

Andrzej MISIEWICZ

Instytut Maszyn i Urządzeń Energetycznych

PORÓWNANIE RÓŻNYCH METOD BADAŃ PRZEPLYWÓW TRANSONICZNYCH

Streszczenie. W pracy dokonano przeglądu metod analizy przepływów transonicznych w kanałach międzyłopatkowych maszyn przepływowych. Podano schematy różnicowe metod iteracyjnych. Przedstawiono wyniki badań teoretycznych i eksperymentalnych.

1. Wstęp

W ciągu ostatnich lat znacznie wzrosło zainteresowanie zarówno badaniami teoretycznymi jak i eksperymentalnymi przepływów transonicznych w kanałach międzyłopatkowych maszyn przepływowych. Zostało opracowanych szereg metod teoretycznych [2], [5], [6], które w oparciu o elektroniczną technikę obliczeniową dają dobre rezultaty. Napotyka się tu jednak na problem długiego czasu obliczeń. Metody te w większości przypadków opierają się o rozwiązanie równań opisujących przepływ nieustalony metodą iteracji po czasie. Ponieważ przepływ transoniczny charakteryzuje się złożonym charakterem zjawisk falowych, które mogą występować z różnym natężeniem. Stwarza to problem z przyjęciem warunków początkowych i kroku czasowego. W niniejszej pracy dokonano porównania wyników badań teoretycznych i doświadczalnych pod kątem możliwości wykorzystania tych ostatnich jako przybliżenia początkowego rozwiązania numerycznego. Porównania dokonano na bazie profilu VKI-LS5g [10].

2. Metoda iteracji po czasie (kolejnych stanów nieustalonych)

Przepływ płynu idealnego z silnymi zjawiskami falowymi przez stopień transoniczny można opisać równaniami zachowania masy, pędu i energii w postaci całkowej

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho d\Omega + \oint_{\Sigma} \rho \vec{v} \cdot d\vec{\Sigma} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho \vec{v} d\Omega + \oint_{\Sigma} (\rho + \rho \vec{v}) \vec{v} d\vec{\Sigma} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} E d\Omega + \oint_{\Sigma} (E + p) \vec{v} d\vec{\Sigma} = 0,$$

gdzie:

Ω - elementarna powierzchnia,

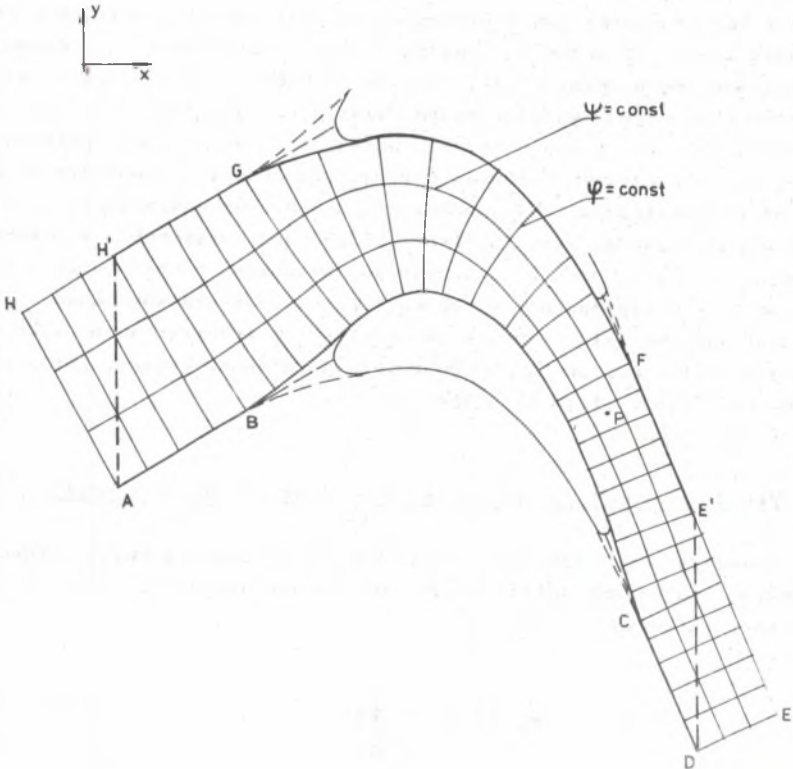
Σ - kontur zewnętrzny elementarnej powierzchni,

$$E = e + \frac{v^2}{2},$$

e - energia wewnętrzna.

Celem zamknięcia powyższego układu równań należy je uzupełnić równaniem stanu:

$$p = p(\rho, e). \quad (2)$$



Rys. 1. Ekwipotencjalna siatka różnicowa utworzona dla profilu VKI-LS5g

Powyższy układ równań w całym obszarze przepływu transonicznego jest typu hiperbolicznego, umożliwia to zastosowanie jednej metody rozwiązania dla całego obszaru obliczeniowego (rys. 1). Najbardziej dogodną metodą jest metoda iteracyjna - kolejnych stanów nieustalonych.

Przeprowadzając dyskretyzację układu równań (1) dla zagadnienia płaskiego otrzymujemy układ równań różnicowych:

$$\begin{aligned} f_{\{m_i\}}^{n+1} &= f_{\{m_i\}}^n - \frac{\Delta t}{\omega_{\{m_i\}}} \left[\sum_{j=1}^N \left\{ \bar{F}(f) \bar{n} \bar{G} \right\}_j \right]_{\{m_i\}}^n \\ f &= \begin{bmatrix} \varphi \\ \varphi V \\ E \end{bmatrix} \quad \bar{F} = \begin{bmatrix} \varphi \bar{V} \\ p \bar{n} + \varphi \bar{V} (\bar{n} \bar{V}) \\ (E + p) \bar{V} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3)$$

gdzie:

- ω - powierzchnia elementarnego oczka siatki,
- \bar{G} - granica zewnętrzna elementarnego oczka siatki o pow.,
- $\{m_i\}$ - ciąg indeksów $i = 1, 2$ identyfikujących oczko siatki,
- N - liczba prostoliniowych odcinków granicy zewnętrznej oczka,
- \bar{n} - jednostkowy wektor normalny do elementarnego boku konturu oczka siatki.

Występujące w układzie równań różnicowych iloczyny skalarne są niezmiennicze względem układu współrzędnych. Pozwala to na rozwiązanie zadania na dowolnej siatce różnicowej zdefiniowanej w prostokątnym układzie współrzędnych.

W schemacie różnicowym (3) pozostają do zdefiniowania wartości parametrów przepływu (wielkości strumieni) na konturze elementarnego oczka siatki. Wartości te można wyznaczyć dwoma sposobami:

- pierwszy oparty jest o rozwiązanie jednowymiarowego zagadnienia Riemana rozprzestrzenienia się fal podłużnych generowanych różnicą parametrów w dwóch sąsiednich oczkach [2], [3],
- drugi zakłada liniowy rozkład parametrów wzdłuż elementarnego prostoliniowego odcinka konturu oczka siatki [5].

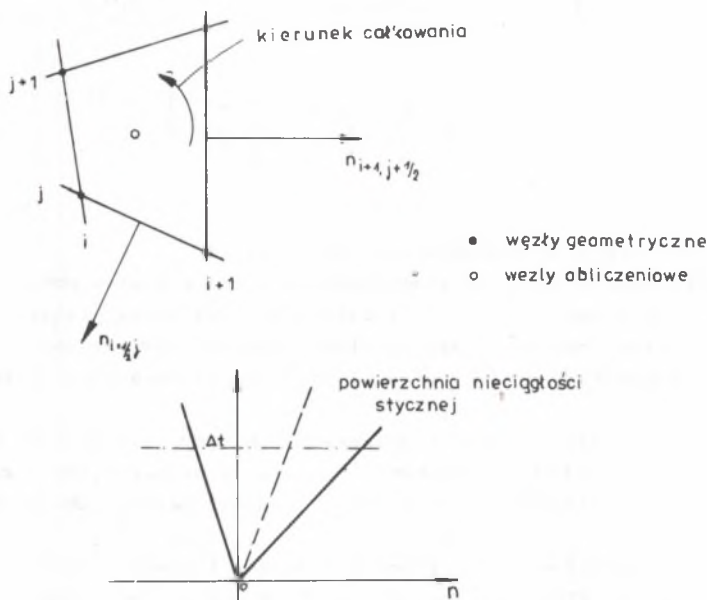
W pierwszym przypadku ograniczymy się do rozważania schematu fal akustycznych, dla którego otrzymujemy następujący układ zależności pozwalających wyznaczyć szukane parametry.

$$\begin{aligned} d &= k \frac{p_1 + p_2}{2} \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \\ p &= \frac{p_1 + p_2}{2} + d \frac{w_1 - w_2}{2} \\ w_{SPN} &= \frac{w_1 + w_2}{2} + \frac{p_1 - p_2}{2d} \end{aligned} \quad (4)$$

gdzie:

- $w_{1,(2)}$ - składowe prędkości normalne do konturu oczka,
- 1 - indeks oczka leżącego po lewej stronie konturu,
- 2 - indeks oczka leżącego po prawej stronie konturu,
- w_{SPN} - prędkość stycznej powierzchni nieciągłości.

Geometryczną interpretacją rozprzestrzeniania się zaburzeń przedstawiono na rys. 2.



Rys. 2

a - elementarna komórka siatki obliczeniowej, b - przykładowy układ fal generowanych na jednym z boków elementarnej komórki

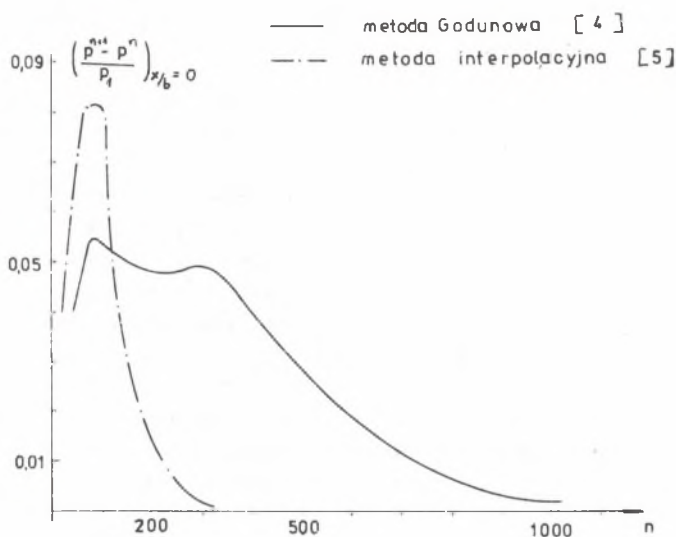
Jak wykazały badania, przybliżenie zjawisk falowych falami akustycznymi jest możliwe jedynie w przypadku, gdy zmiana kierunku prędkości przepływu w dwóch sąsiednich oczkach jest mniejsza od trzech stopni (3°). Wymaga to stosowania dostatecznie gęstych siatek różnicowych, zwłaszcza w przypadku profili silnie wygiętych (turbinowych).

W drugim przypadku schemat różnicowy (3) jest schematem niezbędnym (schemat Laxa [6]) i wymaga uzupełnienia o człony relaksacyjne, które np. według [5] mogą przybierać postać:

$$\bar{r} = \left[\frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^N r_i^n \right) - r^n \right] - \left\{ 1 - \frac{1-\alpha}{f_{\max}} \left[\frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^N r_i^{n-k} \right) - r^{n-k} \right] \right\} \quad (5)$$

gdzie:

- f - odpowiednio Q , V , p ,
- Q - współczynnik relaksacji,
- f_{\max} - maksymalna wartość funkcji f ,
- N - ilość elementów konturu oczka,
- k - liczba naturalna mniejsza od n .



Rys. 3. Zbieżność procesów iteracyjnych

Przedstawione metody ze względu na klasę rozwiązywanych zagadnień są równorzędne. Jak wykazały badania wstępne czas realizacji obliczeń w ramach jednej pętli iteracyjnej jest dla obu schematów jednakowy. Dla siatki przedstawionej na rys. 1 wynosi około 50 sek. Również obszar pamięci operacyjnej zajmowany przez obie procedury jest prawie identyczny. Dopiero przeprowadzona analiza zbieżności (rys. 3) wskazuje wyraźnie na większą efektywność metody interpolacyjnej, dla której dostateczną dokładność rozwiązania osiągnięto po 400 iteracjach.

3. Metoda charakterystyk

Jedną z podstawowych metod rozwiązania przepływu potencjalnego opisanego równaniami różniczkowymi (6) lub (7) mieszczącymi się w klasie równań hiperbolicznych jest metoda charakterystyk. Metodą tą można rozwiązać przepływ wykorzystując jej interpretację numeryczną [8], [9] lub graficzną [4], [7].

$$\left[1 - \frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2\right] \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \left[1 - \frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2\right] \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{2}{a^2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = 0 \quad (6)$$

$$- \frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial t}\right) +$$

$$+ \left[1 - \frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2\right] \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \left[1 - \frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2\right] \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{2}{a^2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = 0 \quad (7)$$

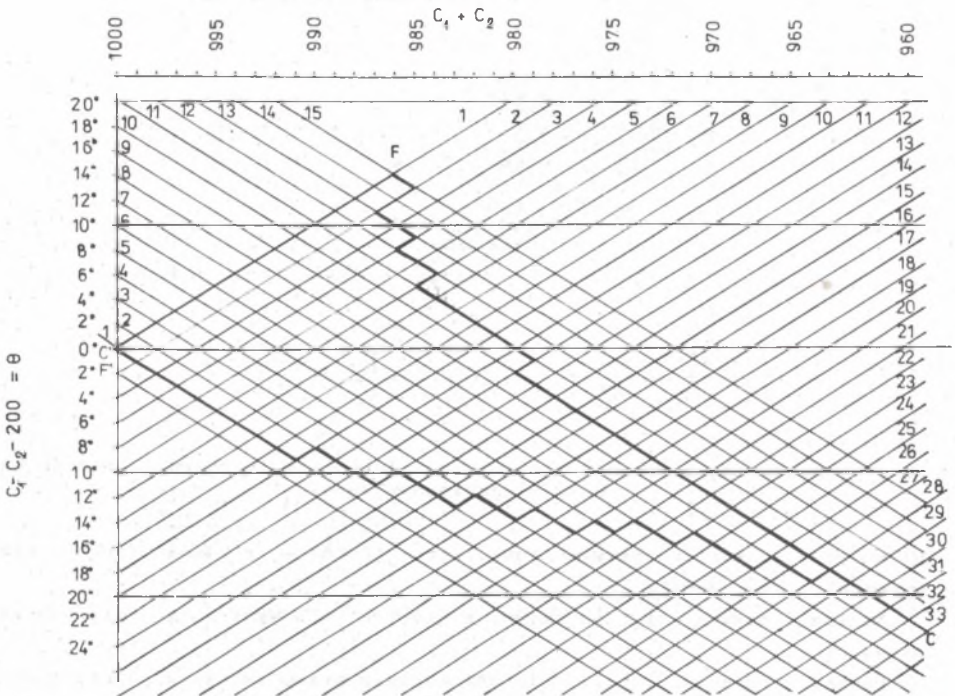
Metody numeryczne ze względu na zastosowanie procedur iteracyjnych wymagają długiego czasu obliczeń. Powoduje to, że przy założeniu potencjalnego charakteru przepływu, są one mało przydatne do rozwiązywania przepływu w kanałach międzyłopatkowych, w porównaniu z metodami przedstawionymi w rozdziale poprzednim. Metody geometryczne (wykreślne lub półwykreślne) dające w rozwiązaniu przybliżoną strukturę układów falowych przepływu, rozkład parametrów w kanale i na powierzchni profilu w części nadźwiękowej oparte są o cztery podstawowe konstrukcje - zadania:

- I - W płaszczyźnie przepływu dany jest łuk (nie będący charakterystyką), w którego każdym punkcie zadana jest prędkość. Należy określić prędkość w każdym punkcie obszaru ograniczonego danym łukiem oraz dwiema charakterystykami wychodzącymi z punktów skrajnych danego łuku i stanowiącymi charakterystyki dwóch różnych rodzin.
- II - Zadane są prędkości na odcinkach dwóch przecinających się charakterystyk, należących do różnych rodzin. Należy określić pole prędkości w czworokącie krzywoliniowym, ograniczonym danymi charakterystykami oraz dwiema wychodzącymi ze skrajnych punktów.
- III - Prędkości są dane wzdłuż łuku charakterystyki, punkt początkowy łuku leży na sztywnej ścianie. Należy określić pole prędkości w obszarze, ograniczonym danymi łukami i charakterystyką łączącą końce obu odcinków.
- IV - Dane są prędkości wzdłuż odcinka charakterystyki oraz wiadomo, że punkt początkowy leży na granicy swobodnego przepływu. Należy znaleźć kształt swobodnej granicy oraz rozkład prędkości w obszarze leżącym między zadaną charakterystyką, swobodną granicą i charakterystyką zamykającą.

Dla kanału utworzonego z profili VKI-LS5g zostały przeprowadzone obliczenia mające na celu półwykreślne wyznaczenie przepływu w skośnym ścięciu ww. kanału. Rozwiązanie przeprowadzono przy następujących założeniach:

- 1) linia dźwięku $Ma = 1$ jest linią prostą i pokrywa się z linią minimalnego przekroju kanału międzyłopatkowego wyznaczoną graficznie,
- 2) w skośnym ścięciu kanału nie występuje fala uderzeniowa,

- 3) poszczególne fale rozrzewieniowe mają intensywność 1^0 i powstają w punktach, w których styczne do powierzchni profilu nachylone są względem siebie o 1^0 ,
- 4) obliczenia są prowadzone tylko w obszarze skośnego ścięcia, a więc nie uwzględniono wpływu śladu krawędziowego.

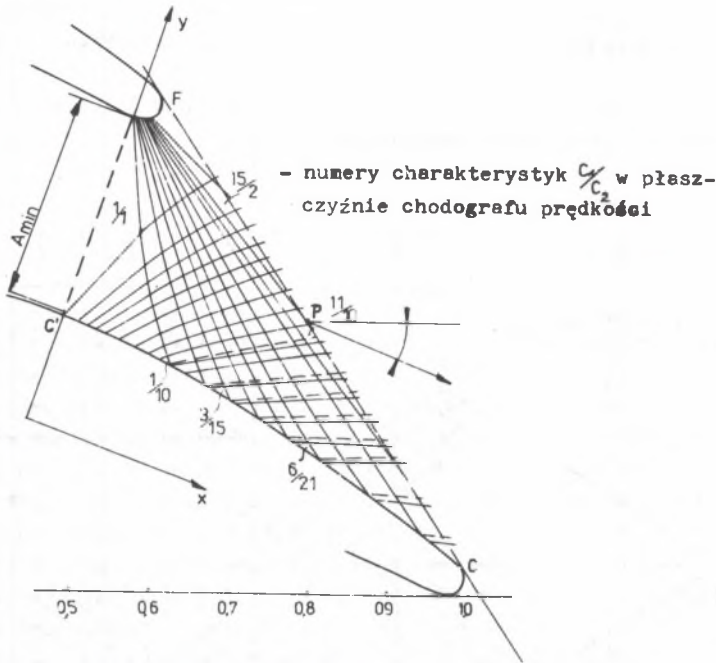


Rys. 4. Obraz przepływu w płaszczyźnie hodografu prędkości

Graficzne rozwiązanie przepływu w płaszczyźnie hodografu prędkości zostało przedstawione na rys. 4, natomiast w płaszczyźnie przepływu na rys. 5.

4. Badanie przepływu metodą analogii hydrogazodynamicznej

Alternatywą dla przedstawionych teoretycznych rozwiązań przepływu w kanałach międzyłopatkowych jest metoda analogii hydrogazodynamicznej. Badania analogowe oparte są o podobieństwo między zjawiskami falowymi w cieczy i na powierzchni płytkiej wody wynikające z formalnej zgodności równań zachowania masy, pędu, które sprowadzają się do przyjęcia następujących odpowiedniości: wysokość warstwy wody - gęstość gazu, prędkość prze-



Rys. 5. Rozwiązanie przepływu metodą charakterystyk w skośnym ścięciu kanału międzyłopatkowego

prędkość wody, określona bezwymiarową liczbą Frouda - prędkość ruchu gazu wyrażona liczbą Macha.

Analogia dotyczy tych obszarów, w których nie występują fale uderzeniowe.

Badania palisady profili VKI-LS5g zostały przeprowadzone przy następujących warunkach modelowania:

1. W celu wyeliminowania możliwości wystąpienia fali uderzeniowej (skoku hydraulicznego) wewnątrz badanego kanału przyjęto jako warunek modelowania równość:

$$Fr_1 = (\overline{Ma}_1)_{k=2} = (Ma_1)_{k=1,4}, \quad (8)$$

gdzie:

$$Fr = \overline{Ma} = \sqrt{2\left(\frac{h}{h_0} - 1\right)} - \text{liczba Frouda.}$$

2. Aby wyeliminować kapilarne zjawiska falowe została przyjęta duża cięciwa modelu (model wykonano w skali 10:1).

3. Przy przeliczaniu analogii skorzystano z dwóch różnych warunków podobieństwa:

a)

$$\left(\frac{F}{F^*}\right)_{k=1,4} = \left(\frac{F}{F^*}\right)_{k=2}, \quad (9)$$

a więc

$$\frac{1}{Ma} \left(\frac{2}{k+1} + \frac{k-1}{k+1} Ma^2 \right)_{k=1,4}^{\frac{k+1}{2(k-1)}} = \frac{1}{Ma} \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} Ma \right)^{\frac{3}{2}}, \quad (10)$$

gdzie:

F - odległość linii prądu w przekroju bieżącym,

F^* - odległość linii prądu w przekroju minimalnym,

b)

$$(\vartheta - \vartheta_1)_{k=1,4} = (\vartheta - \vartheta_1)_{k=2}, \quad (11)$$

a więc

$$\left[\sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \arctg \sqrt{\frac{k-1}{k+1}} (Ma^2 - 1) - \arctg \sqrt{Ma^2 - 1} \right]_{k=1,4} = \sqrt{3} \arctg \sqrt{\frac{1}{3}} (Ma^2 - 1) - \arctg \sqrt{Ma^2 - 1}, \quad (12)$$

gdzie:

ϑ - kąt odchylenia strugi w przekroju bieżącym.

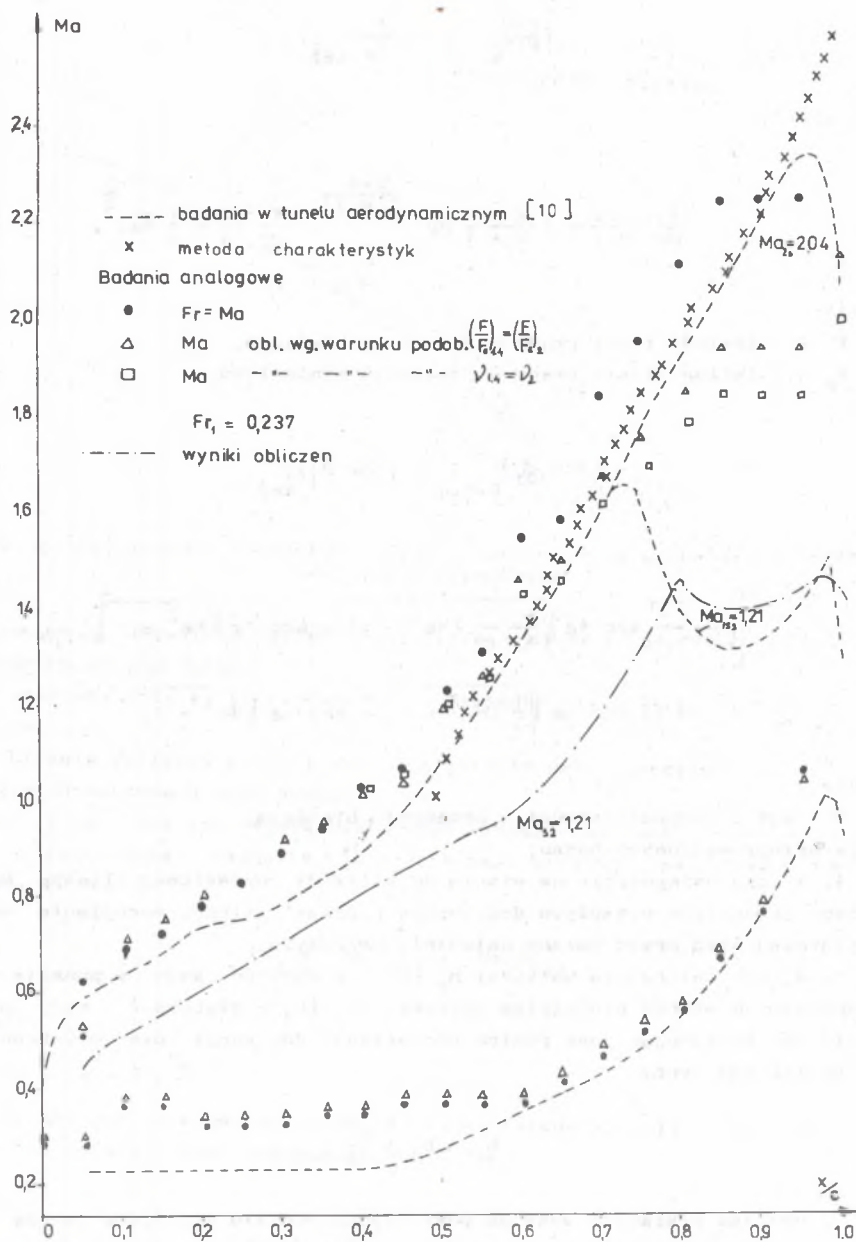
Opis przeprowadzonych badań:

1. W celu osiągnięcia na wlocie do palisady określonej liczby Macha zmianę parametrów przepływu dokonywano poprzez zmianę pochylenia wanny pomiarowej oraz przez zmianę natężenia przepływu.

2. W celu obliczenia wartości h_0 (h_0 - głębokość wody w punkcie spoczynkowym) mierzono czujnikiem głębokość h_1 (h_1 - głębokość wody przed palisadą) przyjmując jako poziom odniesienia dno wanny oraz prędkość w_1 na powierzchni wody

$$h_0 = h_1 + \frac{w_1^2}{2g} \quad (13)$$

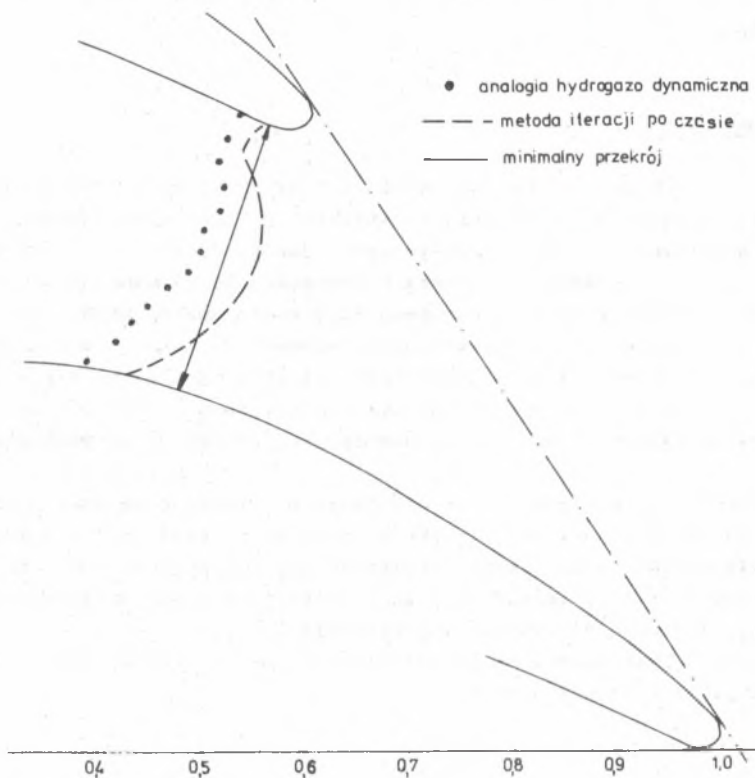
3. Rozkład wysokości wody na powierzchni profilu określono metodą barwionej wody, dającą ciągle rozkład prędkości. Ponieważ pomiar ten obar-



Rys. 6. Rozkład prędkości na powierzchni profilu VK1-1.55g

czony jest błędem wynikającym z faktu istnienia menisku, wielkość średniego menisku określono mierząc głębokość wody w odległości 2 mm od powierzchni profilu w kilkunastu punktach.

Wyniki badań zostały przedstawione na rys. 6.



Rys. 7. Kształt linii dźwięku

Został wykonany pomiar kształtu i położenia linii dźwięku rys. 7. Linia dźwięku została zidentyfikowana jako linia o stałej wysokości słupa wody $h = h_*$. Przy czym h_* wyznaczone z warunku:

$$Fr = Fr_* = \sqrt{2\left(\frac{h_0}{h_*} - 1\right)} = 1$$

$$h_* = \frac{2}{3} h_0$$

Nie były przeprowadzane badania analogowe przepływu z falą uderzeniową. Jak wykazały badania opływu klina strumieniem płytkiej wody, przeprowa-

dzony przez Namieślnik [11], zjawiska dysypacyjne występujące w przepływie w znaczny sposób zakłócają warunki analogii. Zakłócenie te dla liczby Frouda $1 < Fr < 1,6$ jest znaczne - nie mieści się w granicach błędów pomiarowych. Dlatego też uważam za niecelowe modelowanie silnych zjawisk falowyh w przypadku, gdy liczba Macha przed falą uderzeniową jest mniejsza od 1,8.

4. Podsumowanie

Celem pracy było kompleksowe porównanie wyników badań przedstawionymi metodami pod kątem wykorzystania przybliżonych badań analogowych do zwiększenia efektywności badań teoretycznych. Jak wykazało zestawienie wyników rys. 6 istnieją duże możliwości w tym zakresie. A mianowicie proponuje się wykorzystanie wyników otrzymanych z badań analogowych jako warunków początkowych do metod iteracyjnych. Prowadzone badania w tym zakresie wskazują, że dla schematu Godunowa ilość iteracji zmniejszy się o połowę. Ponieważ przyjęte w ten sposób warunki początkowe nie uwzględniają silnych zjawisk falowych, nasuwa się następująca koncepcja prowadzenia obliczeń:

zakładana jest skokowa zmiana ciśnienia w przekroju wylotowym DE' rys. 1 w ten sposób, żeby przy zwiększających się wartościach ciśnienia można było uzyskać rozwiązanie z przesuwającą się w głąb kanału falą uderzeniową, w tym że zmianę ciśnienia należy dokonywać po uzyskaniu przepływu ustalonego dla wartości poprzedniej.

W ten sposób uzyskujemy w najkrótszym czasie pełną charakterystykę obliczeniową palisady transonicznej.

LITERATURA

- [1] Arżanikow N.S., Malcew W.N.: Aerodynamika. PWN, Warszawa 1959.
- [2] Godunow S.K.: Raznostnyj metod czislennogo rasczieta razrywnych reżimienij urawnienij gidrodinamiki. Matematičeskij Sbornik T 47. No 3 1950.
- [3] Godunow S.K.: Czislennoje riešenieje mnogomiernych zadacz gazowej dynamiki. Nauka, Moskwa 1976.
- [4] Boszek K., Hořejší I., Rais M., CSc: Umströmung von Turbinenschau-felprofilen bei Unterschall- und transonischer Strömung. Skora Revue No 4 1981.
- [5] Lethaus F.: Berechnung der transonischen Strömung durch eben Turbinengitter nach den Zeit-Schrift-Verfahren. VDI Forsch-Heft 586.
- [6] Potter D.: Metody obliczeniowe w fizyce. PWN, Warszawa 1977.
- [7] Prosnak W.J.: Mechanika płynów. PWN, Warszawa 1970.
- [8] Delaney R.A., Kavanagh P.: Transonic Flow Analysis in Axial-Flow Turbomachinery Cascades by a Time-Dependent Method of Characteristics. Transaction of ASME Journal of Engineering for Power No 7 1976.

- [9] Fraehauf H.H.: Spatial Supersonic Flow Through Annular Cascades. Transaction of the ASME. Journal of Engineering for Power No 8 1976.
- [10] Couston M., Morris A.: Turbine and Compressor Cascade Test Case. VKI Lecture Series 84 1976.
- [11] Namieśnik K.: Trafności modelowania zjawisk falowych metodą analogii hydrogazodynamicznej. ZN IMP - PAN, Gdańsk 114/1022/81.

Recenzent: doc. dr inż. Jerzy Roszkowski

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МЕТОДОВ ИСПЫТАНИИ ОКОЛОЗВУКОВЫХ ТЕЧЕНИИ

Резюме

В работе проведено осмотр методов анализа околозвуковых течений в межплитковых каналах турбомашин. Подано схемы итерационных методов. Представлено результаты теоретических и экспериментальных испытаний.

A COMPARISON STUDY OF DIFFERENT METHODS OF TRANSONIC FLOWS EXAMINATIONS

Summary

A survey of a transonic flow analyses methods in the interblades channels of turbomachines is given. Difference iteration methods are compared. Theoretical and experimental investigations are presented with their results.