ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 2002
Seria: AUTOMATYKA z. 134 Nr kol. 1554

Marek MAGIERA
Akademia Górniczo-Hutnicza

MODELE MATEMATYCZNE I HEURYSTYKI RELAKSACYJNE SZEREGOWANIA OPERACJI DLA ELASTYCZNYCH LINII MONTAŻOWYCH Z MASZYNAMI RÓWNOLEGŁYMI *

Streszczenie. W artykule przedstawiono nowe modele matematyczne szeregowania operacji dla elastycznych linii montażowych z maszynami równoległymi. Uwzględniony został przypadek, w którym między stadiami znajdują się bufory międzystadialne, oraz sytuacja, gdy nie ma tych buforów i ich rolę pełnią maszyny. W celu skrócenia czasu rozwiązywania zadań szeregowania operacji opracowano heurystyki relaksacyjne. Artykuł zawiera wyniki przeprowadzonych eksperymentów obliczeniowych.

MATHEMATICAL MODELS AND RELAXATION HEURISTICS FOR OPERATION SCHEDULING IN FLEXIBLE ASSEMBLY LINE WITH PARALLEL MACHINES

Summary. The paper describes new mixed integer programming models for operation scheduling for flexible assembly lines with parallel machines. The assembly line with intermediate buffers and the configuration without intermediate buffers are considered. Relaxation heuristics are proposed to reduce CPU time required for mixed integer programming. Results of computational experiment with the proposed MIP models and heuristics are included.

1. Wprowadzenie

Artykuł poświęcony jest problemowi wyznaczania harmonogramu montażu dla elastycznej linii montażowej (ELM). Opracowane modele matematyczne i algorytmy heurystyczne dotyczą procesu wielostadialnego typu przepływowego. Jest to taki proces produkcyjny, w którym każdy produkt wymaga wykonania operacji na kolejnych

* Praca finansowana częściowo z badań statutowych AGH

specjalistycznych maszynach. Każde stadium to zbiór maszyn pracujących równolegle. Produkt może pomijać niektóre stadia. Przechodząc przez dane stadium produkt obciąża tylko jedną maszynę. W zbudowanych modelach i algorytmach uwzględnione zostały dwa przypadki: pierwszy, w którym między stadiami znajdują się bufory międzystadialne, oraz drugi - konfiguracja ELM bez buforów międzystadialnych (rolę buforów pełnią maszyny).

Dla zadania szeregowania operacji w ELM opracowane zostały modele matematyczne (rozdz. 3) i algorytmy heurystyczne (rozdz. 4) (umożliwiające uzyskanie rozwiązań w stosunkowo krótkim czasie), których oznaczenia zestawiono w tablicy 1.

Tablica 1

Oznaczenia modeli matematycznych i algorytmów heurystycznych

Model matematyczny	Algorytm heurystyczny	Opis modelu / algorytmu
M_I	H_I	Szeregowanie zadań w systemie przepływowym z buforami międzystadialnymi
M_II	H_II	Szeregowanie zadań w systemie przepływowym bez buforów

Przedstawione w pracy modele i algorytmy zostały zbudowane dla dwupoziomowej metody sterowania przepływem przez ELM z maszynami równoległymi. W metodzie tej szeregowanie operacji montażowych (poziom II) jest poprzedzone rozwiązaniem zadania równoważenia obciążeń maszyn (poziom I). Ogólny opis tej metody i szczegółowe przedstawienie poziomu I zawarte są w pracy [3].

2. Parametry i zmienne

W tabl. 2 zestawiono indeksy i parametry wejściowe zadania szeregowania operacji. Analizując tę tablicę można zauważyć, że do danych wejściowych należą wyniki rozwiązania zadania równoważenia obciążeń maszyn, które poprzedza proces szeregowania operacji. Dla każdego produktu wyznaczone są więc maszyny, przez które on przechodzi, oraz kolejność, w jakiej to ma miejsce. Ponadto znane są łączne czasy wykonywania operacji montażowych produktu na tych maszynach, stanowiące sumę czasów wykonywania poszczególnych operacji. Dane są parametry opisujące park maszynowy. Wykaz zmiennych umieszczono w tabl. 3.

W opracowanej metodzie długość uszeregowania jest podzielona na jednostkowe przedziały zwane *przedziałami czasowymi*, indeksowanymi l (tabl. 2). Przed rozwiązaniem

zadania szeregowania musi więc zostać wyznaczona liczba przedziałów czasowych h. Jest ona oczywiście większa od globalnego oszacowania od dołu długości uszeregowania. Liczba przedziałów czasowych h jest wyznaczana wg następującej procedury:

1. Z zależności (1) wyznacz globalne oszacowanie od dołu długości uszeregowania [5]

$$LBC_{\max} = \max\left\{ LB_0,\ \max_{v \in V} LB_v \right\}, \tag{1}$$

gdzie: LB_0 - maksymalny całkowity czas wykonywania produktu, LB_v - oszacowanie długości uszeregowania względem stadium $v \in V = \{1,\ldots,\vartheta\}$. Procedura wyznaczania $LBC_{\max}$ została zaczerpnięta z pracy [5], gdzie znajduje się jej szczegółowy opis (str. 145).

2. Liczba przedziałów czasowych h jest wyznaczana z (2) i zaokrąglana do liczby całkowitej.

$$h = 1{,}3 \cdot LBC_{\max} \text{ dla M_I oraz H_I} \quad \vee \quad h = 1{,}4 \cdot LBC_{\max} \text{ dla M_II oraz H_II} \tag{2}$$

Tablica 2

Indeksy i parametry wejściowe

Indeksy:

i - maszyna, $i \in I = \{1,\ldots,m\}$, l - przedział czasowy, $l \in L = \{1,\ldots,h\}$,

k - produkt, $k \in K = \{1,\ldots,\upsilon\}$, v - stadium montażu, $v \in V = \{1,\ldots,\vartheta\}$.

Parametry wejściowe:

d_v - liczba buforów przed stadium v.

g_{ik} - czas transportu produktu k z maszyny, na której uprzednio zakończył się montaż na maszynę i (uwzględnia on orientację przestrzenną produktu i zamocowanie go na maszynie i).

t_{ik} - czas wykonywania operacji na maszynie i podczas montażu produktu k.

D - zbiór uporządkowanych dwójek (i,v) - takich, że maszyna i należy do stadium v.

P - zbiór uporządkowanych trójek (k,τ,i) - takich, że montaż produktu $k \in K$ na maszynie $i \in I$ jest bezpośrednio poprzedzony wykonaniem operacji na maszynie $\tau \in I$ (jest to rozwiązanie zadania równoważenia obciążeń maszyn).

Tablica 3

Zmienne

$q_{ikl} = 1$,	jeżeli w przedziale czasowym l operacja montażowa produktu k jest wykonywana na maszynie i, inaczej $q_{ikl} = 0$;
$y_{vkl} = 1$,	jeżeli w przedziale czasowym l produkt k znajduje się w buforze międzystadialnym przed stadium v, inaczej $y_{vkl} = 0$ (w modelu M_I);
$x_{ikl} = 1$,	jeżeli w przedziale czasowym l maszyna i pełni rolę bufora dla produktu k, inaczej $x_{ikl} = 0$ (w modelu M_II);
e_{ik}	- moment rozpoczęcia wykonywania operacji produktu k na maszynie i;
c_{ik}	- moment zakończenia wykonywania operacji produktu k na maszynie i $e_{ik} \in N$, $c_{ik} \in N$ (liczby naturalne).

W przypadku gdy stosując testujący program komputerowy [2, 7] nie da się rozwiązać zadania, gdyż wartość h jest zbyt mała, należy stopniowo zwiększać wartość parametru h. Zwiększenie liczby przedziałów czasowych znacząco wpływa na wydłużenie czasu obliczeń.

Parametr α, stosowany w zapisie niektórych ograniczeń, jest dowolną liczbą całkowitą, spełniającą warunek: $\alpha > h$.

3. Modele matematyczne

Zadania szeregowania operacji sformułowane zostały w postaci zadań programowania całkowitoliczbowego. Każdy z opracowanych modeli (tabl.1) jest liniowy. Zastosowanie w modelach tych funkcji (3) umożliwia aproksymację minimalizacji długości uszeregowania. Funkcja ta zapewnia obciążenie poszczególnych maszyn w przedziałach czasowych o jak najmniejszych indeksach, dzięki czemu uzyskiwane są stosunkowo krótkie czasy zakończenia montażu poszczególnych produktów. Dla 40 przykładów porównano długości uszeregowań zadań opisanych w modelach M_I i M_II, w których minimalizowano wyrażenie (3) z modelami różniącymi się od nich tylko minimalizowaną funkcją celu, którą była długość uszeregowania $C_{\max}$ ($l \cdot q_{ikl} \le C_{\max}$ dla $i \in I, k \in K, l \in L$). We wszystkich porównywanych przykładach uzyskano takie same długości uszeregowań. Zastosowanie funkcji (3) umożliwiło jednak uzyskanie rozwiązań testowanych zadań (rozdz.5) w wielokrotnie krótszym czasie (od 4 do około 40 razy krótszym) niż w przypadku minimalizacji długości uszeregowania.

Oto te modele:

Model M_I (z buforami międzystadialnymi) i **model M_II** (bez buforów):

Zminimalizować: (3)

$$\sum_{k\in K}\sum_{i\in I}\sum_{l\in L}(l\cdot q_{ikl});$$

przy ograniczeniach: $\sum_{l\in L} q_{ikl} = t_{ik}$; $i\in I,\ k\in K$, gdzie $t_{ik}>0$ (4)

$$l\cdot q_{ikl} - f\cdot q_{ikf} \le t_{ik} - 1 + (1-q_{ikf})\cdot\alpha \quad i\in I,\ k\in K,\ \text{gdzie } t_{ik}>1,\ l,f\in L,\ l>f \tag{5}$$

;

$$\sum_{k\in K} q_{ikl} \le 1; \quad i\in I,\ l\in L \tag{6}$$

$$\sum_{l\in L}\frac{l\cdot q_{ikl}}{t_{ik}} - \frac{t_{ik}}{2} + \frac{1}{2} = e_{ik}; \quad i\in I,\ k\in K,\ \text{gdzie } t_{ik}>1 \tag{7}$$

$$\sum_{l\in L}\frac{l\cdot q_{ikl}}{t_{ik}} + \frac{t_{ik}}{2} - \frac{1}{2} = c_{ik}; \quad i\in I,\ k\in K,\ \text{gdzie } t_{ik}>1 \tag{8}$$

$$e_{ik} - c_{\tau k} - 1 \ge g_{ik}; \quad (k,\tau,i)\in P \tag{9}$$

$$q_{ikl}\in\{0,1\}; \quad i\in I,\ k\in K,\ l\in L \tag{10}$$

Ponadto muszą być spełnione następujące zależności:

• tylko w modelu **M_I** (z buforami międzystadialnymi):

$$e_{ik} - c_{\tau k} - 1 - g_{ik} = \sum_{l\in L} y_{vkl}; \quad (i,v)\in D,\ (\tau,v)\in D,\ \text{gdzie } v\ne 1,\ (k,\tau,i)\in P \tag{11}$$

$$l\cdot y_{vkl} \ge c_{rk} + 1 + g_{ik} - \alpha\cdot(1-y_{vkl}); \quad (i,v)\in D,\ (\tau,\tilde{v})\in D,\ \text{gdzie } v\ne 1\wedge\tilde{v}<v,\ (k,\tau,i)\in P \tag{12}$$

$$e_{ik} - l\cdot y_{vkl} \ge 1; \quad l\in L,\ (i,v)\in D,\ k\in K,\ \text{gdzie } t_{ik}>0,\ v\ne 1 \tag{13}$$

$$\sum_{k\in K:\left\{\begin{matrix} t_{ik}>0, \\ (i,v)\in D\end{matrix}\right\}} y_{vkl} \le d_v; \quad l\in L,\ v\in V\setminus\{1\} \tag{14}$$

$$y_{vkl}\in\{0,1\} \quad v\in V,\ k\in K,\ l\in L \tag{15}$$

• tylko w modelu **M_II** (bez buforów międzystadialnych):

$$e_{ik} - c_{\tau k} - 1 - g_{ik} = \sum_{l\in L} x_{ikl}; \quad (k,\tau,i)\in P \tag{16}$$

$$l\cdot x_{ikl} \le e_{rk} - 1 - g_{ik}; \quad (k,\tau,i)\in P,\ l\in L \tag{17}$$

$$l \cdot x_{ikl} - c_{ik} + \alpha \cdot (1 - x_{ikl}) \geq 1; \quad i \in I, \text{ gdzie } i < m, \ k \in K, \text{ gdzie } t_{ik} > 0, \ l \in L \tag{18}$$

$$q_{ikl} + x_{\tilde{i}kl} \leq 1; \quad i \in I, \text{ gdzie } i < m, \ k \in K, \text{ gdzie } t_{ik} > 0, \ \tilde{k} \in K, \text{ gdzie } t_{\tilde{i}\tilde{k}} > 0, \ l \in L \tag{19}$$

$$x_{ikl} \in \{0,1\}; \quad i \in I, \ k \in K, \ l \in L \tag{20}$$

Operacje montażowe na maszynie i wykonane są w ciągu danego czasu montażu dzięki ograniczeniu (4). Warunek (5) zapewnia niepodzielność operacji montażowych, tzn. gwarantuje on wykonanie operacji w kolejnych przedziałach czasowych. W przedziale czasowym l maszyna i wykonuje co najwyżej jedno zadanie dzięki ograniczeniu (6). Zależności (7) i (8) służą do wyznaczenia momentu rozpoczęcia oraz zakończenia wykonywania operacji produktu k na maszynie i. Warunek (9) umożliwia zachowanie kolejności montażu w jednokierunkowym systemie przepływowym oraz uwzględnienia czasy transportu pomiędzy stadiami. Ograniczenie (10) zapewnia binarność zmiennej decyzyjnej. Kolejne ograniczenia dotyczą tylko modelu M_I. Zależność (11) ogranicza czas pobytu w buforze, który zależy od czasu zakończenia i rozpoczęcia wykonywania kolejnych operacji oraz uwzględnia czas transportu. Ograniczenia (12), (13) zapewniają, aby pobyt w buforze miał miejsce bezpośrednio przed wykonaniem operacji. W ograniczeniu (14) sprawdzane jest, czy liczba produktów, które mają być w buforach, nie przekracza liczby buforów przed danym stadium. Ograniczenie (15) zapewnia binarność zmiennej decyzyjnej. Ostatnia grupa ograniczeń dotyczy tylko modelu M_II. Zależność (16) ogranicza czas, w którym maszyna pełni rolę bufora (produkt blokuje maszynę) - analogicznie do (11). Ograniczenia (17), (18) zapewniają, że maszyna będzie pełniła rolę bufora bezpośrednio po wykonaniu operacji. Warunek (19) zapewnia, że w czasie pełnienia roli bufora maszyna nie będzie wykonywała operacji, natomiast (20) - binarność zmiennej decyzyjnej.

Moment zakończenia wykonywania wszystkich operacji wyznaczany jest z zależności:

$$C = \max_{i \in I, k \in K} c_{ik} \tag{21}$$

4. Algorytmy heurystyczne

Rozwiązywanie zadań opisanych w modelach M_I, M_II jest czasochłonne. W celu uzyskiwania stosunkowo krótkich czasów rozwiązań tych zadań opracowane zostały algorytmy heurystyczne H_I (dla ELM z buforami międzystadialnymi) i H_II (dla ELM bez

buforów międzystadialnych). Heurystyki te służą do rozwiązywania zadań sformułowanych w modelach M_I lub M_II, w których usunięte zostały warunki całkowitoliczbowości zmiennych decyzyjnych). Otrzymane w wyniku relaksacji zadania programowania liniowego oznaczono: LP(M_I) - dla H_1, LP(M_II) - dla H_2.

Heurystyki: H_I (ELM z buforami), **H_II** (ELM bez buforów):

Wejście: liniowa relaksacja LP(M_I) - dla H_I, LP(M_II) - dla H_II; ogólnie LP(M).

Wyjście: rozwiązania heurystyczne: e_{ik}^{H}, c_{ik}^{H} (czasy: rozpoczęcia, zakończenia operacji).

Krok 1. Niech $\tilde{x}$ oznacza wartość zmiennej x (tabl.3), wyznaczonej przy użyciu heurystyki (ogólne przyjęcie notacji). Przyjmij $z:=1$; z - indeks rozwiązania. Rozwiąż zadanie liniowej relaksacji LP(M). Uzyskiwane zostają w ten sposób rozwiązania: $\tilde{e}_{ik}^{z}$, $\tilde{c}_{ik}^{z}$. Idź do kroku 2.

Krok 2. Dokonaj zaokrągleń wyznaczonych w kroku 1 czasów rozpoczęcia i zakończenia wykonywanych operacji montażowych do najbliższych liczb całkowitych (22) i idź do kroku 3.

$$\tilde{e}_{ik}^{z} = \mathrm{round}\left(\tilde{e}_{ik}^{z-1}\right), \quad \tilde{c}_{ik}^{z} = \tilde{e}_{ik}^{z} + t_{ik} - 1; \quad i \in I, \ k \in K, \ z = 2 \tag{22}$$

Krok 3. Utworzenie wstępnego harmonogramu. W przedziale l wykonywana jest operacja produktu k na maszynie i, jeżeli wartość $\tilde{q}_{ikl}^{z} = 1$, wyznaczana wg (23). Idź do kroku 4.

$$\tilde{q}_{ikl}^{z} = \begin{cases} 1, \text{ gdy } \tilde{e}_{ik}^{z} \geq l \leq \tilde{c}_{ik}^{z} \\ 0, \text{ inaczej} \end{cases}; \quad i \in I, \ k \in K, \ z = 2 \tag{23}$$

Krok 4. Weryfikacja i modyfikacja harmonogramu. W kroku tym po każdej modyfikacji harmonogramu wyznacz czasy: $\tilde{e}_{ik}^{z}$ (analogicznie do (7)) i $\tilde{c}_{ik}^{z}$ - wg (22) oraz długość uszeregowania $\tilde{C}^{z}$ (analogicznie do (21)).

a) Przyjmij $i:=0$. Idź do kroku 4b.

b) Przyjmij $i:=i+1$ oraz $l:=0$. Idź do kroku 4c.

c) Przyjmij $l:=l+1$. Jeżeli w przedziale czasowym l zależność (24) nie jest spełniona, to

$$\sum_{k \in K} \tilde{q}_{ikl}^{z} > 1 \tag{24}$$

idź do kroku 4d, w przeciwnym przypadku przyjmij $\tilde{q}_{i\hat{k}l}^{z} = 1$ tylko dla produktu $\hat{k}$, wybranego wg porządku leksykograficznego:

1) produkt, który w poprzedniej iteracji nie spełniał warunku (24) i nie został oznaczony $\hat{k}$. Jeżeli takich produktów jest kilka - wybierz jeden z nich wg porządku leksykograficznego, przedstawionego w punktach 2, 3, 4;
2) produkt o najmniejszej wartości $\tilde{e}_{ik}^{z}$ (spośród produktów spełniających (24));
3) produkt o największej wartości t_{ik};
4) produkt o najmniejszym indeksie k.

Jeżeli wybrany produkt $\hat{k}$ spełnia zależność $\tilde{e}_{i\hat{k}}^{z} - \tilde{c}_{i\hat{k}}^{z} - 1 < g_{i\hat{k}}$ dla $\left(\hat{k}, \tau, i\right) \in P$, to jeżeli jest to możliwe, wyznacz inny produkt $\hat{k}$ wg przedstawionego powyżej porządku.

Przyjmij $z:=z+1$. Wyznacz β - liczbę przedziałów, w których montowany jest

produkt $\hat{k}$ na maszynie i, począwszy od analizowanego przedziału l, aż do zakończenia tej operacji: $\beta = \tilde{c}_{i\hat{k}}^{z-1} - l + 1$. Niech $\tilde{K}$ oznacza zbiór produktów, dla których zachodzi: $q_{ikr}^{z-1} = 1$ dla $k \in K \setminus \{\hat{k}\}$, $r \in \langle l, l+\beta-1 \rangle$. Zmodyfikuj harmonogram wg (25), idź do kroku 4d.

$$\tilde{q}_{ukr}^{z} = \begin{cases} \tilde{q}_{ukr}^{z-1} \text{ dla } \left(\left(u \in I \setminus \{i\},\ k \in K\right) \vee \left(u = i,\ k \in K \setminus \tilde{K}\right)\right),\ r \in L \\ \tilde{q}_{uk\rho}^{z-1} \text{ dla } u = i,\ k \in \tilde{K},\ r \in L, \text{ gdzie: } r \geq l+\beta,\ \rho = r - \beta \end{cases} \tag{25}$$

d) Jeżeli $\tilde{e}_{ik}^{z} = l$ dla produktu k montowanego w przedziale l i jeżeli operacja na maszynie i nie jest pierwszą operacją montażową produktu, to sprawdź, czy zachodzi warunek: $\tilde{e}_{ik}^{z} - \tilde{c}_{\tau k}^{z} - 1 \geq g_{ik}$ dla $(k, \tau, i) \in P$. W przypadku gdy warunek ten jest spełniony - idź do kroku 4e, jeśli nie - przyjmij $z := z + 1$ i wyznacz β - minimalną liczbę przedziałów czasowych, jaką należy dodać do parametru $\tilde{e}_{ik}^{z}$, aby rozpatrywany warunek był spełniony. Oznacz ten produkt $\bar{k}$, zmodyfikuj harmonogram wg (26) i idź do kroku 4e.

$$\tilde{q}_{ukr}^{z} = \begin{cases} \tilde{q}_{ukr}^{z-1} \text{ dla } \left(\left(u \in I \setminus \{i\},\ k \in K\right) \vee \left(u = i,\ k \in K \setminus K\{\bar{k}\}\right)\right),\ r \in L \\ \tilde{q}_{uk\rho}^{z-1} \text{ dla } u = i,\ k = \bar{k},\ r \in L, \text{ gdzie: } r \geq l+\beta,\ \rho = r - \beta \end{cases} \tag{26}$$

e) Jeżeli $\tilde{e}_{ik}^{z} = l$ dla produktu k montowanego w przedziale l i jeżeli operacja na maszynie i nie jest pierwszą operacją montażową produktu, to sprawdź, czy zachodzi warunek: $\tilde{e}_{ik}^{z} - \tilde{c}_{\tau k}^{z} - 1 = g_{ik}$ dla $(k, \tau, i) \in P$. Jeżeli warunek ten jest spełniony, idź do kroku 4f, w przeciwnym przypadku (produkt musi być w buforze lub maszyna τ musi pełnić rolę bufora) przyjmij $z := z + 1$.

Dla algorytmu H_I wyznacz przedziały czasowe, w których produkt k powinien się znajdować w buforze przed stadium v. Liczba tych przedziałów dla produktu k wynosi $\chi = \tilde{e}_{ik}^{z} - \tilde{c}_{\tau k}^{z} - g_{ik}$. Sprawdź, czy przed stadium v, do którego należy maszyna i, można obciążyć bufor we wszystkich χ przedziałach, bezpośrednio po zakończeniu montażu produktu k na maszynie τ. Jeżeli tego bufora nie można obciążyć we wszystkich χ przedziałach, wyznacz liczbę kolejnych przedziałów η, w których maszyna τ musi pełnić rolę bufora.

Dla H_I / H_II wyznacz przedziały oraz ich liczbę μ $(\mu \leq \eta)$, w których maszyna ta nie może pełnić roli bufora, gdyż jest już obciążona. Analizie muszą być poddane wartości zmiennych w przedziałach r: $\tilde{y}_{vkr}$ (dla H_I), $\tilde{x}_{ikr}$ (dla H_II). W przypadku gdy $\mu > 0$ (maszyna musi pełnić rolę bufora), zmodyfikuj harmonogram wg (27).

$$\tilde{q}_{ukr}^{z} = \begin{cases} \tilde{q}_{ukr}^{z-1} \text{ dla } \left(\left(u \in I \setminus \{\tau\},\ r \in L\right) \vee \left(u = \tau,\ r \leq \tilde{c}_{\tau k}^{z-1}\right)\right) \wedge k \in K \\ \tilde{q}_{uk\rho}^{z-1} \text{ dla } u = \tau,\ k \in K,\ r \in L, \text{ gdzie: } r \geq l+\mu,\ \rho = r - \mu \end{cases} \tag{27}$$

Zapamiętaj przedziały czasowe r, w których bufor lub maszyna zostały obciążone ($\tilde{y}_{vkr}$, $\tilde{x}_{ikr}$). Przyjmij $l := \tilde{c}_{\tau k}^{z}$, $i := \tau$ i wróć do kroku 4c.

f) Warunek stopu. Sprawdź, czy $l < \tilde{C}^{z}$. Jeśli tak - idź do kroku 4c, jeśli nie – sprawdź, czy $i < m$. Jeśli tak - idź do kroku 4b, jeśli nie - idź do kroku 5.

Krok 5. Jako ostateczne rozwiązania przyjmij: $e_{ik}^{H} = \tilde{e}_{ik}^{z}$, $c_{ik}^{H} = \tilde{c}_{ik}^{z}$ dla $i \in I$, $k \in K$.

5. Eksperymenty obliczeniowe

W celu oceny przedstawionych algorytmów heurystycznych przeprowadzono eksperymenty obliczeniowe. Objęły one 6 grup zadań. Parametry wejściowe dla tych grup zadań oraz uzyskane wyniki zestawiono w tablicy 4. Dla każdej z grup rozwiązano 50 przykładów. Obliczenia przeprowadzono na komputerze Pentium 200. Do obliczeń zastosowano m.in. pakiet optymalizacji dyskretnej [2] (solver *CPLEX*). Odległość od optimum otrzymywanych harmonogramów oceniano za pomocą wartości błędów $\zeta = (C - LBC_{\max}) / LBC$, gdzie $LBC_{\max}$ było obliczane wg zależności (1). Średnie wartości tego wskaźnika zestawiono w tablicy 4. Maksymalny błąd względny nie przekroczył 19,2%, a średni błąd nie był większy niż 17,4%. Wskaźnik w_1 (tabl. 4) służy do porównania czasów rozwiązań CPU^H (dla heurystyk) i CPU^* (dla modeli M_I, M_II zapisanych w języku programowania matematycznego). Wskaźnik w_2 umożliwia porównanie czasów CPU^* i CPU^0 - czasu rozwiązywania zadania programowania całkowitoliczbowego, zawierającego zmodyfikowany model M_I lub M_II, w którym zamiast funkcji (3) minimalizowania jest wartość wyrażenia (28). Wskaźnik ten wyznaczono dla 2 grup zadań (czasochłonność obliczeń, np. $\overline{CPU}^0 = 112$ min dla grupy 2 (bez buforów)).

$$l \cdot q_{ikl} \le C_{\max} \text{ dla } i \in I,\ k \in K,\ l \in L \tag{28}$$

Dla każdego zadania testowego, dla którego wyznaczane były wartości CPU^*, CPU^0, otrzymane zostały takie same długości uszeregowania.

Tablica 4

Dane wejściowe i wyniki dla przykładów testowych

Grupa	Parametry grupy					ELM z buforami			ELM bez buforów		
	ϑ	b	m	υ	h	$\overline{\xi}$ [%]	$\overline{w}_1$ [%]	$\overline{w}_2$ [%]	$\overline{\xi}$ [%]	$\overline{w}_1$ [%]	$\overline{w}_2$ [%]
1	2	2	4	5	10	17,4	2,05	21,12	16,7	2,01	19,25
2	2	3	4	10	20	17,1	1,53	10,33	16,9	1,40	10,24
3	2	3	6	10	30	15,2	0,72	-	15,1	0,71	-
4	3	4	6	10	40	13,9	0,59	-	14,0	0,53	-
5	3	4	6	12	50	9,3	0,31	-	7,8	0,32	-
6	4	6	8	12	60	10,1	0,22	-	7,2	0,20	-

Liczby: ϑ - stadiów, b - buforów (tylko w ELM z buforami), m - maszyn, υ - typów produktów, h - przedziałów czasowych; $\overline{\xi}$ - średnia wartość błędu względnego:

$\zeta = (C - LBC_{max}) / LBC$, gdzie: C - długość uszeregowania, wyznaczona wg (1), LBC_{max} - oszacowanie od dołu długości uszeregowania wg (21); $\overline{w}_1, \overline{w}_2$ - wartości średnie wskaźników: $w_1 = CPU^H / CPU^*$, $w_2 = CPU^* / CPU^0$, służących do porównania czasów obliczeń: CPU^H - przy wykorzystaniu heurystyki H_I lub H_II, CPU^* - przy wykorzystaniu modelu M_I lub M_II, zapisanego w języku programowania matematycznego (programowanie całkowitoliczbowe), $\boxed{CPU^0}$ - dla zmodyfikowanego modelu M_I lub M_II, w którym minimalizowana jest wartość wyrażenia (28).

6. Uwagi końcowe

Przedstawione modele matematyczne i algorytmy heurystyczne opracowane zostały wprawdzie dla dwupoziomowej metody sterowania przepływem przez elastyczną linię montażową (pierwszy poziom opisany w [3]), mogą być jednak również stosowane w budowie harmonogramów dla innych rodzajów systemów produkcyjnych. Zastosowanie opracowanych heurystyk jest wskazane przede wszystkim dla zadań o stosunkowo dużych rozmiarach (dla których bardzo duże są czasy rozwiązywania zadań programowania całkowitoliczbowego), do bieżącego szeregowania operacji montażowych.

Opracowane modele można oczywiście rozbudować, zmodyfikować. Planowane jest porównanie uzyskanych rozwiązań z dwupoziomową metodą (dla której zmodyfikowane zostaną zaprezentowane algorytmy), w której na pierwszym poziomie równoważone są obciążenia nie poszczególnych maszyn, ale stadiów montażu. W metodzie tej na drugim poziomie przydzielane są operacje montażowe do maszyn i wyznaczany jest harmonogram montażu.

LITERATURA

1. Delchambre A.: Computer-Aided Assembly Planning. Champan and Hall, London, New York, Tokyo 1992.
2. Fourer R., Gay D., Kernighan B.: AMPL - A Modelling Language for Mathematical Programming. Boyd & Fraser Publishing Company 1993.
3. Magiera M.: Dwupoziomowa metoda sterowania przepływem produktów przez elastyczną linię montażową z maszynami równoległymi, Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Automatyka, 2002.

4. Santos D.L., Hunsucker J.L., Deal D.E.: Global lower bounds for flow shops with multiple processors. European Journal of Operational Research, 1995, vol.80, s. 112-120.
5. Sawik T.: Planowanie i sterowanie produkcji w elastycznych systemach montażowych. WNT, Warszawa 1996.
6. Sawik T.: Badania operacyjne dla inżynierów zarządzania. Wydawnictwa AGH, Kraków 1998.
7. Schrage L., Cunningham K.: LINGO, Optimization Modelling Language. LINDO Systems Inc., Chicago 1991.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Zbigniew Banaszak

Abstract

The paper presents new mathematical models and heuristic algorithms for operation scheduling for flexible assembly lines with parallel machines. Each assembly stage consists of one or parallel machines. The flow is unidirectional. The assembly line with intermediate buffers and configuration without intermediate buffers are considered. The assembly sequences and assignment of assembly operations to assembly stations with limited working space are a starting point of the described method. The schedule is divided into time intervals in the method. The approximation to time criterion is used in the mixed integer programming models and algorithms. A linear relaxation - based heuristics is created to reduce CPU time required for mixed integer programming. Each heuristic starts from the optimal solution of a linear relaxation of the mixed integer program. Results of computational experiment with the proposed MIP models and heuristic algorithms are included.