ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1983

Seria: ENERGETYKA z. 83 Nr kol. 775

Joachim J. OTTE
Instytut Maszyn i Urządzeń Energetycznych

PROCEDURY OBLICZENIOWE METODY KRZYWIZNY LINII PRĄDU

Streszczenie. W pracy rozpatrzono problemy decydujące o efektywności procedur całkowania w metodzie krzywizny linii prądu. Przez wprowadzenie pojęcia funkcji prądu, problem rozwiązywania równania osiowo-symetrycznego przepływu sprowadzono do rozwiązywania zagadnienia brzegowego. Procedurę obliczeń oparto na bardzo efektywnej metodzie "przeganiania". Przedstawiono przykładowe wyniki obliczeń.

1. Wstęp

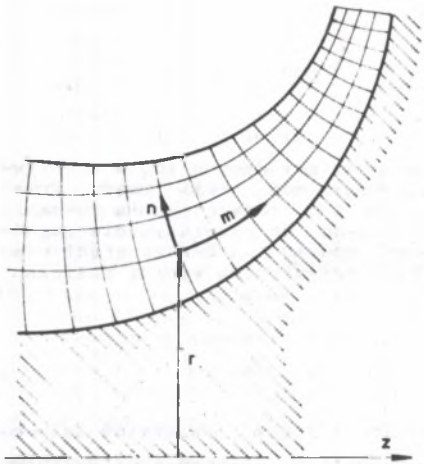
Dokonując w artykułach [1] i [2] przeglądu i oceny rezultatów dotychczasowych prac badawczych w zakresie metod analizy osiowo-symetrycznego przepływu przez układy łopatkowe maszyn wirnikowych, wśród metod pozwalających na obliczeniową realizację ogólnego modelu przepływu wyróżniono metodę krzywizny linii prądu (MKLP) oraz metodę funkcji prądu (MFP).

Jakkolwiek praktyka obliczeniowa wykazuje, że metoda KLP w coraz większym stopniu wypierana jest przez MFP, to jednak pewne zalety tej metody uwidaczniają się w przypadku analizy przepływu w wirnikach typu osiowo-promieniowego, w których linie prądu posiadają wyraźnie określoną krzywiznę. Metoda KLP zawodzi natomiast w przypadku, gdy przebieg linii prądu oscyluje wokół linii prostych. Ze względu na złe uwarunkowanie zadania niewskazane jest więc stosowanie MKLP do analizy przepływu w wieńcach i stopniach "czysto" osiowych, gdyż spodziewać się tu można błędnych wyników.

Metoda krzywizny linii prądu wymaga znacznego doświadczenia w prowadzeniu obliczeń, co łączy się tu z nierozwiązanymi jeszcze w pełni problemami stabilności, zbieżności i dokładności obliczeń numerycznych. Istotną poprawę w zakresie zbieżności i dokładności obliczeń można uzyskać przez wprowadzenie pojęcia funkcji prądu i zastosowanie procedury obliczeniowej wykorzystującej własności macierzy trójdiagonalnych - co jest tematem niniejszego artykułu, który jednocześnie jest kontynuacją wcześniejszej pracy autora [3].

2. Zagadnienie wyboru układu współrzędnych

W metodach krzywizny linii prądu kluczowym zagadnieniem, przesądzającym o konstrukcji algorytmu obliczeniowego jest określenie przebiegu linii prądu. W sformułowaniach modelu matematycznego merydionalna linia prądu stanowi tu podstawową współrzędną, wybór zaś drugiej współrzędnej zdeterminowany jest głównie efektywnością programu obliczeniowego.



Rys. 1

Pierwotnie model matematyczny analizy osiowo-symetrycznego przepływu płynu w maszynach wirnikowych formułowany był w ortogonalnym układzie współrzędnych naturalnych m-n, gdzie "m" jest współrzędną wzdłuż merydionalnej linii prądu "n" zaś jest do niej linią ortogonalną (rys. 1).

W ten sposób zagadnienie analizy przepływu ujęto między innymi w pracach [3], [4], [5], [6]. Opierając się w dalszym ciągu na dokonaniach pracy [3] można przytoczyć ostateczną postać równań osiowo-symetrycznego przepływu płynu nieściśliwego, zapisanych w układzie współrzędnych naturalnych:

$$\dot{m} = 2\pi \int_0^{n_c} \varrho\, r \breve{\sigma} c_m dn = \text{const} \tag{1}$$

$$c_m \frac{\partial c_m}{\partial n} + A c_m^2 + B c_m + C = 0, \tag{2}$$

gdzie:

$$A = \frac{\sin^2\beta}{r_k} + \frac{\cos^2\beta\cos\gamma}{r} - \frac{\partial \ln\sin\beta}{\partial n} - (\mathrm{ctg}\,\beta_p \sin\gamma - \mathrm{tg}\,\sigma\cos\gamma)\,.$$

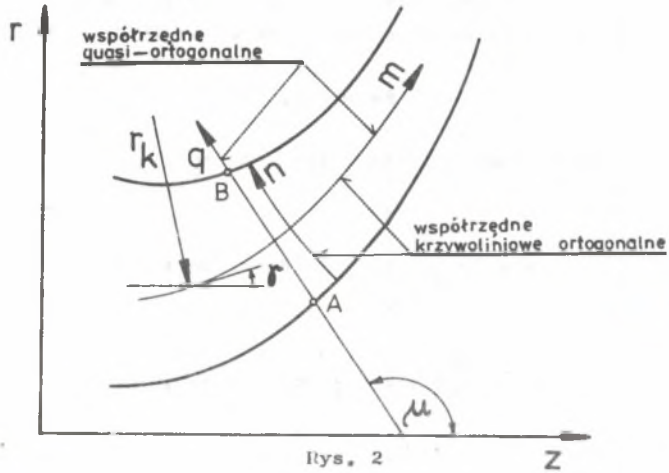
$$\cdot \left[\sin\beta\cos\beta\left(\frac{\partial\gamma}{\partial n} + \frac{\partial \ln\breve{\sigma}}{\partial m}\right) + \frac{\partial\beta}{\partial m}\right]$$

$$B = 2\omega\,\mathrm{ctg}\,\beta_p \sin^2\beta$$

$$C = \sin^2\beta \left[-\frac{\partial h_o^*}{\partial n} + \frac{1}{2}\frac{\partial(\xi w_o^2)}{\partial n} + (\mathrm{ctg}\beta_p \sin\gamma - \mathrm{tg}\delta\cos\gamma) \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \sin\beta\cos\beta \frac{w_o^2}{2}\frac{\partial\xi}{\partial m} \right]$$

Współrzędne naturalne są bardzo wygodne do prowadzenia rozważań ogólnych, jednak w procedurze obliczeniowej wykazują się bardzo istotną wadą, a mianowicie siatka punktów obliczeniowych (rys. 1) nie jest umiejscowiona (jest niestała) i w trakcie obliczeń węzły siatki są przemieszczane. Stąd też w tym przypadku nie można uzyskać efektywnego programu obliczeń na EMC, jakkolwiek próby takie były czynione (np. praca [6]).



Rys. 2

Ważnym krokiem poszerzającym w sposób istotny możliwości metody krzywizny linii prądu było wprowadzenie w miejsce współrzędnej ortogonalnej do linii prądu, współrzędnej wzdłuż zadanej prostej o nachyleniu bliskim ortogonalnemu.

Proste te (rys. 2) zwane quasi-ortogonalnymi tworzą wspólnie z liniami prądu układ współrzędnych quasi-ortogonalnych m - q. Wprawdzie siatka obliczeniowa także w tym przypadku nie jest stała (jest to tzw. siatka półstała) lecz przemieszczenia punktów odbywają się tylko wzdłuż prostych q. Taki układ współrzędnych został z powodzeniem zastosowany w wielu pracach, m.in. w [7], [8], [9].

Aby przejść z układu współrzędnych naturalnych do układu quasi-ortogonalnego wykorzystuje się związek

$$\frac{\partial}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial m}\frac{dm}{dq} + \frac{\partial}{\partial n}\frac{dn}{dq}. \tag{3}$$

Jeżeli zauważyć, że kąt nachylenia linii prądu wynosi γ, natomiast prosta quasi-ortogonalna nachylona jest do osi obrotu pod kątem μ to prawdziwe są zależności:

$$\frac{dm}{dq} = \cos(\mu - \gamma); \quad \frac{dn}{dq} = \sin(\mu - \gamma) \tag{4}$$

które, po podstawieniu do związku (3), dają podstawową formułę przejścia do zapisu we współrzędnych quasi-ortogonalnych

$$\frac{\partial}{\partial n} = \frac{1}{\sin(\mu - \gamma)} \frac{\partial}{\partial q} - \operatorname{ctg}(\mu - \gamma) \frac{\partial}{\partial m}. \tag{5}$$

Stosując powyższą formułę i dokonując odpowiednich przekształceń, można równania (1) i (2) sformułować w układzie współrzędnych quasi-ortogonalnych. Wprowadzając, celem skrócenia zapisu, wielkość

$$\varepsilon = \mu - \gamma,$$

dochodzi się do następującej postaci tych równań:

$$\dot{m} = 2\pi \int_0^{q_c} \varrho r \bar{\sigma} c_m \sin\varepsilon \, dq = \text{const} \tag{6}$$

$$c_m \frac{\partial c_m}{\partial q} + A c_m^2 + B c_m + C = 0, \tag{7}$$

gdzie:

$$A = \sin\varepsilon \Bigg\{ \frac{\sin^2\beta}{r_k} + \frac{\cos^2\beta \cos\gamma}{r} - \operatorname{ctg}\beta \left(\frac{1}{\sin\varepsilon} \frac{\partial\beta}{\partial q} - \operatorname{ctg}\varepsilon \frac{\partial\beta}{\partial m} \right)$$

$$- (\operatorname{ctg}\beta_p \sin\gamma - \operatorname{tg}\delta \cos\gamma) \left[\sin\beta\cos\beta \left(\frac{1}{\sin\varepsilon} \frac{\partial\gamma}{\partial q} + \operatorname{ctg}\varepsilon \frac{1}{r_k} + \frac{\partial \ln\bar{\sigma}}{\partial m} \right) + \frac{\partial\beta}{\partial m} \right] +$$

$$+ \operatorname{ctg}\varepsilon \left[\frac{\sin\gamma}{r} + \frac{\partial \ln\bar{\sigma}}{\partial m} + \frac{1}{\sin\varepsilon} \frac{\partial\gamma}{\partial q} + \operatorname{ctg}\varepsilon \frac{1}{r_k} \right] \Bigg\}$$

$$B = 2\omega \operatorname{ctg}\beta_p \sin^2\beta \sin\varepsilon$$

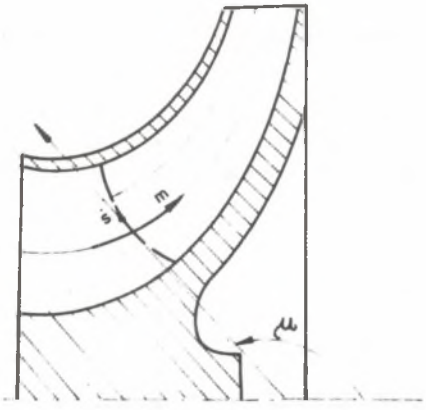
$$C = \sin^2\beta \left[- \frac{\partial h_o^*}{\partial q} + \frac{w_o^2}{2} \left(\frac{\partial\xi}{\partial q} - \cos\varepsilon \frac{\partial\xi}{\partial m} \right) + \right.$$

$$\left. + \sin\varepsilon (\operatorname{ctg}\beta_p \sin\gamma - \operatorname{tg}\delta \cos\gamma) \sin\beta\cos\beta \frac{w_o^2}{2} \frac{\partial\xi}{\partial m} \right]$$

Można stwierdzić, że kosztem zwiększenia efektywności procedury obliczeniowej, uzyskuje się równania przepływu w bardzo złożonej postaci, co jednak przy opracowaniu programu na EMC nie nastręcza większych trudności.

2.1. Układ współrzędnych krzywoliniowych (nieortogonalnych)

W niektórych specjalnych przypadkach w miejsce prostych quasi-ortogonalnych zaproponować można zastosowanie współrzędnych krzywoliniowych. Jako przykład nasuwa się tu od razu przypadek wyznaczenia rozkładu parametrów aerodynamicznych wzdłuż krawędzi wlotowej (wylotowej) wirnika typu osiowo-promieniowego, która w przekroju merydionalnym ma niekiedy zdecydowanie krzywoliniowy przebieg (rys. 3).



Rys. 3

Przez wprowadzenie uogólnionego układu współrzędnych krzywoliniowych m-s, formalne ujęcie zagadnienia osiowo-symetrycznego przepływu praktycznie niewiele się zmieni, w stosunku do zapisu w układzie quasi-ortogonalnym. W dalszym ciągu obowiązuje formuła przejścia (5):

$$\frac{\partial}{\partial n} = \frac{1}{\sin(\mu - \gamma)} \frac{\partial}{\partial s} - \operatorname{ctg}(\mu - \gamma) \frac{\partial}{\partial m}. \tag{8}$$

Istotna zmiana następuje jedynie przy określeniu lokalnego kąta μ nachylenia stycznej do linii "s" (rys. 3). Otóż jeżeli przykładowo linię "s" przedstawić w postaci równania $r = f(z)$, to lokalny kąt nachylenia stycznej wynosi

$$\mu = \operatorname{arctg}[f'(z)]. \tag{9}$$

Występującą w obliczeniach różniczkę łuku krzywej określa się znanym z analizy matematycznej wzorem

$$ds = \sqrt{1 + (r')^2}\, dz. \tag{10}$$

Przykładowo przyjmując dostatecznie ogólny przebieg linii "s" w postaci paraboli

$$r = az^2 + bz + c, \tag{11}$$

otrzymuje się wielkość lokalnego kąta nachylenia stycznej μ :

$$\mu = \operatorname{arctg}(2az + b) \tag{12}$$

W celach obliczeniowych równanie paraboli (11) można przedstawić jako funkcję odwrotną

$$z = (-b \pm \sqrt{b^2 - 4a(c - r)})/2a. \tag{13}$$

Uwzględniając powyższe uwagi (przy formalnej zamianie $q \to s$) układ równań (6) i (7) zapisuje się następująco:

$$\dot{m} = 2\pi \int_0^{S_c} \varrho r^{\delta} c_m \sin(\mu - \gamma) ds = \text{const} \tag{14}$$

$$c_m \frac{\partial c_m}{\partial s} + Ac_m + Bc_m + C = 0. \tag{15}$$

3. Zagadnienie rozwiązywania równań osiowo-symetrycznego przepływu

Metoda rozwiązywania sformułowanych wyżej równań (6) i (7) (względnie (14) i (15)) oparta jest w ogólności na koncepcji rozwiązywania równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych "metodą prostych" [10]. Z góry założone tu iteracyjne dochodzenie do ostatecznego rozwiązania polega na tym, że pochodne względem współrzędnej merydionalnej "m" aproksymuje się odpowiednimi wyrażeniami różnicowymi, wartości których wyznacza się na podstawie poprzedniego przybliżenia. W ten sposób problem sprowadza się do całkowania równania różniczkowego zwyczajnego wzdłuż linii quasi-ortogonalnych.

Dogodna dla celów obliczeń numerycznych postać równania (7) jest następująca:

$$\frac{dc_m}{dq} = -\left[A(q)c_m + B(q) + \frac{C(q)}{c_m}\right] \equiv F(q, c_m) \tag{16}$$

Wraz z warunkiem

$$c_m(0) = c_{m0} \tag{17}$$

równanie (16) tworzy zagadnienie początkowe, które ze względu na krotność obliczenia funkcji F, najczęściej rozwiązuje się jedną z jednokrokowych

metod rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych. Wiele zalet posiada tu metoda trapezów, która zastosowana do równania (16) przy całkowaniu pomiędzy węzłami j-1 oraz j prowadzi do formuły

$$c_{mj} = c_{mj-1} + \frac{h_j}{2}\left[F(q_{j-1}, c_{mj-1}) + F(q_j, c_{mj})\right], \tag{18}$$

gdzie:

$$h_j = q_j - q_{j-1} \tag{19}$$

jest krokiem całkowania.

Całkowanie wzdłuż linii quasi-ortogonalnej od punktu brzegowego A (rys. 2) do punktu brzegowego B, czyli w zakresie

$$H = q_B - q_A \tag{20}$$

realizować można według różnych procedur. Ze względu na czynione założenia wyróżnić można dwie różniące się procedury. W jednej z nich zakłada się, że pomiędzy kolejnymi punktami węzłowymi, a więc i kolejnymi liniami prądu płynie określony z góry strumień masy $\Delta\dot{m}$, wynikający z podziału całego strumienia masy $\dot{m}$ na strugi elementarne, np.

$$\Delta\dot{m} = \frac{\dot{m}}{jk}, \tag{21}$$

gdzie jk jest liczbą strug. W drugiej zaś procedurze przyjmuje się położenie punktów węzłowych q_j jako zadane, natomiast elementarny strumień masy oblicza się z równania ciągłości (6):

$$\Delta\dot{m} = \mathfrak{A} h_j \left[(\varrho\tilde{\varepsilon} c_m \sin\varepsilon r)_{j-1} + (\varrho\tilde{\varepsilon} c_m \sin\varepsilon r)_j\right] \tag{22}$$

Poniżej przedstawiono fragment sieci działań składających się na poszczególne procedury.

<u>Procedura I</u>

10 : Iteracja ϑ-ta; $j = 0$; $c_{mo} = c_{mo}^{(\vartheta)}$

20 : $j = j + 1$; $\mu = 0$

21 : $\mu = \mu + 1$

22 : $c_{mj}^{(\mu)} = c_{mj-1} + 0{,}5\, h_j^{(\mu-1)}\left[F(q_{j-1}, c_{mj-1}) + F(q_j^{(\mu-1)}, c_{mj}^{(\mu-1)})\right]$

23 : $h_j^{(\mu)} = \dfrac{\Delta\dot{m}}{\left[(\varrho\tilde{v}c_m\sin\varepsilon r)_{j-1} + (\varrho\tilde{v}c_m\sin\varepsilon r)_j^{(\mu)}\right]}$

24 : if $\left|c_{mj}^{(\mu)} - c_{mj}^{(\mu-1)}\right| \geqslant \varepsilon_c$ then go to 21;

30 : if $j < jk$ then goto 20;

40 : if $\left|H - \left(\sum_{j=1}^{jk} h_j\right)^{(\vartheta)}\right| \geqslant \varepsilon_H$ then go to 10;

Procedura II

10 : Iteracja ϑ-ta; $j = 0$; $c_{mo} = c_{mo}^{(\vartheta)}$

20 : $j = j + 1$; $\mu = 0$

21 : $\mu = \mu + 1$

22 : $c_{mj}^{(\mu)} = c_{mj} + 0{,}5\, h_j\left[F(q_{j-1}, c_{mj-1}) + F(q_j, c_{mj}^{(\mu-1)})\right]$

23 : if $\left|c_{mj}^{(\mu)} - c_{mj}^{(\mu-1)}\right| \geqslant \varepsilon_c$ then go to 21;

24 : $\Delta\dot{m}_j = \pi h\left[(\varrho\tilde{v}c_m\sin\varepsilon r)_{j-1} + (\varrho\tilde{v}c_m\sin\varepsilon r)_j^{(\mu)}\right]$

30 : if $j < jk$ then go to 20;

40 : if $\left|\dot{m} - \left(\sum_{1}^{jk}\Delta\dot{m}_j\right)^{(\vartheta)}\right| \geqslant \varepsilon_m$ then go to 10;

Analizując obydwie procedury stwierdzić można, że występują tu dwa poziomy iteracji, które mimo małych wartości kryteriów zakończenia procesu iteracyjnego (ε_c, ε_m, ε_H), pogarszają stabilność procesu obliczeniowego.

4. Wprowadzenie funkcji prądu

W bezźródłowym, ustalonym i osiowo-symetrycznym przepływie płynu nieściśliwego można wprowadzić funkcję ψ (m,n) zwaną funkcją prądu, która określona jest następującymi związkami:

$$\frac{\partial\psi}{\partial n} = r\varrho\tilde{v}c_m \tag{23}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial m} = 0, \tag{24}$$

spełniającymi tożsamościowo równanie ciągłości. Wartość funkcji ψ jest stała na każdej obrotowej powierzchni prądu, natomiast różnica funkcji

prądu w dwu dowolnych punktach określa strumień masy płynu przepływającego między dwiema osiowo-symetrycznymi powierzchniami prądu, na których leżą te dwa punkty.

Przyporządkowanie wartości funkcji prądu poszczególnym merydionalnym liniom prądu leżącym na odpowiednich obrotowych powierzchniach prądu przebiega według wzoru:

$$\psi = \frac{\dot{m}_j}{2\pi} = \int_0^{n_j} r\varrho\bar{v}c_m dn, \tag{25}$$

gdzie:

$\dot{m}_j$ - strumień masy płynu przepływającego przez pierścieniowy kanał ograniczony piastą i dowolną j-tą linią prądu.

Stosując formułę (5) można przejść do układu współrzędnych quasi-ortogonalnych

$$\frac{\partial\psi}{\partial n} = \frac{1}{\sin(\mu - \gamma)} \frac{\partial\psi}{\partial q} \tag{26}$$

oraz na podstawie (23), określić prędkość merydionalną

$$c_m = \frac{1}{r\varrho\bar{v}\sin(\mu - \gamma)} \frac{\partial\psi}{\partial q} \tag{27}$$

Niezbędne jest także wyznaczenie pochodnej prędkości merydionalnej

$$\frac{\partial c_m}{\partial q} = \frac{1}{r\varrho\bar{v}\sin(\mu - \gamma)} \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial q^2} - \frac{\partial \ln r\varrho\bar{v}\sin(\mu - \gamma)}{\partial q} \frac{\partial\psi}{\partial q}\right) \tag{28}$$

Wykorzystując teraz powyższe związki (27) i (28) przy przekształceniu równania (7), otrzymuje się następującą postać równania osiowo-symetrycznego przepływu w maszynach wirnikowych:

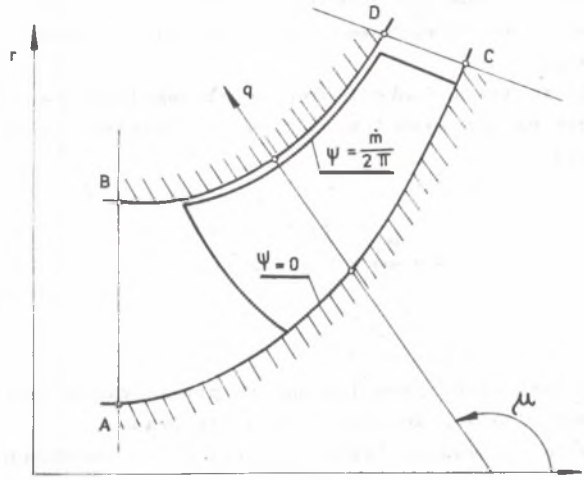
$$\frac{\partial^2\psi}{\partial q^2} + P(q, m) \frac{\partial\psi}{\partial q} + Q(q, m) = 0, \tag{29}$$

gdzie:

$$P(q, m) = A(q, m) - \frac{\partial \ln(r\varrho\bar{v}\sin\varepsilon)}{\partial q}$$

$$Q(q, m) = r\varrho\bar{v}\sin\varepsilon \left[B(q, m) + \frac{C(q, m)}{c_m}\right]$$

$$\varepsilon = \mu - \gamma$$



Rys. 4

Zagadnienie rozwiązania powyższego równania dla przypadku analizy przepływu, tzn. gdy znana jest geometria układu przepływowego stawiane jest przy następujących warunkach brzegowych (rys. 4):

- powierzchnia AC jest powierzchnią prądu o wartości funkcji prądu $\psi = 0$,
- powierzchnia BD jest powierzchnią prądu o wartości funkcji prądu $\psi = \dot{m}/2\pi$ (lub w wartościach względnych $\psi = 1$),
- wzdłuż brzegu AB znane są wszystkie parametry przepływu,
- wzdłuż brzegu CD zadany jest rozkład kątów nachylenia linii prądu δ.

5. Procedura obliczeń numerycznych

Podobnie jak w przypadku równań (6) i (7), również i tu numeryczne rozwiązanie równania (29) uzyskuje się przez dekompozycję zagadnienia, prowadzącą do układu równań różniczkowych zwyczajnych o postaci:

$$\frac{d^2\psi}{dq^2} + P(q)\,\frac{d\psi}{dq} + Q(q) = 0, \tag{30}$$

gdzie wyrażenia P i Q są już tylko funkcjami współrzędnej quasi-ortogonalnej.

Powyższe równanie wraz z warunkami brzegowymi tworzy w poszczególnych przekrojach dwupunktowe zagadnienie brzegowe.

W procesie obliczeniowym jest ono wielokrotnie rozwiązywane, stąd też efektywność procedury jego rozwiązywania, podobnie jak poprzednio równania

(16), determinuje efektywność obliczeń pola parametrów w całym analizowanym obszarze.

Spośród metod rozwiązywania zagadnień brzegowych dla równań różniczkowych typu (30) bardzo ekonomiczną i wygodną jest, tzw. metoda "przeganiania" [11] wykorzystująca specjalne własności macierzy trójdiagonalnych. Istota metody polega na tym, że dla równań różniczkowych rzędu drugiego po zastąpieniu pochodnych ilorazami różnicowymi

$$y' = \frac{1}{2h}\left(y_{j+1} - y_{j-1}\right) \tag{31}$$

$$y'' = \frac{1}{h^2}\left(y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1}\right), \tag{32}$$

otrzymuje się trójczłonowy układ równań algebraicznych, z których każde równanie zawiera trzy sąsiednie niewiadome.

Ze względu na to, że odległości pomiędzy poszczególnymi liniami prądu są różne

$$h_j = q_j - q_{j-1} \tag{33}$$

$$h_{j+1} = q_{j+1} - q_j, \tag{34}$$

stąd więc należy zastosować odpowiednie do tego wyrażenia różnicowe

$$y'_j = -y_{j-1}\frac{h_{j+1}}{h_j(h_j + h_{j+1})} + y_j\frac{h_j - h_{j+1}}{h_j\,h_{j+1}} + y_{j+1}\frac{h_j}{(h_j + h_{j+1})h_{j+1}} \tag{35}$$

$$y''_j = 2\left[\frac{y_{j-1}}{h_j(h_j + h_{j+1})} - \frac{y_j}{h_j\,h_{j+1}} + \frac{y_{j+1}}{(h_j + h_{j+1})h_{j+1}}\right], \tag{36}$$

gdzie y_{j-1}, y_j, y_{j+1} są wartościami funkcji w poszczególnych węzłach.

Dokonując dyskretyzacji równania (30) zgodnie z powyższymi formułami, po przekształceniach uzyskuje się układ równań różnicowych postaci:

$$\varphi_{j-1}a_j + \varphi_j b_j + \varphi_{j+1}c_j = g_j \tag{37}$$

z warunkami brzegowymi

$$\varphi_o = 0; \quad \varphi_{jk} = \frac{\dot{m}}{2\pi}, \tag{38}$$

gdzie:

$$a_j = \frac{2 - P_j h_{j+1}}{h_j(h_j + h_{j+1})} \tag{37.1}$$

$$b_j = \frac{P_j(h_j - h_{j+1}) - 2}{h_j h_{j+1}} \tag{37.2}$$

$$c_j = \frac{2 + P_j h_j}{(h_j + h_{j+1})h_{j+1}} \tag{37.3}$$

$$g_j = -Q_j. \tag{37.4}$$

Rozwiązania układu równań poszukuje się w postaci

$$\varphi_{j-1} = R_{j-1}\varphi_j + S_{j-1}, \tag{39}$$

gdzie: współczynniki R_j, S_j określone z równań (37) i (39), oblicza się z następujących rekurencyjnych wzorów

$$R_j = \frac{-c_j}{a_j R_{j-1} + b_j}, \tag{40}$$

$$S_j = \frac{g_j - a_j S_{j-1}}{a_j R_{j-1} + b_j}, \tag{41}$$

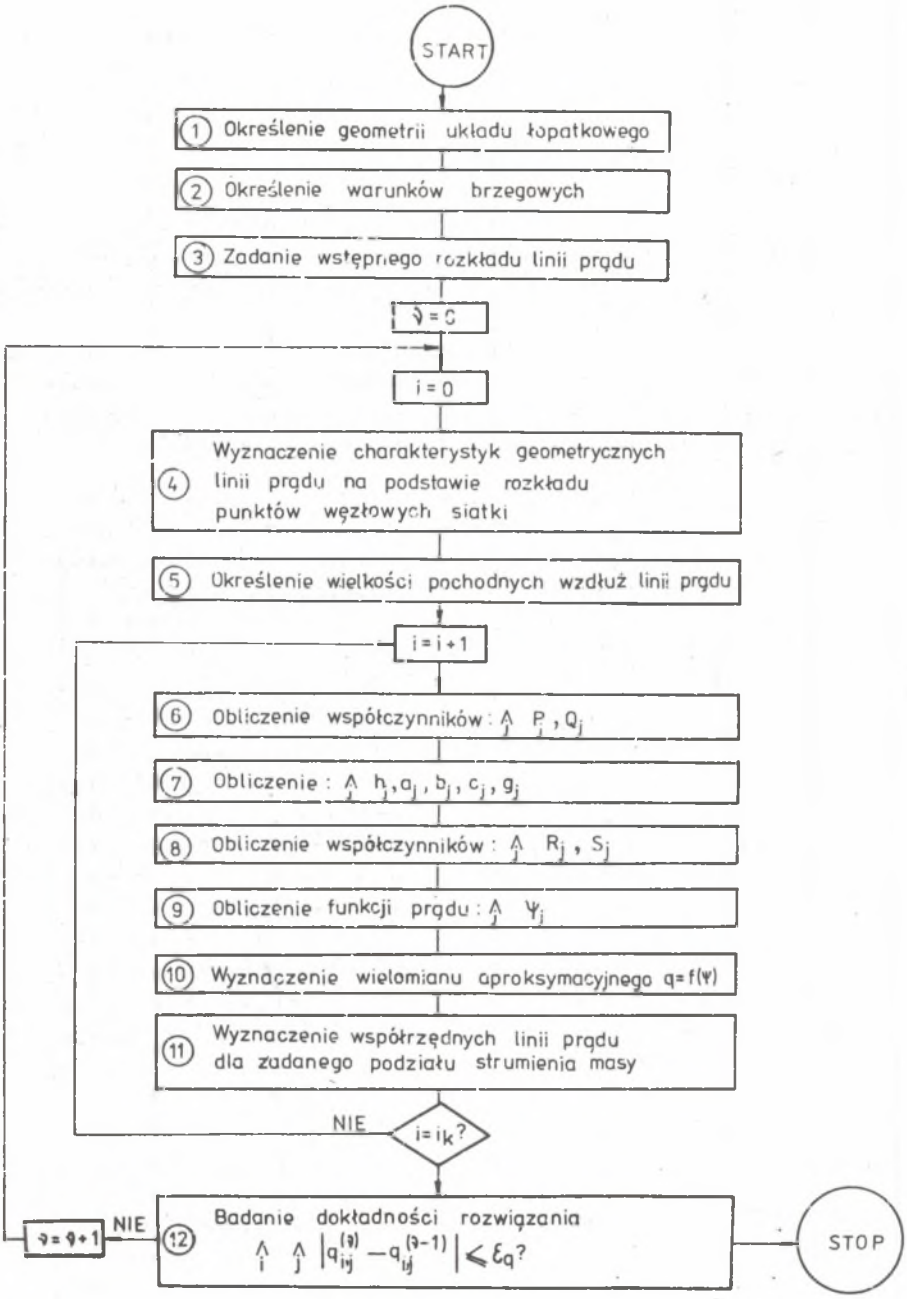
przy czym z warunków brzegowych wynika, że

$$R_o = 0, \quad S_o = 0. \tag{42}$$

Otrzymując rozwiązanie należy teraz uwzględnić fakt, że w ogólnym przypadku położenie węzłów siatki nie będzie adekwatne do wyznaczonego rozkładu funkcji prądu. Aby więc to skorygować należy obliczyć nowe współrzędne położenia linii prądu w oparciu o uzyskane rozwiązanie. Współrzędne punktów węzłowych wyznaczyć można posługując się metodami aproksymacji (interpolacji). Na podstawie wartości funkcji prądu φ_j (dla $j = 0 - jk$) w punktach o współrzędnych q_j określić można wielomian aproksymacyjny (interpolacyjny)

$$q = \sum_n a_n \varphi^n, \tag{43}$$

z którego łatwo oblicza się położenie współrzędnych linii prądu q_j dla $j = 1,2,3,\ldots,jk-1$.


START
1 Określenie geometrii układu łopatkowego
2 Określenie warunków brzegowych
3 Zadanie wstępnego rozkładu linii prądu
ϑ = 0
i = 0
4 Wyznaczenie charakterystyk geometrycznych linii prądu na podstawie rozkładu punktów węzłowych siatki
5 Określenie wielkości pochodnych wzdłuż linii prądu
i = i + 1
6 Obliczenie współczynników: ∧j Pj, Qj
7 Obliczenie: ∧j hj, aj, bj, cj, gj
8 Obliczenie współczynników: ∧j Rj, Sj
9 Obliczenie funkcji prądu: ∧j Ψj
10 Wyznaczenie wielomianu aproksymacyjnego q = f(Ψ)
11 Wyznaczenie współrzędnych linii prądu dla zadanego podziału strumienia masy
i = ik?
NIE
12 Badanie dokładności rozwiązania
∧i ∧j |q_ij^(ϑ) − q_ij^(ϑ−1)| ≤ εq?
NIE
ϑ = ϑ + 1
STOP

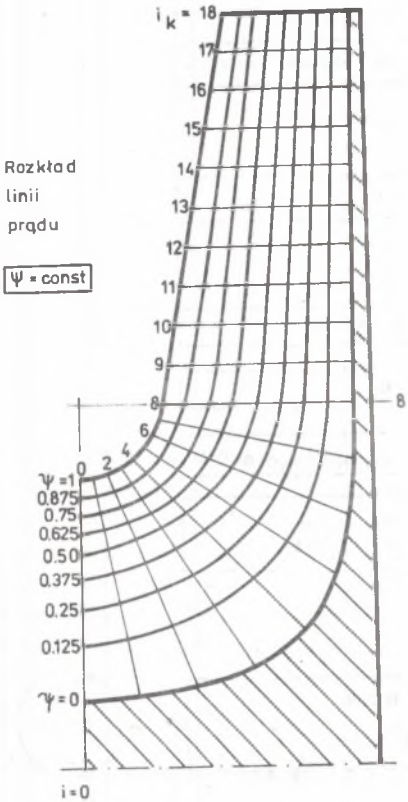
Rys. 5

Przebieg obliczeń analizy przepływu osiowo-symetrycznego w całym obszarze ilustruje przedstawiona na rys. 5 sieć działań.
Realizację punktu czwartego przytoczonego algorytmu opisano m.in. w pracy [12].

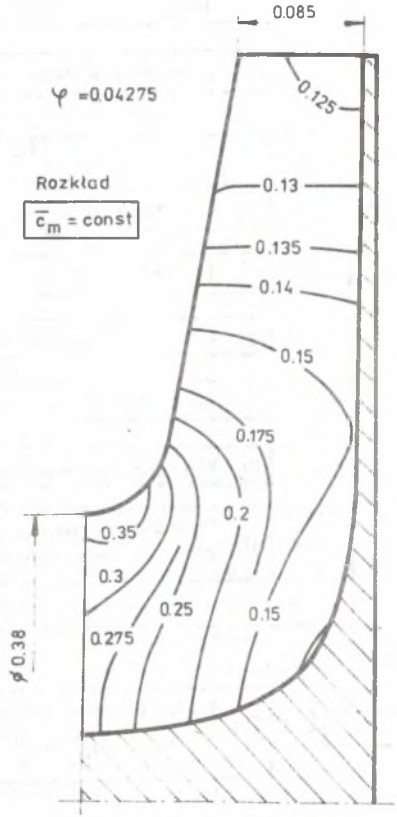
6. Przykład obliczeniowy. Uwagi końcowe

Jako przykład obliczeniowy obrano analizę przypływu w kanale bezłopatkowym wirnika sprężarki promieniowej. Uzyskane tutaj wyniki stanowią podstawę do dalszych obliczeń projektowych palisady łopatek. Prezentowano wyniki dotyczą liczby wydajności $\varphi = 0{,}04275$.

Na rys. 6 przedstawiono rozkład merydionalnych linii prądu ψ = const. Widocznym jest tu, że linie quasi-ortogonalne o numerach 0-8 zbiegają się w jednym punkcie, co znacznie ułatwia realizację obliczeń. Pozostałe quasi-ortogonalne przebiegają równolegle do kierunku osi obrotu.



Rys. 6



Rys. 7

Na rys. 7 wykreślono linie stałych wartości prędkości merydionalnych c_m (izotachy). Prędkości odniesiono do prędkości obwodowej u_2. Widocznym jest tu znany fakt wzrostu gradientów prędkości w obrębie zaokrąglenia tarczy nakrywającej w strefie wlotowej.

Proponowany algorytm obliczeń w porównaniu z procedurami opisanymi w rozdz. 3, wykazuje szereg zalet. Przede wszystkim zbędne są tu iteracje, które występowały przy całkowaniu równania (16) i wydłużały czas obliczeń Poprawia się dokładność uzyskanego rozwiązania, co w konsekwencji prowadzi do poprawy stabilności obliczeń przepływu w całym obszarze. Sama metoda przeganiania charakteryzuje się stabilnym algorytmem rachunkowym, gdzie błędy zaokrąglenia nie wzrastają. Jest też prosta do zaprogramowania na maszynie cyfrowej. Przedstawiona procedura obliczeń stanowi więc dalsze udoskonalenie metody krzywizny linii prądu.

Ważniejsze oznaczenia

A, B, C - wyrażenia funkcyjne (równanie (2), (7), (15))
a, b, c - współczynniki równania różnicowego (37)
c_m - prędkość merydionalna
h - krok całkowania; odległość między liniami prądu
$\overset{*}{h}$ - rotalpia całkowita
i - numer linii quasi-ortogonalnej
j - numer linii prądu
jk - numer końcowej linii prądu
$\dot{m}$ - strumień masy całkowity
$\Delta\dot{m}$ - elementarny strumień masy
m, n - ortogonalny układ współrzędnych naturalnych
m, q - układ współrzędnych quasi-ortogonalnej
m, s - układ współrzędnych krzywoliniowych nieortogonalnych
P, Q - wyrażenia funkcyjne (równanie (29), (30))
q - współrzędna quasi-ortogonalna
r, z - współrzędne układu cylindrycznego
r_k - promień krzywizny merydionalnej linii prądu
R, S - współczynniki wzorów rekurencyjnych (40), (41)
u - prędkość obwodowa
w - prędkość względna
β - kąt położenia wektora prędkości względnej w płaszczyźnie stycznej do powierzchni prądu
β_p - kąt łopatkowy (na powierzczni r = const)
γ - kąt nachylenia merydionalnej linii prądu do osi z
δ - kąt nachylenia łopatki do kierunku promieniowego
ε - kąt pomiędzy prostą quasi-ortogonalną a linią pradu (równanie (7))
ε - kryteria zakończenia procesu iteracyjnego

τ - współczynnik zwężenia przekroju przepływowego

ξ - współczynnik strat przepływu

μ, γ - ( ) numery kolejnych iteracji

ϱ - gęstość czynnika

ψ - funkcja prądu.

LITERATURA

[1] Otte J.J.: Przegląd krytyczny metod analizy osiowo-symetrycznego przepływu przez układy łopatkowe maszyn wirnikowych. Mechanika Teoretyczna i Stosowana 1, 18 (1980).

[2] Otte J.J.: Porównanie metod analizy osiowo-symetrycznego przepływu płynu przez układy łopatkowe maszyn wirnikowych wykorzystujących ogólny model przepływu w zakresie prędkości poduźwiękowych. ZN Politechniki Śląskiej. Energetyka z. 73 (1980).

[3] Otte J.J.: Równania przepływu płynu nieściśliwego w kanałach łopatkowych maszyn wirnikowych. ZN Politechniki Śląskiej. Energetyka z.53 (1975).

[4] Hamrick J.T., Ginsburg A., Osborn W.M.: Method of Analysis for Compressible Flow Through Mixed-Flow Centrifugal Impellers of Arbitrary Design. NACA Report No. 1082, 1952.

[5] Traupel W.: Theorie der Strömung durch Radialmaschinen. Karlsruhe 1962. Verlag G. Braun.

[6] Witkowski A.: Analiza przepływu w kanałach łopatkowych osiowego wieńca sprężającego z merydionalnym przyspieszeniem strumienia. Praca doktorska, Gliwice 1971.

[7] Katsanis T.: Use of Arbitrary Quasi-Orthogonals for Calculating Flow Distribution in a Turbomachine. Trans. ASME, Journal of Engineering for Power Nr 2 (1966).

[8] Senoo Y., Nakase Y.: An Analysis of Flow Through a Mixed Flow Impeller. Trans. ASME, ser. A. Nr 1 (1972).

[9] Witkowski A.: Zastosowanie quasi-ortogonalnych współrzędnych do obliczeń przepływu w wieńcach sprężających o przestrzennie ukształtowanych kanałach międzyłopatkowych. ZN Politechniki Śląskiej nr 372, Energetyka z. 47 (1973).

[10] Michlin S.G., Smolicki C.L.: Metody przybliżone rozwiązywania równań różniczkowych i całkowych. PWN, Warszawa 1970.

[11] Demidowicz B.P., Maron J.A., Szuwałowa E.Z.: Metody numeryczne, cz. II. PWN, Warszawa 1965.

[12] Otte J.J.: Method of Analysis of Axial-Symmetric Flow in Blade Chanels of Turbines. Prace Instytutu Maszyn Przepływowych z. 70-72, 1976.

Recenzent: doc. dr inż. Jerzy Roszkowski

РАСЧЕТНЫЕ ПРОЦЕДУРЫ МЕТОДА КРИВИЗНЫ ЛИНИИ ТОКА

Р е з ю м е

В работе представлено решающие факторы эффективности процедур интегрирования по методу кривизны линий тока. Благодаря введению понятия функции тока, вопрос решения уравнения течения с осевой симетрией сведено к решению краевой проблемы. Расчётные процедуры основанно на очень эффективном методе "выгонянния". Дано примерные результаты расчётов.

COMPUTATIONAL PROCEDURES FOR THE METHOD
OF THE STREAM LINE CURVATURE

S u m m a r y

Effectiveness of integration procedures in the method of stream line curvature is considered. The stream function concept transforms the problem of the axial symmetric flow equation solving into boundary problem solving. Continuation in shooting method is used in the procedure and results of computation examples are given.