpowiednio stratę wartości zadania na jednostkę czasu oraz współczynnik straty; parametry v_i oraz a_i są dodatnimi liczbami wymiernymi; łatwo zauważyć, że strata wartości zadania liczona w momencie $t=0$ jest równa 0.

Biorąc pod uwagę założenia podane powyżej, możemy zdefiniować ogólne wyrażenie charakteryzujące wartość zadania w chwili t

$$z_i(t)\overset{\Delta}{=}z_i(0)-w_i(t)=Z_iD-v_it^{a_i}. \tag{1}$$

Zakładamy, że wartość zadania $z_i(t)$ jest dodatnia w każdej chwili t procesu realizacji zadań, wobec tego następujące ograniczenie powinno być spełnione $z_i(t)=Z_iD-v_it^{a_i}>0$ dla $t=\sum_{i=1}^{n}p_i$. Przy założeniu że $D=v_{\max}\left(\sum_{i=1}^{n}p_i\right)^{a_{\max}}$, gdzie $a_{\max}=\max_{i=1,\dots,n}a_i$ oraz

$v_{\max} = \max_{i=1,\dots,n} v_i$, otrzymujemy dodatnią wartość zadania w każdej chwili t procesu realizacji zadań.

Problem rozpatrywany w niniejszej pracy polega na znalezieniu takiego uszeregowania zadań π (tj. kolejności wykonywania zadań na pojedynczej maszynie), dla którego suma wartości zadań w momencie zakończenia ich wykonywania jest maksymalna, tzn.:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} z_{\pi(i)}(C_{\pi(i)}) = \sum_{i=1}^{n} z_{\pi(i)}(0) - \sum_{i=1}^{n} w_{\pi(i)}(C_{\pi(i)})\right) \to \max, \tag{2}$$

gdzie $C_{\pi(i)}$ oznacza czas zakończenia wykonania zadania zajmującego pozycję i-tą w uszeregowaniu π. Powyższe kryterium jest równoważne minimalizacji sumy strat wartości zadań wyznaczonych w momentach zakończenia ich wykonywania

$$\sum_{i=1}^{n} w_{\pi(i)}(C_{\pi(i)}) = \sum_{i=1}^{n} v_{\pi(i)} C_{\pi(i)}^{a_{\pi(i)}} \to \min. \tag{3}$$

Model wartości zadania zdefiniowany jako (1) różni się znacząco od definicji modelu wartości zadania, który został podany w [7]. Różnica polega na tym, że w pracy [7] model wartości zadania został opisany jako malejąca funkcja potęgowa, natomiast w niniejszej pracy model wartości zadania jest opisany jako różnica pomiędzy stałą wartością początkową zadania a rosnącą funkcją straty jego wartości. Zgodnie z trójpolową notacją $\alpha|\beta|\gamma$ wprowadzoną w pracy [3], rozpatrywany tutaj problem jest oznaczony jako $1\|\sum v_i C_i^{a_i}$.

3. Złożoność obliczeniowa

W niniejszym rozdziale wykażemy, że NP-zupełny Problem Podziału [2] jest wielomianowo transformowalny do decyzyjnej wersji (DV) problemu sformułowanego w rozdziale 2. Problem Podziału (PP) jest zdefiniowany następująco:

PP: Dany jest zbiór $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ zawierający m dodatnich liczb całkowitych, dla których zachodzi $\sum_{i=1}^{m} x_i = 2B$. Czy istnieje podział zbioru X na dwa rozłączne podzbiory X_1 oraz X_2 taki, że $\sum_{x_i \in X_1} x_i = \sum_{x_i \in X_2} x_i = B$?

Twierdzenie 1. Problem $1||\sum v_i C_i^{a_i}$ jest NP-trudny nawet dla przypadku z dwoma różnymi współczynnikami straty a_i.

Dowód. Dla zadanej instancji PP skonstruujemy instancję problemu $1||\sum v_i C_i^{a_i}$. W problemie DV jest $n = m+1$ zadań, wśród których jest m zadań *podziału* oraz jedno zadanie *dodatkowe*. Parametry zadań są dane następująco:

$$p_i = x_i; \quad v_i = x_i; \quad a_i = 1; \quad i = 1,\dots,m;$$

$$p_e = B; \quad v_e = 1/4; \quad a_e = 2.$$

Pokażemy, że PP posiada rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje rozwiązanie dla skonstruowanej powyżej instancji problemu $1||\sum v_i C_i^{a_i}$ z następującą wartością kryterium $\sum v_i C_i^{a_i} \le y = \sum_{i=1}^{m} x_i^2 + \sum_{1\le i<j\le m} x_i x_j + 2B^2$.

(PP $\Rightarrow$ DV) Załóżmy, że istnieje podział zbioru X na dwa rozłączne podzbiory X_1 oraz X_2 taki, że zachodzi $\sum_{x_i \in X_1} x_i = \sum_{x_i \in X_2} x_i = B$. Niech J_1 oraz J_2 oznaczają zbiory zawierające zadania utworzone odpowiednio na podstawie elementów z podzbiorów X_1 oraz X_2. Załóżmy, bez straty ogólności, że zbiory J_1 oraz J_2 zawierają odpowiednio k oraz m-k zadań ($0 \le k \le m$). Rozwiązanie dla problemu $1||\sum v_i C_i^{a_i}$ jest dane przez uszeregowanie, w którym w pierwszej kolejności maszyna wykonuje (w dowolnej kolejności) zadania ze zbioru J_1, następnie zadanie dodatkowe, a następnie zadania ze zbioru J_2 (również w dowolnej kolejności). Wartość kryterium dla takiego uszeregowania, obliczona na podstawie wzoru (3), wynosi:

$$\sum_{i=1}^{n} v_{\pi(i)} C_{\pi(i)}^{a_{\pi(i)}} = \sum_{i=1}^{k} p_{\pi(i)} \sum_{j=i}^{k} v_{\pi(j)} + \sum_{i=k+2}^{n} p_{\pi(i)} \sum_{j=i}^{n} v_{\pi(j)} + v_e \left(p_e + \sum_{i=1}^{k} p_{\pi(i)} \right)^{a_e} + \left(p_e + \sum_{i=1}^{k} p_{\pi(i)} \right) \sum_{i=k+2}^{n} v_{\pi(i)}.$$

Ze względu na to, że $p_i = x_i$ oraz $v_i = x_i$, wartość powyższego wyrażenia jest równa

$$\sum_{i=1}^{n} v_{\pi(i)} C_{\pi(i)}^{a_{\pi(i)}} = \sum_{i=1}^{m} x_i^2 + \sum_{1\le i<j\le m} x_i x_j + v_e \left(p_e + \sum_{x_i \in X_1} x_i \right)^{a_e} + p_e \sum_{x_i \in X_2} x_i. \tag{4}$$

Z przyjętego założenia $\sum_{x_i \in X_1} x_i = \sum_{x_i \in X_2} x_i = B$ wynika, że wyrażenie (4) jest równe wymaganej wartości $y = \sum_{i=1}^{m} x_i^2 + \sum_{1\le i<j\le m} x_i x_j + 2B^2$.

($\neg$PP $\Rightarrow$ $\neg$DV) Załóżmy teraz, że dowolny podział zbioru X na dwa rozłączne podzbiory X_1 oraz X_2 daje $\sum_{x_i \in X_1} x_i \neq \sum_{x_i \in X_2} x_i$. Wobec tego zachodzi $\sum_{x_i \in X_1} x_i = B - \lambda$ oraz $\sum_{x_i \in X_2} x_i = B + \lambda$, gdzie λ jest pewną dodatnią liczbą całkowitą. Wyrażenie (4) określa wartość kryterium dla dowolnego uszeregowania zadań, utworzonego na podstawie podziału X na dwa rozłączne podzbiory X_1 oraz X_2. Zatem, przy założeniu braku rozwiązania dla PP otrzymujemy

$$\sum_{i=1}^{n} v_{\pi(i)} C_{\pi(i)}^{a_{\pi(i)}} = \sum_{i=1}^{m} x_i^2 + \sum_{1 \le i < j \le m} x_i x_j + v_e \left(p_e + \sum_{x_i \in X_1} x_i \right)^{a_e} + p_e \sum_{x_i \in X_2} x_i$$

$$= \sum_{i=1}^{m} x_i^2 + \sum_{1 \le i < j \le m} x_i x_j + \frac{1}{4}(B + B - \lambda)^2 + B(B + \lambda)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} x_i^2 + \sum_{1 \le i < j \le m} x_i x_j + 2B^2 + \frac{1}{4}\lambda^2 = y + \frac{1}{4}\lambda^2 > y.$$

Z powyższego wynika, że brak rozwiązania dla PP sprawia, że problem DV również nie posiada rozwiązania. Zatem, problem DV posiada rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy PP posiada je również.

4. Wielomianowo rozwiązywalne przypadki

W niniejszym rozdziale wykażemy, że pewne szczególne przypadki problemu sformułowanego w rozdziale 2 można rozwiązać optymalnie za pomocą algorytmów o złożoności wielomianowej. Algorytmy, które można skonstruować na podstawie wykazanych poniżej własności, opierają się na prostych procedurach sortowania i wybierania. Złożoność obliczeniowa każdego z tych algorytmów jest równa O(nlogn).

Własność 1. Uszeregowanie zadań według niemalejących wartości ich czasów wykonywania p_j (reguła SPT) daje optymalne rozwiązanie dla problemu $1\| \sum C_i^a$.

Dowód. Załóżmy, że dane są dwie permutacje π oraz π'. Permutacja π' powstała z permutacji π poprzez zamianę zadań na pozycjach j-tej oraz j+1-szej. Załóżmy nie wprost, że permutacja π, w której zachodzi $p_{\pi(j)} > p_{\pi(j+1)}$, jest optymalna. Łatwo zauważyć, że w obu permutacjach tylko czasy zakończenia zadań z pozycji j-tej są różne. Różnica funkcji kryterialnych otrzymanych dla obu permutacji wynosi

$$\sum_{i=1}^{n} C_{\pi(i)}^{a} - \sum_{i=1}^{n} C_{\pi'(i)}^{a} = \left(\sum_{i=1}^{j-1} p_{\pi(i)} + p_{\pi(j)}\right)^{a} - \left(\sum_{i=1}^{j-1} p_{\pi(i)} + p_{\pi(j+1)}\right)^{a}.$$

Z założenia $p_{\pi(j)} > p_{\pi(j+1)}$ wynika, że powyższy rezultat jest dodatni. Zatem, w rozważanym przypadku uszeregowanie zadań według niemalejących wartości ich czasów wykonywania p_j jest optymalne.

Własność 2. Optymalne rozwiązanie dla problemu $1|p_i = p|\sum C_i^{a_i}$ można wyznaczyć poprzez uszeregowanie zadań według nierosnących wartości a_i.

Dowód. Załóżmy, podobnie jak w dowodzie Własności 1, że dane są dwie permutacje π oraz π', które różnią się między sobą tylko zadaniami uszeregowanymi na pozycjach j-tej oraz j+1-szej. Załóżmy nie wprost, że permutacja π jest optymalna i że nie wszystkie zadania są uszeregowanie według nierosnących wartości a_i, tzn. następująca nierówność jest spełniona $a_{\pi(j)} < a_{\pi(j)} + \lambda = a_{\pi(j+1)}$, gdzie λ jest pewną dodatnią liczbą. Różnica pomiędzy funkcjami kryterialnymi otrzymanymi dla obu permutacji jest równa

$$\sum_{i=1}^{n} C_{\pi(i)}^{a_{\pi(i)}} - \sum_{i=1}^{n} C_{\pi'(i)}^{a_{\pi'(i)}} = [(j+1)p]^{a_{\pi(j+1)}} - [jp]^{a_{\pi(j+1)}} - [(j+1)p]^{a_{\pi(j)}} - [jp]^{a_{\pi(j)}}$$

$$= [(j+1)p]^{a_{\pi(j)}}\left([(j+1)p]^{\lambda} - 1\right) - [jp]^{a_{\pi(j)}}\left([jp]^{\lambda} - 1\right)$$

Powyższy rezultat jest dodatni, ponieważ zachodzi $[(j+1)p]^{a_{\pi(j)}} > [jp]^{a_{\pi(j)}}$ oraz $[(j+1)p]^{\lambda} > [jp]^{\lambda}$. Zatem, permutacja π nie może być optymalna, a to oznacza, że dowodzona własność jest prawdziwa.

Własność 3. Dla problemu $1\left|p_i > 1, a_i = \begin{cases} 1, & i \in \{1,\dots,n\}\setminus\{e\}, \\ a_e \in Z_+, & i = e, \end{cases}\right|\sum C_i^{a_i}$, w optymalnym uszeregowaniu, zadanie e poprzedza wszystkie pozostałe zadania, które są uszeregowane według niemalejących wartości ich czasów wykonywania p_j (reguła SPT).

Dowód. Jeżeli $a_e = 1$, wtedy powyższa własność wynika z Własności 1. Wobec tego, wystarczy pokazać, że Własność 3 jest również spełniona dla dowolnej wartości $a_e \in Z_+$ większej od 1. Załóżmy, że dane są dwie permutacje π oraz π'. W permutacji π zadanie e

zajmuje pozycję j-tą, natomiast w permutacji π' pozycję pierwszą. Kolejność wykonywania pozostałych zadań w obu permutacjach jest taka sama. Załóżmy nie wprost, że permutacja π jest optymalna. Różnica pomiędzy wartościami funkcji kryterialnych otrzymanymi dla obu permutacji wyraża się następująco:

$$\sum_{i=1}^{n} C_{\pi(i)}^{a_{\pi(i)}} - \sum_{i=1}^{n} C_{\pi'(i)}^{a_{\pi'(i)}} = \left[\sum_{i=1}^{j-1} p_{\pi(i)} + p_e\right]^{a_e} - p_e^{a_e} - (j-1)p_e.$$

Korzystając ze wzoru na dwumian Newtona, powyższe wyrażenie możemy zapisać jako:

$$\sum_{i=1}^{n} C_{\pi(i)}^{a_{\pi(i)}} - \sum_{i=1}^{n} C_{\pi'(i)}^{a_{\pi'(i)}} = \sum_{k=0}^{a_e}\left[\binom{a_e}{k}\left(\sum_{i=1}^{j-1} p_{\pi(i)}\right)^{a_e-k} p_e^k\right] - p_e^{a_e} - (j-1)p_e$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{j-1} p_{\pi(i)}\right)^{a_e} + a_e\left(\sum_{i=1}^{j-1} p_{\pi(i)}\right)^{a_e-1} p_e$$

$$+ \sum_{k=2}^{a_e-1}\left[\binom{a_e}{k}\left(\sum_{i=1}^{j-1} p_{\pi(i)}\right)^{a_e-k} p_e^k\right] + p_e^{a_e} - p_e^{a_e} - (j-1)p_e.$$

Otrzymany rezultat jest dodatni, ponieważ zachodzi $a_e\left(\sum_{i=1}^{j-1} p_{\pi(i)}\right)^{a_e-1} p_e > (j-1)p_e$. Zatem, w optymalnym uszeregowaniu dla rozpatrywanego problemu zadanie e zajmuje pierwszą pozycję. Wobec tego permutacja π nie może być optymalna. Kolejność wykonywania pozostałych zadań opisuje reguła SPT, co wynika z Własności 1.

5. Podsumowanie

W niniejszej pracy rozpatrywano jednomaszynowe problemy szeregowania zadań o zmiennych wartościach. Wartość zadania w chwili t jest określona jako różnica pomiędzy wartością początkową zadania a funkcją straty obliczoną w tej chwili t. W niniejszej pracy przyjęto potęgową funkcję straty wartości zadania. Rozwiązanie problemu polegało na wyznaczeniu kolejności wykonywania zadań na pojedynczej maszynie, dla którego suma strat wartości wszystkich zadań jest minimalna. Wykazano, że ogólny przypadek rozpatrywanego problemu jest NP-trudny. W dowodzie NP-trudności wykorzystano Problem Podziału. Dla szczególnych przypadków rozpatrywanego problemu wykazano szereg własności charakteryzujących rozwiązanie optymalne.

LITERATURA

1. Della Croce F., Szwarc W., Tadei R., Baracco P., Di Tullio R.: Minimizing the weighted sum of quadratic completion on a single machine, Naval Research Logistics, vol. 42, 1995, s. 1263-1270.
2. Garey M. R, Johnson D. S.: Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-completeness, Freeman: San Francisco, 1979.
3. Graham R. L., Lawler E. L., Lenstra J. K., Rinnooy Kann A. H. G.: Optimization and approximation in sequencing and scheduling: a survey, Annals of Discrete Mathematics, vol. 5, 1979, s. 287-326.
4. Smith W. E.: Various optimizers for single-stage production, Naval Res. Logist. Quart., vol. 3, 1956, s. 59-66.
5. Szwarc W., Posner M. E., Liu J. J.: The single machine problem with a quadratic cost function of completion times, Management Science, vol. 34, No. 12, 1988, s. 1480-1488.
6. Townsend W.: The single machine problem with quadratic penalty function of completion times: a branch-and-bound solution, Management Science, vol. 24, No. 5, 1978, s. 530-534.
7. Voutsinas T. G., Pappis C. P.: Scheduling jobs with values exponentially deteriorating over time, Raport Techniczny Uniwersytetu w Pireusie, 2000.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Jerzy Klamka

Abstract

The paper deals with a single machine scheduling problem where job values are characterized by an exponential function dependent on the completion time of job execution. Maximization of the total values is considered as an optimization criterion. However, to simplify the considerations, we reformulate the problem so that the total lost of job values should be minimized. We prove that the general version of the problem stated above is NP-hard. The proof is done from the well known Partition Problem. We construct some optimal algorithms which solve special cases of the general problem in polynomial time. The application example of the problem investigated in the paper describes the utilization process of some used up products. These products cannot be used any more because of the one of the following reasons: the risk of their utilization is relatively big, they do not satisfy some requirements (e.g. computers are too slow) or simply some of their component parts are already broken. It means that these products cannot be used as a whole device, however some of their components can be utilized as spare parts in some new products (e.g. computers of a

new generation). Thus, in this situation, the problem of disassembling products into the components appears. The order in which the products are disassembled depends on the demand for some particular components. However, demand for the components is directly connected with their values. Finally, the component values depend on the moment when they are available for utilization. Our objective is to find an order of disassembling the products so that the sum of the values of the obtained components is maximized. In the problem described above, an exponential function characterizes the change of the component value with respect to the moment when it is available for utilization.