ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 2002
Seria: AUTOMATYKA z. 134 Nr kol. 1554

Stanisław GAWIEJNOWICZ , Wiesław KURC, Lidia PANKOWSKA
Uniwersytet im. Adama Mickiewicza, Poznań

DWUKRYTERIALNE SZEREGOWANIE ZADAŃ CZASOWO-ZALEŻNYCH

Streszczenie. W pracy rozważany jest jednomaszynowy problem szeregowania zadań czasowo-zależnych z jednoczesną minimalizacją dwu kryteriów. Czas wykonywania p_j zadania j jest funkcją czasu rozpoczęcia t tego zadania, $p_j=1+\alpha_j t$, gdzie $\alpha_j > 0$ dla $j=0,1,2,\ldots,n$. Zadania są niepodzielne, niezależne, nie ma czasów gotowości ani linii krytycznych. Kryterium optymalności uszeregowania $\|\cdot\|_{(\lambda)}$ jest ważoną sumą kryteriów C_{max} oraz ΣC_j postaci $\|C\|_{(\lambda)} = \lambda\Sigma C_j + (1-\lambda)C_{max}$, gdzie $\lambda \in [0,1]$ jest dowolną, ustaloną liczbą rzeczywistą, a C jest wektorem czasów zakończenia zadań.
Przedstawiono twierdzenia mówiące, iż istnieje takie $\lambda_0 > 0$, że dla wszystkich $\lambda \in [0, \lambda_0]$ problem ten jest rozwiązywalny w czasie O(nlogn) oraz takie $\lambda_1 < 1$, że dla wszystkich $\lambda \in [\lambda_1,1]$ optymalne uszeregowanie dla tego problemu jest V-kształtne. Podano także dolne i górne oszacowania stosunku wartości kryterium $\|\cdot\|_{(\lambda)}$ do wartości kryteriów C_{max} oraz ΣC_j.

BICRITERION TIME-DEPENDENT SCHEDULING

Summary. In the paper a single machine time-dependent scheduling problem with simultaneous minimization of two criteria is considered. Processing time p_j of job j is a function of the starting time t of the job, $p_j=1+\alpha_j t$, where $\alpha_j > 0$ for $j=0,1,2,\ldots,n$. The jobs are nonpreemptable, independent, there are neither ready times nor deadlines. The criterion of a schedule optimality $\|\cdot\|_{(\lambda)}$ is a weighted sum of C_{max} and ΣC_j criteria, $\|C\|_{(\lambda)} = \lambda\, \Sigma C_j + (1-\lambda)C_{max}$, where $\lambda \in [0,1]$ is an arbitrary, fixed real number and C is a vector of completion times of jobs.
There are presented theorems saying that there exists $\lambda_0 > 0$ such that for all $\lambda \in [0, \lambda_0]$ the problem is solvable in O(nlogn) time and $\lambda_1 < 1$ such that for all $\lambda \in [\lambda_1,1]$ an optimal schedule for the problem has a V-shape. There are also given lower and upper bounds for the ratio of values of the criterion $\|\cdot\|_{(\lambda)}$ and values of C_{max} and ΣC_j criteria.

1. Wstęp

Teoria szeregowania zadań powstała w połowie lat pięćdziesiątych ubiegłego wieku w celu rozwiązywania problemów napotykanych w ówczesnej praktyce przemysłowej. Do głównych założeń tej teorii należą między innymi dwa: 1) czasy wykonywania zadań są stałymi, znanymi z góry wielkościami, 2) tylko jedno kryterium jest stosowane do oceny jakości uszeregowania [3],[25].

Założenie dotyczące niezmienności czasów wykonywania zadań silnie ogranicza obszar stosowalności teorii, istnieje bowiem wiele praktycznych problemów szeregowania, w których czasy wykonywania są zmienne. Zmienność ta może być spowodowana albo własnościami problemu, albo faktem wykonywania tych zadań na maszynach o zmiennej prędkości [8], [9]. Jednym z nurtów współczesnej teorii szeregowania zadań, w którym nie jest spełnione założenie o niezmienności czasów wykonywania, jest *szeregowanie zadań czasowo-zależnych* (ang. *time-dependent scheduling*). W tym przypadku czas wykonywania zadania jest opisany pewną funkcją zależną od czasu rozpoczęcia wykonywania tego zadania [1], [9].

Drugie założenie, mówiące o stosowaniu tylko jednej funkcji kryterialnej, jest nieco nierealistyczne, ponieważ bardzo często stosowanie tylko jednego kryterium optymalności jest niewystarczające. Stąd modele szeregowania zadań, w których mamy do czynienia z dwoma bądź więcej kryteriami, są niezbędnymi narzędziami do budowania bardziej rzeczywistych modeli procesów przemysłowych [15].

Głównym celem tej pracy jest przedstawienie pewnego dwukryterialnego problemu szeregowania zadań czasowo-zależnych. Problem ten można sformułować następująco. Dana jest jedna maszyna oraz zbiór zadań, które mają zostać wykonane na tej maszynie. Czasy wykonywania zadań są czasowo-zależne i mają postać $p_j=1+\alpha_j t$, gdzie t oraz $\alpha_j > 0$ oznaczają, odpowiednio, czas rozpoczęcia wykonywania zadania oraz jego *współczynnik wydłużenia* (ang. *deterioration rate*), j=0,1,...,n. Należy znaleźć minimalną wartość normy $\|C\|_{(\lambda)} = \lambda\Sigma C_j + (1-\lambda)C_{max}$, dla dowolnego, ale ustalonego $\lambda \in [0,1]$, gdzie $C=[C_0,C_1,...,C_n]^T$ oznacza wektor czasów zakończenia zadań. Minimalizacja ta jest dokonywana po wszystkich permutacjach danego ciągu $\hat{\alpha}$, gdzie $\hat{\alpha} = (\alpha_0,\alpha_1,...,\alpha_n)$ jest ciągiem współczynników wydłużenia poszczególnych zadań.

Opisując problemy szeregowania zadań czasowo-zależnych będziemy stosować notację wprowadzoną w pracy [14], z następującym rozszerzeniem. W drugim i w trzecim polu tej notacji będziemy podawać, odpowiednio, postać funkcji opisującej czas wykonywania zadania oraz postać funkcji kryterialnej. Przykładowo, rozważany problem będzie w tej notacji oznaczany symbolem $1|p_j=1+\alpha_j t| \|\cdot\|_{(\lambda)}$.

Zanim przejdziemy do przedstawienia głównych rezultatów pracy, krótko omówimy szeregowanie dwukryterialne oraz szeregowanie zadań czasowo-zależnych.

2. Szeregowanie dwukryterialne

W praktyce często spotykamy się z problemami wymagającymi minimalizacji dwu lub więcej kryteriów. Przykładowo, naszym celem może być nie tylko minimalizacja kosztów produkcji, ale jednocześnie maksymalizacja zysków. Podobnie, zwykle interesują nas uszeregowania, w których nie tylko łączny czas zakończenia wszystkich zadań jest minimalny, ale także nie ma zadań spóźnionych. Stąd też duże znaczenie praktyczne dwukryterialnego szeregowania zadań [15]. Mimo iż pierwsza praca z tej dziedziny [24], dotycząca problemu $1|L_{max} \leq 0|\Sigma C_j$, została opublikowana już w 1956 roku, aż do początku lat osiemdziesiątych nie dokonano istotnego postępu. Obecnie ta gałąź teorii szeregowania zadań jest już samodzielnym obszarem badań, z bogatą literaturą [7], [18], [22].

Zazwyczaj kryteria, które chcemy minimalizować, nie są *zgodne* (ang. *agreeable*), tzn. wartość jednego kryterium wzrasta, podczas gdy wartość innego maleje. Stąd wynika potrzeba znalezienia pewnego kompromisu pomiędzy wartościami interesujących nas kryteriów. Znane są dwa podejścia do problemu jednoczesnej minimalizacji dwu lub więcej kryteriów. W pierwszym z nich wybieramy najpierw kryterium uważane za istotniejsze, po czym poszukujemy optymalnego uszeregowania z punktu widzenia tego kryterium. Następnie, w zbiorze uszeregowań optymalnych z punktu widzenia pierwszego kryterium staramy się znaleźć uszeregowania optymalne ze względu na drugie kryterium. To podejście nosi nazwę *szeregowania hierarchicznego* (ang. *hierarchical scheduling*). Istnieje także specjalny jego przypadek, nazywany *szeregowaniem dualnym* (ang. *dual scheduling*), w którym zamiast znajdowania optimum bardziej istotnego kryterium ograniczamy jego wartość przed rozpoczęciem poszukiwania uszeregowania optymalnego ze względu na drugie kryterium.

W drugim podejściu, nazywanym *jednoczesną minimalizacją* (ang. *simultaneous minimization*), dokonujemy agregacji badanych kryteriów w jedno nowe kryterium, będące najczęściej ważoną sumą, w której wagi określają istotność poszczególnych kryteriów.

Więcej szczegółów na temat szeregowania dwukryterialnego podaje literatura, zob. np. [7], [18]. Przegląd prac dotyczących szeregowania wielokryterialnego można znaleźć w [22].

3. Szeregowanie zadań czasowo-zależnych

Niezależnie od liczby kryteriów stosowanych do oceny jakości uszeregowania, zwykle przyjmuje się założenie mówiące, iż czasy wykonywania zadań są ustalonymi, znanymi z góry wielkościami. Istnieje jednak wiele praktycznych problemów, w których wykonywane zadania mają zmienne czasy wykonywania. Jednym ze stosowanych podejść do problemu zmienności czasów wykonywania zadań jest *szeregowanie zadań czasowo-zależnych* (ang. *time-dependent scheduling*), w którym czas wykonywania zadania zależy od czasu rozpoczęcia wykonywania tego zadania, przy czym zależność ta jest opisana pewną nieujemną funkcją jednej zmiennej.

Szeregowanie zadań czasowo-zależnych jest stosunkowo młodym nurtem współczesnej teorii szeregowania zadań, liczącym sobie nieco ponad 20 lat. Pierwszy artykuł z tej dziedziny [19] został opublikowany w języku rosyjskim w 1979 roku i dotyczył szeregowania zadań na procesorach identycznych oraz dedykowanych, przy założeniu iż czasy wykonywania zadań są opisane tą samą funkcją. Parę lat później, w 1986 roku, opublikowano pierwszą pracę w języku polskim [26], poświęconą przypadkowi jednego procesora oraz czasów liniowych. W obu przypadkach kryterium optymalności była minimalizacja długości uszeregowania C_{max}.

W chwili obecnej literatura (w języku angielskim) liczy około 40 prac. Większość znanych wyników dotyczy przypadku jednego procesora oraz podstawowych kryteriów jakości uszeregowania, takich jak C_{max} [4], [6], [13], [19], [25], [26], $\Sigma w_j C_j$ [2] czy ΣC_j [11], [21], [23]. Znane są także prace dotyczące procesorów równoległych [5], [16], [20], dedykowanych [17], szeregowania zadań czasowo-zależnych z kryteriami normowymi [12] czy jednoczesną minimalizacją dwu kryteriów [10].

Więcej szczegółów na temat szeregowania zadań czasowo-zależnych można znaleźć w literaturze przedmiotu, zob. np. [1], [9].

4. Wyniki pomocnicze

W tym punkcie przedstawimy definicje pojęć oraz twierdzenia pomocnicze, które będą wykorzystywane w dalszej części pracy. Ze względu na jej objętość pomijamy dowody, szczegóły można znaleźć w pracach [10], [11].

Zauważmy, że ze względu na postać czasów wykonywania prawdziwe jest następujące równanie rekurencyjne:

$$C_j = C_{j-1}+p_j(C_{j-1})=1+(1+\alpha_j)C_{j-1}=1+a_jC_{j-1},$$

gdzie $j=1,2,\ldots,n$, $a_j=1+\alpha_j$ oraz $C_0=1$.

To równanie można przedstawić w postaci macierzowej równością $A(a)C(a)=d(1)$, gdzie $A(a)$ jest macierzą dolnotrójkątną, z jedynkami na głównej przekątnej oraz elementami $-a_i$, $i=1,2,\ldots,n$, bezpośrednio poniżej tej przekątnej, natomiast $C(a)=[C_0,C_1,\ldots,C_n]^T$ oraz $d(1)=[1,1,\ldots,1]^T$ to, odpowiednio, wektor czasów zakończenia zadań dla danego ciągu a oraz wektor n+1 jedynek.

Łatwo spostrzec, że współczynnik $a_0=1+\alpha_0$ nie wpływa na wartość C_j dla $j=0,1,2,\ldots,n$. Stąd, jeżeli dana jest jakakolwiek permutacja ciągu $\hat{a}=(a_0,a_1,a_2,\ldots,a_n)$, optymalna strategia polega na ustawieniu na pozycji 0 największego elementu ciągu $\hat{a}$ [21]. Biorąc to pod uwagę, począwszy od tej chwili, będziemy zakładać, że a_0 jest największym elementem ciągu $\hat{a}$ oraz rozważać tylko ciąg $a=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$.

Macierz A(a) jest odwracalna, zatem wykorzystując postać macierzy odwrotnej $A^{-1}(a)$ możemy podać formułę opisującą poszczególne elementy wektora $C(a)=A^{-1}(a)d(1)$:

$$C_i(a)=a_1\cdots a_i+a_2\cdots a_i+\ldots+a_i+1=1+\sum_{j=1}^{i} a_j a_{j+1}\cdots a_i$$

dla $i=0,1,\ldots,n$.

Przypomnimy teraz definicję normy Höldera l_p dla wektora $x \in R^n$.

Definicja 1. Niech $1 \le p \le +\infty$. Normą l_p wektora $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in R^n$ nazywamy liczbę rzeczywistą $\|.\|_p$ określoną następująco: $\|x\|_p=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ dla $1 \le p < +\infty$ oraz $\|x\|_p=\max_{1\le i\le n}\{x_i\}$ dla $p=+\infty$.

Zauważmy, że $\|C\|_1 \equiv \sum C_i$ oraz $\|C\|_\infty \equiv C_{max}$, a więc kryteria $\sum C_i$ oraz C_{max} są szczególnymi przypadkami normy l_p. Nasze kryterium optymalności, $\|\cdot\|_{(\lambda)}$, jest wypukłą kombinacją norm l_1 oraz l_∞, tzn. $\|\cdot\|_{(\lambda)} = \lambda\|\cdot\|_1 + (1-\lambda)\|\cdot\|_\infty$. Interesuje nas zachowanie się tej normy w przedziale (0,1).

Od tej chwili będziemy zakładać, że n>2, tzn. ciąg $a=(a_1,a_2,...,a_n)$ zawiera co najmniej trzy elementy takie, że $a_i > 1$ dla $i=1,...,n$, $n \geq 3$. Niech $a(a_q \leftrightarrow a_r)$ oznacza wektor a z elementami a_q oraz a_r zamienionymi miejscami.

Lemat 1. Niech $b= a(a_q \leftrightarrow a_{q+1})$, gdzie $q=1,2,...,n-1$. Wtedy różnica $C_i(b) - C_i(a)$ jest równa: $(a_q - a_{q+1})\cdot a_{q+2} ... a_i$ dla $1 \leq q < i \leq n$, $(a_{q+1} - a_q)\cdot \sum_{j=0}^{q-1} a_{j+1}... a_{q-1}$ dla $i = q$ oraz 0 dla $0 \leq i < q$.

Na mocy lematu 1, sumując różnice $C_i(b) - C_i(a)$ dla $i=0,1,...,n$, otrzymujemy formułę opisującą zachowanie się normy l_1 przy transpozycjach $b= a(a_q \leftrightarrow a_{q+1})$.

Lemat 2. Niech $b= a(a_q \leftrightarrow a_{q+1})$, gdzie $q=1,2,...,n-1$. Wtedy zachodzi równość

$$\|C(b)\|_1 - \|C(a)\|_1 = (a_{q+1} - a_q)\cdot(\sum_{j=0}^{q-1} a_{j+1}...a_{q-1} - \sum_{i=q+1}^{n} a_{q+2}...a_i).$$

Ponieważ $\|C\|_\infty=C_n$, na mocy lematu 1 (dla i=n) otrzymujemy formułę opisującą zachowanie się normy $\|C(a)\|_\infty$ przy transpozycjach $b= a(a_q \leftrightarrow a_{q+1})$.

Lemat 3. Niech $b= a(a_q \leftrightarrow a_{q+1})$, gdzie $q=1,2,...,n-1$. Wtedy zachodzi równość

$$\|C(b)\|_\infty - \|C(a)\|_\infty = (a_q - a_{q+1})\cdot a_{q+2}...a_n.$$

Definicja 2. Ciąg $\pi=(\pi_1, \pi_2,..., \pi_n)$ nazywamy *V-kształtnym*, jeżeli istnieje indeks $1 \leq m \leq n$ taki, że wartości π_i nie rosną dla $1 \leq i \leq m$ oraz nie maleją dla $m \leq i \leq n$.

5. Główne wyniki

Na mocy lematów 2 i 3 otrzymujemy formułę opisującą zachowanie się normy $\|\cdot\|_{(\lambda)}$ przy transpozycjach $b= a(a_q \leftrightarrow a_{q+1})$.

Twierdzenie 1. Niech $b= a(a_q \leftrightarrow a_{q+1})$, gdzie $q=1,2,...,n-1$. Wówczas prawdziwa jest równość

$$\|C(b)\|_{(\lambda)} - \|C(a)\|_{(\lambda)} = (a_{q+1} - a_q)\ (\lambda(\sum_{j=0}^{q-1} a_{j+1}...a_{q-1} - \sum_{j=q+1}^{n-1} a_{q+1}...a_j) - a_{q+2}...a_n).$$

Niech q=1,2,...,n-1 i niech $\lambda \in [0,1]$ będzie ustalone, lecz dowolne. Zdefiniujmy funkcję $\Lambda_q(\lambda)$ następująco:

$$\Lambda_q(\lambda) = \lambda\left(\sum_{j=0}^{q-1} a_{j+1}\ldots a_{q-1} - \sum_{j=q+1}^{n-1} a_{q+1}\ldots a_j\right) - a_{q+2}\ldots a_n.$$

Zachowanie się funkcji $\Lambda_q(\lambda)$ ma dla nas kluczowe znaczenie, ponieważ określa zachowanie się różnicy $\|C(b)\|_{(\lambda)} - \|C(a)\|_{(\lambda)}$ (por. lemat 3). Wprost z definicji tej funkcji można dowieść następującego wyniku.

Lemat 4. Niech $\lambda \in [0,1]$ będzie ustalone, lecz dowolne. Wówczas $\Lambda_1(\lambda) \le 0$ oraz zachodzi ciąg nierówności

$$\Lambda_1(\lambda) \le \Lambda_2(\lambda) \le \ldots \le \Lambda_{n-1}(\lambda).$$

Na mocy powyższych rezultatów istotne znaczenie, dla danego ciągu $a = (a_1,a_2,\ldots,a_n)$, ma znalezienie λ_0 oraz λ_1, $0 < \lambda_0 < \lambda_1 < 1$, takich, że $\Lambda_q(\lambda) \le 0$ dla wszystkich $\lambda \in [0,\lambda_0]$ oraz q=1,2,...,n-1, oraz $\Lambda_{n-1}(\lambda) \ge 0$ dla wszystkich $\lambda \in [\lambda_1,1]$.

Na początek podamy wynik tego typu, w którym występują dość silne restrykcje na wartości λ_0 oraz λ_1. Niech $\bar{a} = \max\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ oraz $\underline{a} = \min\{a_1, a_2,\ldots, a_n\}$. Niech λ_0 oraz λ_1 będą zdefiniowane następująco:

$$\lambda_0 = \frac{\bar{a}-1}{\bar{a}^{n-1}-1}$$

oraz

$$\lambda_1 = \frac{\underline{a}-1}{\underline{a}^{n-1}-1}$$

Przy powyższych założeniach zachodzą następujące dwa lematy.

Lemat 5. Niech dany będzie ciąg $a=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ oraz niech λ_0 będzie określone jak wyżej. Wtedy dla q=1,2,...,n-1 oraz dla wszystkich $\lambda \in [0,\lambda_0]$ zachodzi nierówność $\Lambda_q(\lambda) \le 0$.

Lemat 6. Niech dany będzie ciąg $a=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ oraz niech λ_1 będzie określone jak wyżej. Wtedy dla wszystkich $\lambda \in [\lambda_1,1]$ zachodzi nierówność $\Lambda_{n-1}(\lambda) \ge 0$.

Na podstawie lematów 5 oraz 6 można udowodnić następujący wynik.

Twierdzenie 2. Niech ciąg $a=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ będzie minimalny ze względu na normę $\|.\|_{(\lambda)}$, oraz niech λ_0, λ_1 będą zdefiniowane jak wyżej. Wtedy $0 < \lambda_0 \le \lambda_1 < 1$ oraz zachodzą następujące implikacje:

(a) jeżeli $\lambda \in [0,\lambda_0]$, to ciąg a jest nierosnący,

(b) jeżeli $\lambda \in [\lambda_1,1]$, to ciąg a jest V-kształtny.

Co więcej, jeśli ciąg a zawiera istotnie różne elementy, to $\lambda_0 < \lambda_1$.

Istnieje także mocniejsza wersja twierdzenia 2, w której podane są bardziej precyzyjne warunki na monotoniczność oraz V-kształtność optymalnego ciągu. Wymagają one jednakże dodatkowo O(nlogn) operacji w celu określenia odpowiednich wartości λ_0 oraz λ_1.

Niech dany będzie ciąg $a=(a_1,a_2,...,a_n)$. Zdefiniujmy funkcjonał $\lambda(a)$ następująco:

$$\lambda(a) = (\sum_{j=0}^{n-2} a_{j+1} \dots a_{n-2})^{-1}.$$

Niech, ponadto,

$$\lambda(a_{\bullet}) = \min_{\pi \in \Pi_n} \{\lambda(a_\pi)\} \text{ oraz } \lambda(a^*) = \max_{\pi \in \Pi_n} \{\lambda(a_\pi)\}.$$

Wówczas prawdziwe jest następujące

Twierdzenie 3. Niech ciąg $a=(a_1,a_2,...,a_n)$ będzie minimalny ze względu na normę $\|.\|_{(\lambda)}$, oraz niech $\lambda(a_\bullet)$, $\lambda(a^*)$ będą zdefiniowane jak wyżej. Wtedy zachodzą następujące implikacje:
(a) jeżeli $\lambda \in [0, \lambda(a_\bullet)]$, to ciąg a jest nierosnący,
(b) jeżeli $\lambda \in [\lambda(a^*),1]$, to ciąg a jest V-kształtny.
Co więcej, $0 < \lambda_0 \le \lambda(a^*)$ oraz $\lambda(a^*) \le \lambda_1 < 1$, oraz powyższe nierówności są ostre, o ile ciąg a zawiera istotnie różne elementy.

Przedstawione dotąd wyniki były warunkami koniecznymi na optymalność ciągu a, tzn. zakładaliśmy, iż ciąg a jest optymalny, a następnie pokazywaliśmy jego własności. Kolejne twierdzenie podaje także warunek dostateczny.

Twierdzenie 4. Warunkiem dostatecznym na to, by ciąg $a=(a_1,a_2,...,a_n)$ był optymalny względem normy $\|.\|_{(\lambda)}$, $\lambda \in [0, 1]$, jest to, by a był nierosnący oraz by $0 < \lambda \le \lambda(a_\bullet)$.

Na koniec przedstawimy twierdzenie dotyczące dolnych i górnych oszacowań stosunku wartości normy $\|\cdot\|_{(\lambda)}$ do wartości kryteriów C_{max} oraz ΣC_j. Niech $C=[C_0,C_1,...,C_n]^T$.

Twierdzenie 5. Dla dowolnego $\lambda \in [0, 1]$ zachodzą nierówności:

$$0 \le \frac{\|C\|_{(\lambda)} - \|C\|_\infty}{\|C\|_\infty} \le \lambda(n-1),$$

$$0 \le \frac{\|C\|_1 - \|C\|_{(\lambda)}}{\|C\|_1} \le (1-\lambda)\frac{n-1}{n}.$$

Nierówności te pozwalają na otrzymanie wielu użytecznych związków pomiędzy wartościami poszczególnych kryteriów: $\|C\|_1$, $\|C\|_\infty$ oraz $\|C\|_{(\lambda)}$, szczegóły zob. [10], [11].

6. Uwagi końcowe

Zauważmy, że jeśli chcemy rozważać problem jednoczesnej minimalizacji norm l_1 oraz l_∞ (tzn. kryteriów ΣC_j oraz C_{max}), to przedstawiony w pracy przypadek normy $\|.\|_{(\lambda)}$ jest wystarczająco ogólny. Istotnie, ponieważ

$$a\|.\|_1 + b\|.\|_\infty = (a+b)\left(\tfrac{a}{a+b}\|.\|_1 + \tfrac{b}{a+b}\|.\|_\infty\right),$$

to kładąc $\lambda=\frac{a}{a+b}$ możemy zastosować podejście opisane w niniejszej pracy dla dowolnego kryterium postaci $a\|.\|_1 + b\|.\|_\infty$, gdzie a i b są dowolnymi dodatnimi liczbami rzeczywistymi.

Otwarty pozostaje problem hierarchicznej minimalizacji kryteriów $\|.\|_1$ oraz $\|.\|_\infty$, tzn. problem $1|\, p_j=1+\alpha_j t \,|\, \|.\|_1 \rightarrow \|.\|_\infty$. Przypuszczamy, iż jest on co najmniej NP-trudny w zwykłym sensie.

* Adres do korespondencji: Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet im. Adama Mickiewicza, ul. Umultowska 87, 61-614 Poznań, e-mail: stgawiej@amu.edu.pl.

Praca została częściowo sfinansowana z grantu GN-05/2002 Wydziału Matematyki i Informatyki Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza w Poznaniu oraz grantu KBN nr 8T 11A 01618.

LITERATURA

1. Alidaee B.,Womer N.K.: Scheduling with time dependent processing times: Review and extensions. Journal of the Operational Research Society, 50,1999, pp. 711-720.
2. Bachman A., Janiak A., Kovalyov M.Y.: Minimizing the total weighted completion time of deteriorating jobs. Information Processing Letters, 81, 2002, pp. 81-84.
3. Błażewicz J., Ecker K.H., Pesch E., Schmidt G., Węglarz J.: Scheduling Computer and Manufacturing Processes. Springer, Berlin 2001.
4. Browne S., Yechiali U.: Scheduling deteriorating jobs on a single processor. Operations Research, 38, 1990, pp. 495-498.
5. Chen Z-L.: Parallel machine scheduling with time dependent processing times. Discrete Applied Mathematics, 70, 1996, pp. 81-93. (Erratum: Discrete Applied Mathematics, 75, 1996, p. 103).

6. Cheng T.C.E., Ding Q.: Single machine scheduling with step-deteriorating processing times, European Journal of Operational Research, 134, 2001, pp. 623-630.

7. Dileepan P., Sen T.: Bicriterion static scheduling research for a single machine. Omega, 16, 1988, pp. 53-59.

8. Gawiejnowicz S.: A note on scheduling on a single processor with speed dependent on a number of executed jobs. Information Processing Letters, 57, 1996, pp. 297-300.

9. Gawiejnowicz S.: Brief survey of continuous models of scheduling. Foundations of Computing and Decision Sciences, 21, 1996, pp. 81-100.

10. Gawiejnowicz S., Kurc W., Pankowska L.: Bicriterion approach to a single machine time-dependent scheduling problem. In: Chamoni P. et al. (eds.), Operations Research Proceedings 2001. Springer, Berlin, 2002, pp. 199-206.

11. Gawiejnowicz S., Kurc W., Pankowska L.: Approximate solution of linear time-dependent scheduling problem subject to the total completion time minimization. Report no. 113/2001, Faculty of Matehmatics and Computer Science, Adam Mickiewicz University, Poznań, Poland.

12. Gawiejnowicz S., Kurc W., Pankowska L., Suwalski C.: Approximate solution of time-dependent scheduling problem for l_p-norm-based criteria. In: Fleischmann B. et al. (eds), Operations Research OR2000. Springer, Berlin 2001, pp. 372-377.

13. Gawiejnowicz S., Pankowska L.: Scheduling jobs with varying processing times. Information Processing Letters, 54, 1995, pp. 175-178.

14. Graham R.L., Lawler E.L., Lenstra J.K., Rinnooy Kan A.H.G.: Optimization and approximation in deterministic sequencing and scheduling theory: A survey. Annals of Discrete Mathematics, 5, 1979, pp. 287-326.

15. Hoogeveen J.A.: Single machine bicriteria scheduling. CWI, Amsterdam 1992.

16. Kononov A.: Scheduling problems with linear increasing processing times. In: Zimmermann U. et al. (eds), Operations Research 1996. Springer, Berlin, 1997, pp. 208-212.

17. Kononov A., Gawiejnowicz S.: NP-hard cases in scheduling deteriorating jobs on dedicated machines. Journal of the Operational Research Society, 52, 2001, pp. 708-717.

18. Lee C-Y., Vairaktarakis G.: Complexity of single machine hierarchical scheduling: A survey. In: Pardalos P.M. (ed.), Complexity in Numerical Optimization. World Scientific, Singapore 1993, pp. 269-298.

19. Melnikov O.I., Shafransky Y.M.: Parametric problem of scheduling theory. Kibernetika, 6, 1979, pp. 53-57 (in Russian).

20. Mosheiov G.: Multi-machine scheduling with linear deterioration. Infor, 36, 1998, pp. 205-214.

21. Mosheiov G.: V-shaped policies for scheduling deteriorating jobs. Operations Research, 39, 1991, pp. 979-991.

22. Nagar A., Haddock J., Heragu S.: Multiple and bicriteria scheduling: A literature survey. European Journal of Operational Research, 81, 1995, pp. 88-104.

23. Ng C.T., Cheng T.C.E., Bachman A.: Three scheduling problems with deteriorating jobs to minimize the total completion time. Information Processing Letters, 81, 2002, pp. 327-333.
24. Smith W.E.: Various optimizers for single-stage production. Naval Research Logistics Quarterly, 3, 1956, pp. 59-66.
25. Tanaev V.S., Gordon V.S., Shafransky Y.M.: Scheduling Theory. Single-stage Systems. Kluwer, Dordrecht, 1994.
26. Wajs W.: Wielomianowy algorytm dla dynamicznego problemu sekwencyjnego. Archiwum Automatyki i Telemechaniki, 31, 1986, ss. 209-213.

Recenzent: Dr hab. inż. Czesław Smutnicki

Abstract

In the paper a single machine time-dependent scheduling problem with simultaneous minimization of two criteria is considered. Processing time p_j of job j is a function of the starting time t of the job, $p_j=1+\alpha_j t$, where $\alpha_j > 0$ for $j=0,1,2,...,n$. The jobs are nonpreemptable, independent, there are neither ready times nor deadlines. The criterion of a schedule optimality $\|\cdot\|_{(\lambda)}$ is a weighted sum of C_{max} and ΣC_j criteria, $\|C\|_{(\lambda)} = \lambda\, \Sigma C_j + (1-\lambda)C_{max}$, where $\lambda \in [0,1]$ is an arbitrary, fixed real number and C is a vector of completion times of jobs.

Basing on some preliminary results concerning values of differences between two vectors under norms l_1, l_∞ and $\|\cdot\|_{(\lambda)}$ there is presented the following main result of the paper.

Let λ_0 and λ_1 be defined as follows: $\lambda_0 = \dfrac{\bar{a}-1}{\bar{a}^{n-1}-1}$ and $\lambda_1 = \dfrac{\underline{a}-1}{\underline{a}^{n-1}-1}$, where $\bar{a}$ and $\underline{a}$ are, respectively, the maximal and the minimal element in the sequence $a=(a_1,a_2,...,a_n)$.

Theorem 2. Let the sequence $a=(a_1,a_2,...,a_n)$ be optimal with respect to the norm $\|.\|_{(\lambda)}$ and let λ_0, λ_1 be defined as above. Then $0 < \lambda_0 \le \lambda_1 < 1$ and there hold the following implications:

(a) if $\lambda \in [0,\lambda_0]$, then the sequence a is nonincreasing,

(b) if $\lambda \in [\lambda_1,1]$, then the sequence a has a V-shape.

Moreover, if the sequence a contains distinct elements, then $\lambda_0 < \lambda_1$.

There is also presented stronger version of Theorem 2 in which more precise conditions on monotonicity and V-shapeness of an optimal sequence are given.. These conditions need, however, O(nlogn) addtional operations in order to estimate appropriate values of λ_0 and λ_1. Let $\lambda(a) = (\sum_{j=0}^{n-2} a_{j+1} \ldots a_{n-2})^{-1}$, $\lambda(a_*) = \min_{\pi \in \Pi_n} \{\lambda(a_\pi)\}$ and $\lambda(a^*) = \max_{\pi \in \Pi_n} \{\lambda(a_\pi)\}$ for a given sequence $a=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$.

Theorem 3. Let the sequence $a=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ be optimal with respect to the norm $\|.\|_{(\lambda)}$ and let $\lambda(a_*)$, $\lambda(a^*)$ be defined as above. Then there hold the following implications:

(a) if $\lambda \in [0, \lambda(a_*)]$, then the sequence a is nonincreasing,

(b) if $\lambda \in [\lambda(a^*),1]$, then the sequence a has a V-shape.

Moreover, $0 < \lambda_0 \leq \lambda(a^*)$ and $\lambda(a^*) \leq \lambda_1 < 1$, and the above inequalities are sharp, whenever the sequence a contains distinct elements only.

In the paper there are also presented two other results: a sufficient condition for optimality and a lower and an upper bound on the ratio between the value of the norm $\|\cdot\|_{(\lambda)}$ and values of C_{max} and ΣC_j criteria.