

Joachim J. OTTE, Andrzej SZAFRANIEC,
Andrzej MISIEWICZ

ANALIZA PORÓWNAWCZA NUMERYCZNYCH METOD ROZWIĄZYWANIA OPŁYWU PALISADY PROFILI SPRĘŻAJĄCYCH

Streszczenie. W pracy dokonano porównania trzech metod (metody odwzorowań konforemnych, metody funkcji prądu zrealizowanych na bazie siatki prostokątnej i krzywoliniowej) stosowanych w Zespole Ciepłych Maszyn Wirnikowych IMiUE do rozwiązywania opływu palisady profili. Podano krótką charakterystykę poszczególnych metod. Przedstawiono przykłady obliczeniowe.

1. Wstęp

Do podstawowych metod analizy i syntezy przepływu w maszynach wirnikowych należy metoda obliczania opływu prostoliniowej palisady profili. Zagadnienie to posiada bardzo bogatą literaturę i w zakresie przepływów do-dźwiękowych można je już zaliczyć do rzędu zagadnień klasycznych. W odniesieniu do dokonań ośrodków zagranicznych można odnotować tu pewne opóźnienia w podjęciu tej tematyki przez instytuty krajowe.

Ośrodek gliwicki jako jeden z pierwszych podjął problematykę kompleksowego opracowania metod numerycznego i analogowego modelowania przepływu przez palisady profili. I tak w latach siedemdziesiątych opracowano w postaci osobnych programów na maszynę cyfrową ODRA-1305 następujące metody analizy przepływu w palisadzie profili (w nawiasie podano pozycje literaturowe, w których dana metoda została bądź opisana, bądź też wykorzystana):

- metoda odwzorowania konforemnego ([1], [6], [12]),
- metoda funkcji prądu na bazie siatki prostokątnej według Katsanisa ([2], [3]),
- metoda funkcji prądu na bazie siatki krzywoliniowej ([4], [5], [6], [7]).

Wyszczególnione metody są na bieżąco wykorzystywane w pracach badawczych Zespołu Ciepłych Maszyn Wirnikowych Instytutu Maszyn i Urządzeń Energetycznych Politechniki Śląskiej. W niniejszym artykule dokonano oceny tych metod z różnych punktów widzenia. Przedstawione przykłady obliczeniowe dotyczą płaskiego przepływu płynu nieściśliwego.

2. Metoda odwzorowań konforemnych

Koncepcja metody po raz pierwszy została opublikowana w 1950 r. przez Samojułowicza [10], stąd jej nazwa; metoda Samojułowicza. W [12] została ona rozszerzona i szczególnie przeanalizowana. Na tej bazie opracowano algorytmy obliczeń płaskich palisad prostoliniowych a później również i kołowych. W [3] posłużono się również koncepcją Samojułowicza, ale praktyczna realizacja tej koncepcji w obu przypadkach jest różna.

Jak wszystkie metody odwzorowań, należy ona do metod analitycznych, co stanowi jedną z jej zalet. Rozpatruje się w niej przepływ przez płaską palisadę prostoliniową o zadanej geometrii oraz zadanych warunkach napływu (v_1). Zakłada się płyn nielepki i nieściśliwy. Metoda pozwala znaleźć prędkość za palisadą (v_2) w oparciu o dowolne kryterium spływu z profilu, np. warunek Żukowskiego. Niżej przedstawiono jedynie ogólny opis metody, odsyłając czytelnika do pracy [10] i [12].

Poszukuje się funkcji odwzorowującej zadaną palisadę profilów na palisadę walców jednostkowych (rys. 1). Funkcję taką $F(z)$ można znaleźć, jeżeli znana jest z kolei funkcja $f(z)$ odwzorowująca pojedynczy profil na pojedynczy okrąg.

Tok wyznaczania funkcji $f(z)$ szczególnie przedstawiono w [9] w oparciu o pracę Nużina. Na tej bazie zbudowano algorytm wyznaczający liczby c_{-n} funkcji $f(z)$

$$f(z) = c_1 z + c_0 + \sum_1^{\infty} \frac{c_{-n}}{z^n} \quad (1)$$

gdzie:

c_0, c_{-n} - stałe zespolone,
 c_1 - stała rzeczywista.

Zgodnie z [10] funkcji $F(z)$ poszukuje się w postaci

$$F(z) = az + \lambda \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} a_{-(n+1)} \frac{d^n}{dz^n} \operatorname{cth}(\lambda z), \quad (2)$$

gdzie:

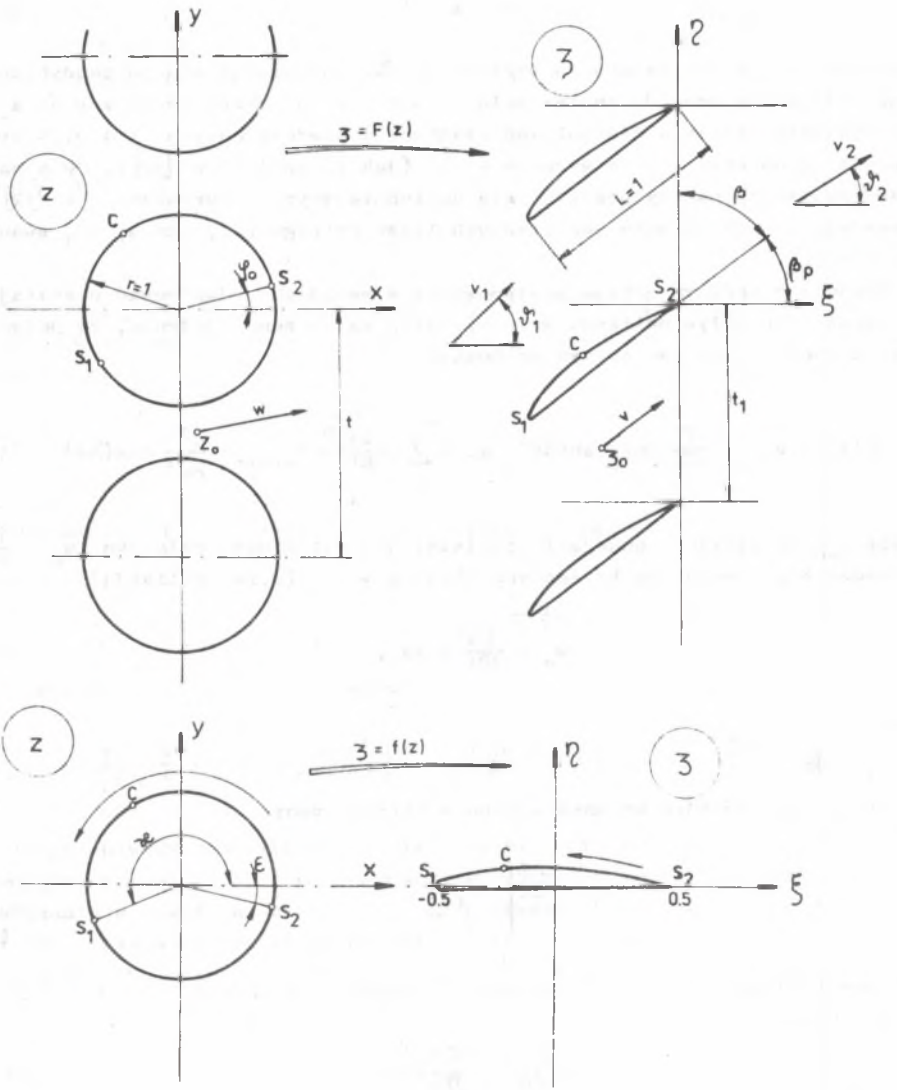
$$\lambda = \frac{2l}{t}$$

a, a_{-n} - stałe zespolone,
 $l = 1$ - długość cięciwy.

Zadanie polega na określeniu λ oraz stałych a, a_{-n} .

Liczby a, a_{-n} wyznacza się z formuły typu

$$a_{-n} = c_{-n} + \lambda^4 F_{4,n} + \lambda^6 F_{6,n} + \lambda^8 F_{8,n} + \dots \quad (3)$$



Rys. 1. Ilustracja przekształceń w metodzie odwzorowań konforemnych

Współczynniki $F_{4,n}$, $F_{6,n}$ itd. są zależne jedynie od liczb c_{-n} . Wzory określające je zostały częściowo wyprowadzone w [10] oraz w [12] w znaczenie rozszerzonym zakresie.

Nieznaną początkowo podziałkę $t(\lambda = \frac{\lambda^2}{t})$ wyznacza się z warunku (zasada zachowania strumienia),

$$iat = t_1 e^{i\beta}$$

lub

$$ia\lambda_1 = \lambda_0 e^{i\beta}. \quad (4)$$

Równanie (4) jest uwikłane ze względu na λ . Rozwiązuje się je zmodyfikowaną metodą Newtona. Po znalezieniu λ można z (3) określić liczby a , a_{-n} . Jak wykazała praktyka dla palisad rzadkich i średniogęstych $t > 0,75$ wystarczy ograniczyć się do wyrazów z λ^6 (jak to robiono w [10]). Dla palisad gęstszych należy posłużyć się dokładniejszymi formułami z [12], zwłaszcza dla określenia początkowych liczb szeregu (2), tzn. a , a_{-1} ewentualnie a_{-2} .

Zgodnie z ogólnym tokiem postępowania w metodach odwzorowań pozostaje do określenia opływ palisady walców. Tutaj zaznaczono jedynie, że potencjał zespolony takiego opływu ma postać

$$\phi(z) = w_0 z + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln\left(\frac{1}{\lambda} \operatorname{sh}(\lambda z)\right) + \lambda \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} A_{-(n+1)} \frac{d^n}{dz^n} \operatorname{ctg}(\lambda z) \quad (5)$$

Stałe A_{-n} są jedynie funkcjami podziałki λ , natomiast składowe w_0 , $\frac{\Gamma}{2\pi i}$ wyznacza się z warunków brzegowych. Dla $z \rightarrow \infty$ (przed palisadą)

$$w_0 + \frac{\lambda \Gamma}{2\pi i} = \bar{a} v_1, \quad (6)$$

gdzie:

$$v_1 = |v_1| e^{i\varphi_1}.$$

Wykorzystując ponadto warunek spływu w ostrzu, mamy

$$\left. \frac{d\phi}{dz} \right|_{z=e^{i\varphi_0}} = 0 \quad (7)$$

Z elementarnych własności odwzorowania, prędkość w dowolnym punkcie palisady wynosi

$$v(\xi_0) = \frac{w(z_0)}{\left. \frac{dF}{dz} \right|_{z=z_0}} \quad (8)$$

W ten sposób można otrzymać prędkość i ciśnienie w dowolnym punkcie palisady.

3. Metoda funkcji prądu

Rozpatrując bezrórdłowy przepływ płynu w strudze o zmiennej grubości $b = b(m)$ w układzie współrzędnych (φ, m) określonych na powierzchni obrotowej, gdzie φ - współrzędna obwodowa, m - współrzędna wzdłuż merydionalnej linii prądu, można zdefiniować funkcję prądu $\psi = \psi(m, \varphi)$ następującymi związkami:

$$\frac{\partial \psi}{\partial m} = b \varrho w_u, \quad (9)$$

$$\frac{\partial \psi}{r \partial \varphi} = -b \varrho w_m. \quad (10)$$

Uwzględniając powyższe zależności w dalszych przekształceniach dwu podstawowych równań opisujących opływ palisady profili, a mianowicie równania ciągłości

$$\frac{\partial(b \varrho w_u)}{\partial \varphi} + \frac{\partial(b \varrho w_m)}{\partial m} = 0 \quad (11)$$

oraz warunku bezwzględności przepływu bezwzględnego

$$\frac{\partial(w_u + u)}{\partial m} = \frac{\partial w_m}{r \partial \varphi}, \quad (12)$$

uzyskuje się ostatecznie równanie

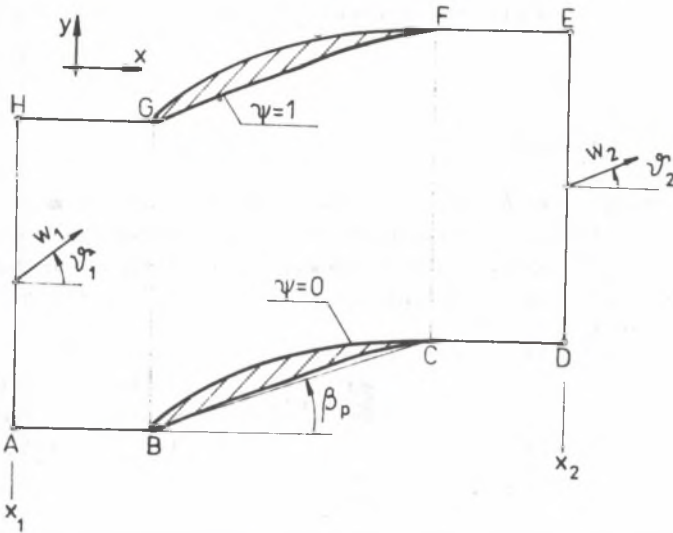
$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial m^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \ln \varrho}{\partial \varphi} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} + \left(\frac{\partial \ln r}{\partial m} - \frac{\partial \ln b \varrho}{\partial m} \right) \frac{\partial \psi}{\partial m} = -2b \varrho w \sin \alpha. \quad (13)$$

Dla przepływów poddźwiękowych równanie to jest typu eliptycznego. Występująca tu nieliniowość zagadnienia uwarunkowana jest ściśliwością płynu. Równanie w powyższej postaci po raz pierwszy sformułował Stanitz [11].

Dla przypadku płaskiego przepływu płynu nieściśliwego, a więc przy założeniu $\varrho = \text{const}$, $b = \text{const}$, $\frac{\partial r}{\partial m} = 0$, dochodzi się do równania Laplace'a

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0, \quad (14)$$

gdzie: $dx = dm$, $dy = r d\varphi$.



Rys. 2. Obszar analizy przepływu przez palisadę profili w metodzie funkcji prądu

Zagadnienie opływu palisady profili rozwiązuje się w wyszczególnionym obszarze Ω palisady (wyznaczonym przez punkty A-B-C-D-E-F-G-H) (rys. 2) przy niżej podanych warunkach brzegowych:

- linia BC i GF na profilu są liniami prądu, pomiędzy którymi przepływa całkowity strumień masy, stąd też przyjmuje się, że na linii BC jest $\psi = 0$, na linii GF zaś $\psi = 1$,
- daleko przed palisadą przy $x = x_1$ (teoretycznie w nieskończoności) zadaje się tzw. pochodną skośną,

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} \cos \vartheta_1 + \frac{\partial \psi}{\partial y} \sin \vartheta_1 = 0, \quad (14)$$

tzn. zadaje się kąt nachylenia linii prądu ϑ_1 .

Najczęściej zakłada się, że linia brzegowa AH, leży wystarczająco daleko od wlotu do kanału tak, że przepływ można tam traktować jako jednorodny. Położenie linii AH należałoby w zasadzie ustalić w każdym przypadku drogą kolejnych obliczeń. Praktycznie przyjmuje się ją w odległości $(0.5 - 1)t$ od frontu palisady. Przy założeniu na linii AH jednorodności przepływu można pochodną $\partial \psi / \partial y$ określić bezpośrednio z warunków brzegowych jako

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\psi_H - \psi_A}{t} = \frac{1}{t}, \quad (15)$$

gdzie: t jest podziałką palisady.

- za palisadą (przy $x = x_2$) przyjmuje się warunki tego samego typu, co przed palisadą, a więc zadaje się warunek

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} \cos \vartheta_2 + \frac{\partial \psi}{\partial y} \sin \vartheta_2 = 0, \quad (16)$$

równoważny przyjęciu kąta wylotowego strugi ϑ_2 . Odnośnie usytuowania linii DE obowiązują tu te same uwagi, co poprzednio w stosunku do linii AI.

Można tu także wyznaczyć wartość pochodnej

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\psi_E - \psi_D}{t} = \frac{1}{t}, \quad (17)$$

- wzdłuż linii AB, CD, EF i GH musi być spełniony warunek okresowości przepływu, co sprowadza się do tego, że wartość funkcji prądu wzdłuż linii HG i FE jest dokładnie o jedność większa niż odpowiednio wzdłuż linii AB i CD,
- warunkiem zamykającym zagadnienie i stanowiącym o jednoznaczności opływu palisady, jest tzw. postulat Kutty-Zukowskiego o spływie w ostrzu profilu, który praktycznie sprowadza się do żądania równości prędkości względnych po obu stronach krawędzi spływu.

$$|w_+| = |w_-|. \quad (18)$$

3.1. Realizacja metody na bazie siatki prostokątnej

Problem rozwiązania przedstawionego wyżej zagadnienia analizy przepływu przez palisadę profili na drodze obliczeń numerycznych stanowi temat szeregu prac Katsanisa. Między innymi w pracy [2] został podany program obliczeń w języku FORTRAN wraz z opisem. Program ten z niemałym trudem został zaadaptowany i przystosowany do realizacji na maszynie ODRA-1305.

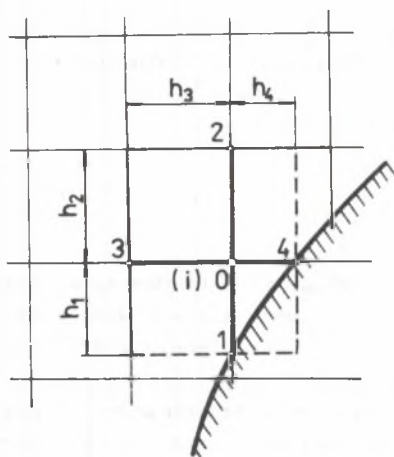
W procedurze obliczeniowej wykorzystano tu metodę różnic skończonych, która z kolei skonstruowana jest w oparciu o siatkę prostokątną o nierównomiernym podziale (rys. 3). Pozostając w obrębie przepływu płaskiego można dla przykładu podać analog różnicowy równania (14). Przyjmuje on następującą postać:

$$\frac{\psi_1}{h_1(h_1+h_2)} + \frac{\psi_2}{h_2(h_1+h_2)} - \frac{\psi_0}{h_1 h_2} + \frac{\psi_3}{h_3(h_3+h_4)} + \frac{\psi_4}{h_4(h_3+h_4)} - \frac{\psi_0}{h_3 h_4} = 0 \quad (19)$$

Równanie to można skrótowo zapisać jako

$$\psi_i = \sum_{j=1}^4 a_{(j)i} \psi_{(j)i} \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots \quad (20)$$

czyli każdej i -tej wartości odpowiadają cztery wartości j -te dla sąsiednich punktów siatki, dla których współczynniki a są wartościami niezerowymi. Należy podkreślić, że w programie obliczeniowym stosowana jest jednowymiarowa notacja punktów węzłowych siatki.



Rys. 3. Gwiazda węzłów obliczeniowych siatki prostokątnej

Równanie (20) zapisane dla wszystkich obliczeniowych węzłów siatki daje układ równań liniowych wysokiego stopnia, mający wiele współczynników zerowych. Jego rozwiązywanie prowadzone jest iteracyjną metodą nadrelaksacji według formuły:

$$\psi_i^{(\mu+1)} = (1 - \omega)\psi_i^{(\mu)} + \omega\psi_i, \quad (21)$$

gdzie:

μ - numer iteracji,

ψ_i - wartość funkcji prądu według (20),

ω - czynnik nadrelaksacji.

Optymalna wartość czynnika nadrelaksacji ω_{opt} można oszacować równaniem:

$$\omega_{opt} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho(L)}} \quad (22)$$

gdzie: $\rho(L)$ stanowi tzw. promień spektralny macierzy iteracyjnej dla $\omega=1$. Wartość $\rho(L)$ wyznacza się za pomocą formuły

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \min_i \left(\frac{\psi_i^{(\mu+1)}}{\psi_i^{(\mu)}} \right) \leq \rho(L) \leq \lim_{\mu \rightarrow \infty} \max_i \left(\frac{\psi_i^{(\mu+1)}}{\psi_i^{(\mu)}} \right). \quad (23)$$

Praktycznie obliczenia ω_{opt} sprowadzają się do iteracyjnego wyznaczenia kolejnych maksymalnych i minimalnych wartości czynnika nadrelaksacji aż do momentu, gdy spełniona jest zależność

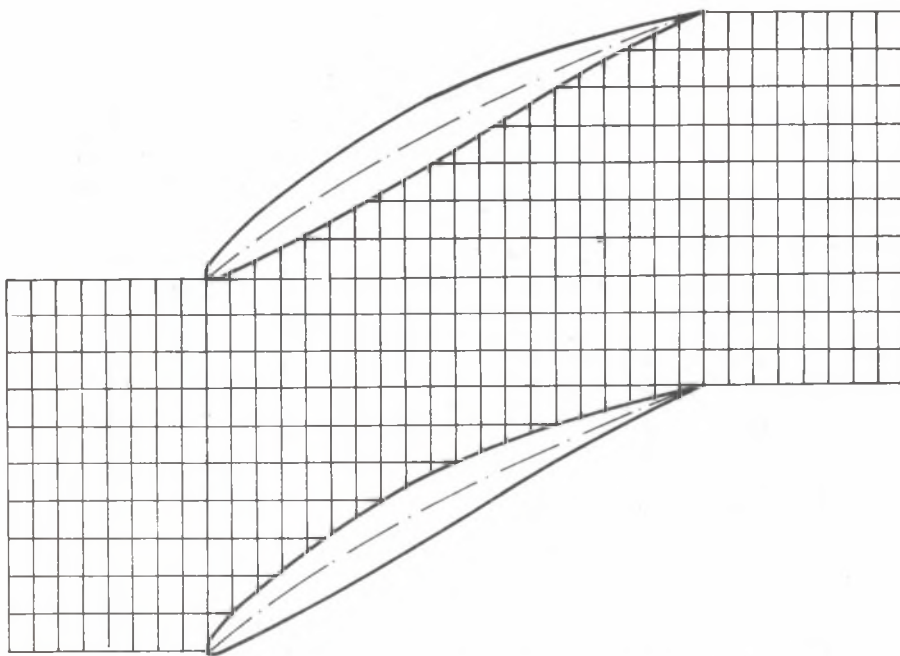
$$\left| \omega_{\max}^{(\mu+1)} - \omega_{\max}^{(\mu)} \right| < \epsilon_{\omega}, \quad (24)$$

gdzie: ϵ_{ω} stanowi ϵ -zbieżności obliczeń.

Cykl obliczeniowy według równania (21) zostaje zakończony, gdy spełniona jest relacja

$$\bigwedge_1 |\psi^{(\mu)} - \psi^{(\mu-1)}| < \varepsilon_\psi |\psi| \quad (25)$$

Zastosowana prostokątna siatka obliczeniowa pozwoliła stworzyć prosty algorytm obliczeniowy wewnątrz obszaru kanału, natomiast znaczne niedogodności pojawiają się przy rozpatrywaniu węzłów leżących w bezpośrednim sąsiedztwie brzegu profilu (rys. 4).

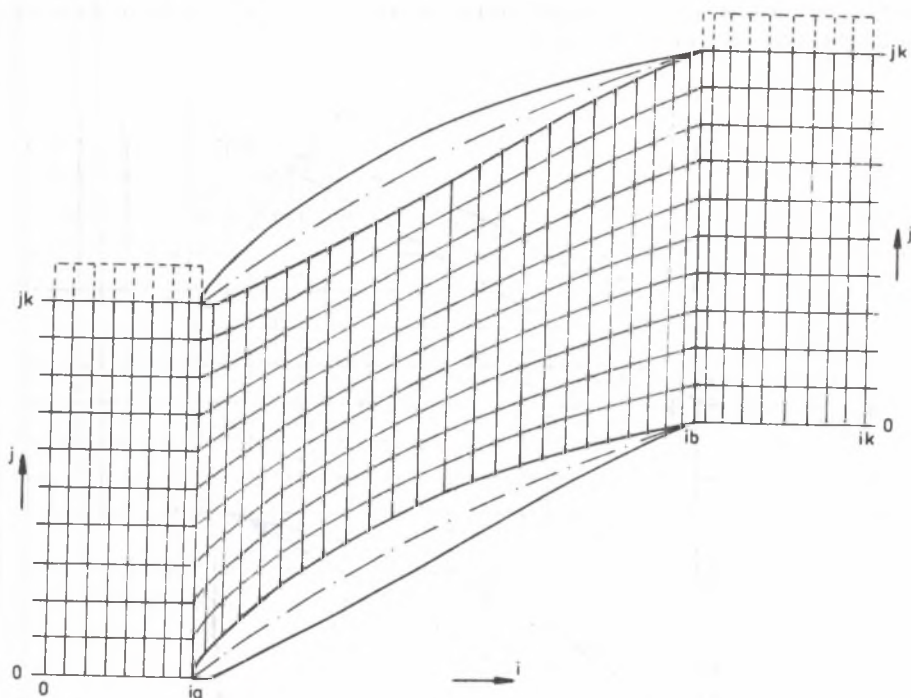


Rys. 4. Siatka obliczeniowa zastosowana w programie MFP-SP

W punktach tych niezbędnym jest indywidualne wyznaczenie wartości h_1 , h_2 , h_3 , h_4 . Stąd też wynika konieczność opisanie profilu funkcją aproksymującą umożliwiającą określenie położenia punktu na profilu i wartości pochodnych. W programie obliczeniowym jako funkcje interpolacyjną obrano funkcję sklejaną, tzw. "cubic spline fit".

3.2. Realizacja metody na bazie siatki krzywoliniowej

Główny mankament siatki prostokątnej polegający na trudnościach związanych ze sformułowaniem warunków brzegowych został tu wyeliminowany przez wprowadzenie stosunkowo ogólnej krzywoliniowej siatki punktów obliczeniowych, dokładnie dopasowanej do geometrii kanału międzyłopatkowego (rys. 5).



Rys. 5. Siatka obliczeniowa zastosowana w programie MFP-SK

Siatkę tę bardzo łatwo generuje się w programie obliczeniowym, uwzględniając jej zagęszczenie w obrębie krawędzi wlotowej i wylotowej, natomiast komplikuje ona nieco algorytm obliczeniowy. Analog różnicowy równania (14) obejmuje tutaj już nie tylko wartości dotyczące czterech punktów węzłowych, jak w siatce prostokątnej (rys. 3), lecz wartości dotyczące wszystkich ośmiu sąsiednich punktów węzłowych (rys. 6).

Aproksymację różnicową prowadzi się tu według wzorów:

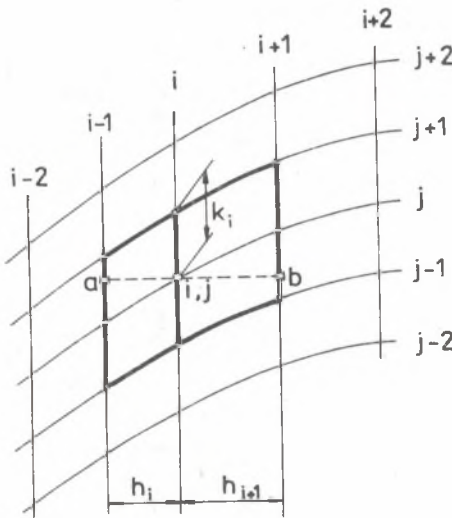
$$\left. \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right|_{i,j} = \frac{1}{k_i^2} (\psi_{i,j-1} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i,j+1}) \quad (26)$$

$$\left. \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right|_{i,j} = \frac{2}{h_i^2 p(1+p)} [p\psi_a - (1+p)\psi_{i,j} + \psi_b],$$

gdzie:

$$p = h_{i+1}/h_i.$$

Wartości wyrażeń różnicowych w punktach a i b uzyskuje się na drodze interpolacji parabolicznej.



W poprawnie wyznaczonej siatce punktów obliczeniowych powinny być spełnione następujące nierówności:

$$\psi_{i-1,j+1} > \psi_{i,j} > \psi_{i+1,j-1} \quad (27)$$

$$\psi_{i+1,j+1} > \psi_{i,j} > \psi_{i-1,j-1},$$

co uzyskuje się przez odpowiedni podział analizowanego obszaru. W rezultacie przeprowadzonej dyskretyzacji, otrzymuje się dla każdego punktu obliczeniowego równanie, które w skróconej postaci można zapisać następująco:

$$\psi_{i,j} = f(\psi_{i-1,j-1}, \psi_{i-1,j},$$

$$\psi_{i-1,j+1}, \psi_{i,j-1}, \psi_{i,j+1}, \psi_{i+1,j-1}, \psi_{i+1,j}, \psi_{i+1,j+1}) \quad (28)$$

dla $i = 0, 1, \dots, ik,$

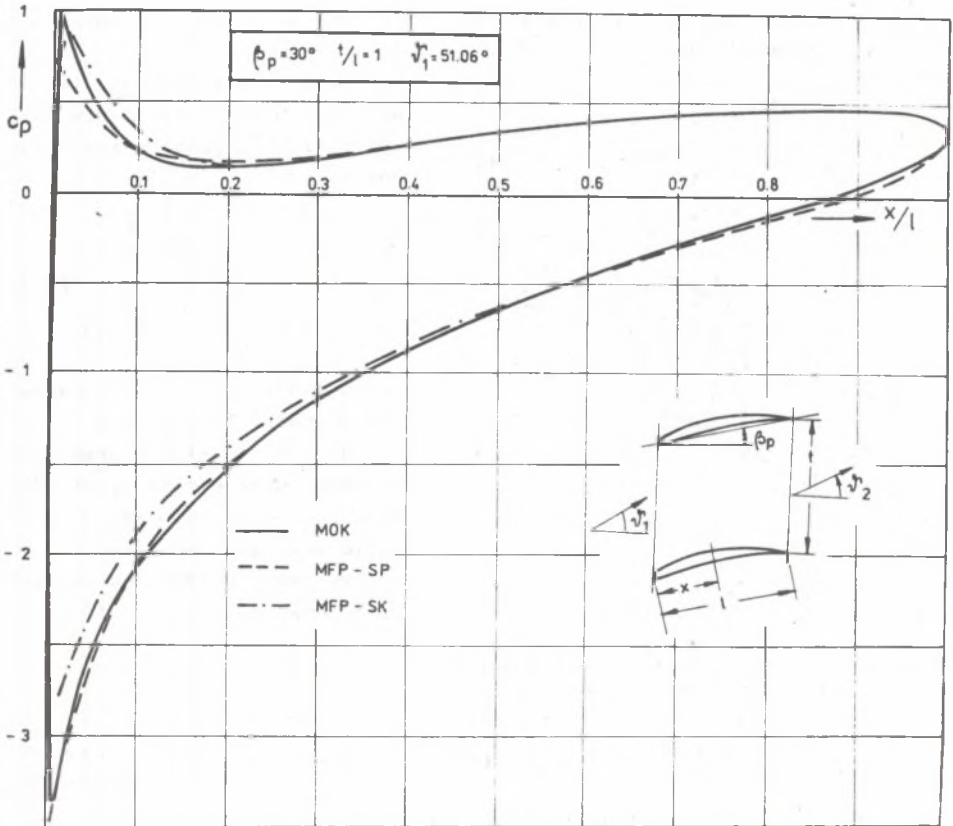
$j = 0, 1, \dots, jk.$

Rozwiązywanie układu równań liniowych (28) prowadzi się iteracyjną metodą nadrelaksacji według formuły (21), przy czym czynnik relaksacji ω określa się na drodze eksperymentu cyfrowego. Najczęściej zadaje się go z przedziału $\omega = 1,3-1,4$. Cykl obliczeniowy zostaje zakończony, gdy spełniona jest relacja (25).

4. Przykład obliczeniowy

Celem porównania przedstawionych metod, szczególnie w zakresie uzyskiwanych dokładności, przeprowadzono analizę przepływu płynu nieściśliwego w płaskiej palisadzie sprężającej o danych:

- profil wg funkcji Bondera [8],
- podziałka względna $t/l = 1$,
- kąt ustawienia $\beta_p = 30^\circ$.

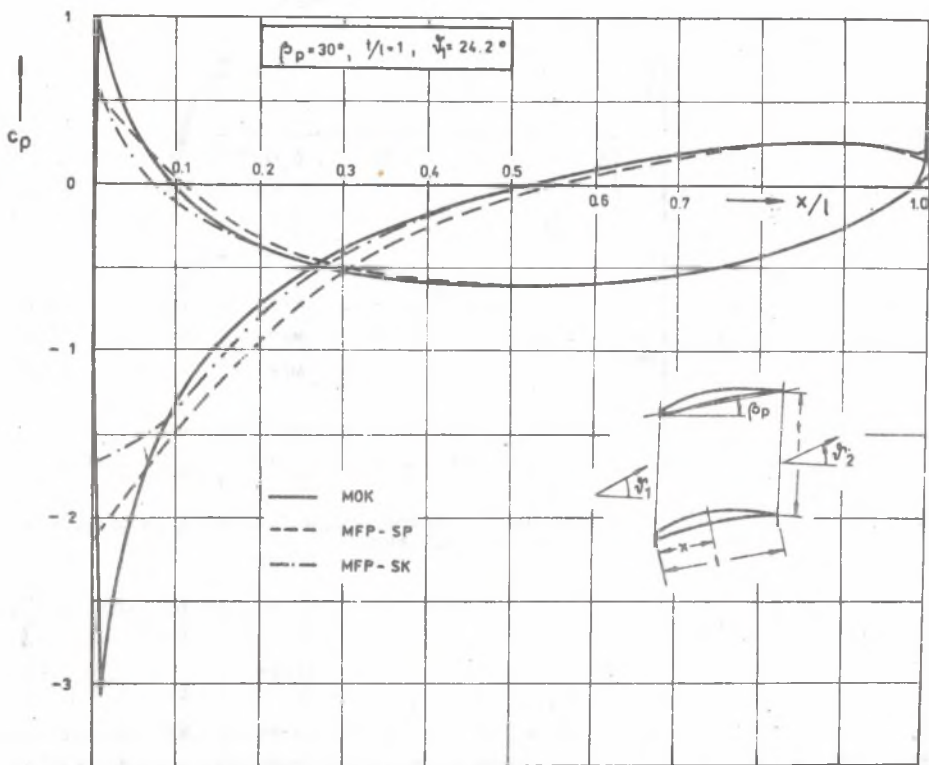


Rys. 7. Rozkład ciśnienia statycznego na profilu ($c_p = f(x/l)$)

Jednoznaczność zadania wymaga podania jeszcze warunków napływu w postaci kąta napływu strugi α_1 , natomiast kąt wypływu strugi α_2 ustala się w wyniku rozwiązania zadania.

W zależności od zastosowanej metody otrzymuje się różną wartość kąta wypływu. Jakkolwiek różnice są tu niewielkie to jednak utrudniają one porównywanie rozkładów prędkości i ciśnień na profilu, gdyż zinterpretować je można jako rezultat pracy palisady w różnych warunkach. Stąd więc w niniejszej pracy obrano koncepcję, w której kąt wypływu ϑ_2 jest jednakowy dla wszystkich metod, przy czym jego wartość jest wyznaczona za pomocą najdokładniejszej z tych metod, a więc za pomocą metody odwzorowań konformnych. Obliczenia przeprowadzono dla dwóch warunków pracy palisady określonych następującymi kątami:

- +) $\vartheta_1 = 51.06^\circ$; $\vartheta_2 = 23.75^\circ$
- ++) $\vartheta_1 = 24.2^\circ$; $\vartheta_2 = 22.75^\circ$.



Rys. 8. Rozkład ciśnienia statycznego na profilu ($c_p = f(x/l)$)

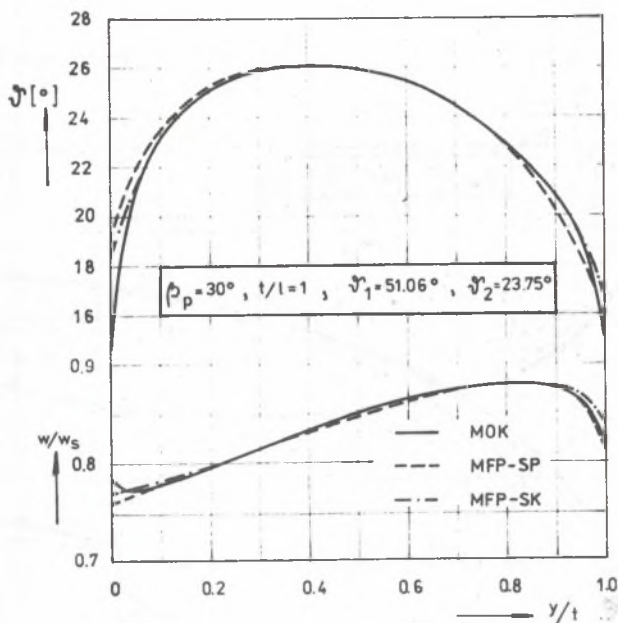
Najważniejszymi wynikami jakie uzyskuje się w rezultacie rozwiązania o-
 pływu palisady profili są rozkłady prędkości i ciśnienia na powierzchni
 profili.

W niniejszej pracy w celach porównawczych na rys. 7 i rys. 8 przedsta-
 wiono rozkład współczynnika ciśnienia zdefiniowanego jako

$$c_p = 1 - \left(\frac{w}{w_s}\right)^2, \quad (29)$$

gdzie w_s jest prędkością średnią przepływu w palisadzie.

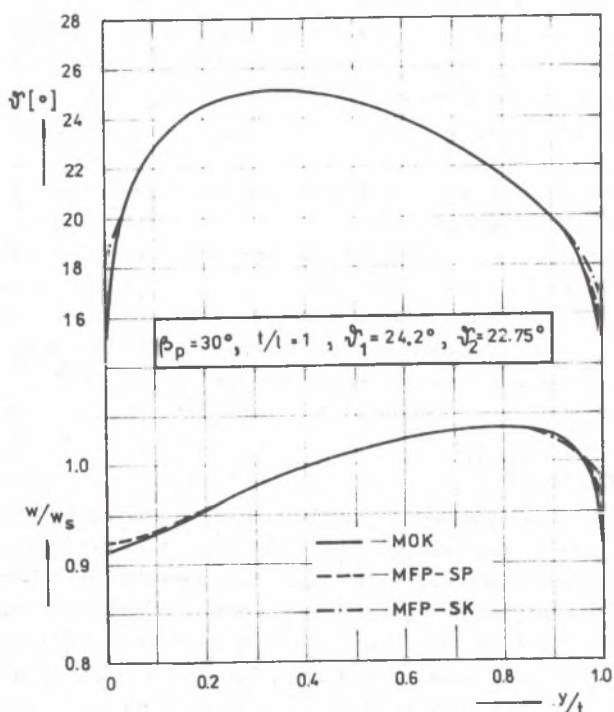
Widoczne tu niewielkie rozbieżności pomiędzy wynikami uzyskanymi metodą
 MOK oraz metodami MFP mają miejsce głównie w okolicach krawędzi wlotowej
 oraz w jeszcze mniejszym stopniu w okolicach krawędzi wylotowej.



Rys. 9. Rozkład prędkości względnej i kątów spływu ψ wzdłuż przekroju wy-
 lotowego palisady

Obliczenia metodą MFP na bazie siatki prostokątnej przeprowadzono przy
 liczbie 578 punktów węzłowych przyjmując jako kryterium zakończenia obli-
 czeń (zależność (25)) wartość $\epsilon_\psi = 10^{-6}$, którą osiągnięto po 103 itera-
 cjach przy czynniku nadrelaksacji $\omega = 1,8$.

Wyniki uzyskane przy zastosowaniu metody MFP na bazie siatki krzywolini-
 owej dotyczą realizacji obliczeń przy liczbie 456 punktów siatki przy za-
 łożeniu kryterium zakończenia obliczeń $\epsilon_\psi = 5 \cdot 10^{-6}$, które osiągnięto po
 240 iteracjach przy czynniku nadrelaksacji $\omega = 1,4$.



Rys. 10. Rozkład prędkości względnej i kątów splywu wzdłuż przekroju palisady

Na rys. 9 i 10 przedstawiono, odpowiednio dla różnych warunków pracy, rozkłady kątów splywu strugi ϑ oraz prędkości względnych w/w_s w przekroju wylotowym palisady. Oceniając te wykresy stwierdzić można dużą pokrywalność wyników.

5. Porównanie metod rozwiązywania opływu palisady profili. Wnioski

Na podstawie przeprowadzonych obliczeń porównawczych jak i zdobytego doświadczenia badawczego w dziedzinie analizy przepływu przez palisady profili opisanymi wyżej metodami, można dokonać pewnych uogólnień i sformułować wnioski dotyczące efektywności obliczeń poszczególnymi metodami.

5.1. Zakres zastosowania

Rozpatrując metodę odwzorowań konforemnych (MOK) oraz metody funkcji prądu (MFP) można stwierdzić, że każda z nich posiada określony zakres zastosowania, w którym wykazuje się istotnymi zaletami w stosunku do pozostałej.

Metoda odwzorowania konforemnego jako metoda analityczna może stanowić pod wieloma względami punkt odniesienia. Jej zakres zastosowania zawężyła się przede wszystkim do badania przepływu płynów nieściśliwych w palisadach płaskich. Istotną natomiast zaletą metody MFP jest to, że nadaje się ona do analizy przepływu płynów ściśliwych, takich jak strudze o zmiennej grubości.

Korzystną właściwością metody MOK w porównaniu z MFP jest możliwość analizy opływu pojedynczego profilu.

Jeżeli chodzi o zakres zastosowania metody funkcji prądu w swych odmianach bazujących na siatce prostokątnej (MFP-SP) i na siatce krzywoliniowej (MFP-SK), to jest on teoretycznie tożsamy. Programy obliczeniowe realizujące te metody powstały niezależnie, z różnych inspiracji i obecnie są na bieżąco wykorzystywane. Między innymi program metody MFP-SP wykorzystywany jest w pracach dotyczących analizy przepływu transonicznego.

5.2. Dokładność metod

Procedury obliczeniowe opisanych metod MFP zbudowane są przy zastosowaniu metody różnic skończonych, stąd też rozwiązanie sformułowanych tu zagadnień brzegowych uzyskuje się w postaci przybliżonej. Oszacowanie błędów rozwiązań zagadnień brzegowych jest bardzo trudnym problemem matematycznym. Jedną z możliwości oceny błędu całkowitego jest porównanie uzyskanych wyników z rozwiązaniem zadania wzorcowego, dla którego znane są wyniki ścisłe. Przy wnioskowaniu dotyczącym dokładności uzyskiwanych rozwiązań stawia się hipotezę, że błędy określone w zadaniach wzorcowych stanowią oszacowanie błędów występujących przy rozwiązaniu innych zadań. Jako takie zadanie wzorcowe dla metod MFP-SP i MFP-SK przyjęto rozwiązanie uzyskane przy zastosowaniu MOK.

Jakkolwiek dokładność metody odwzorowań konforemnych uwarunkowana jest dokładnością wyznaczenia funkcji odwzorowującej, zalicza się ją do metod dokładnych. Dokładność odwzorowania profilu na okrąg zależy głównie od liczby wyrazów szeregu będącego funkcją odwzorowującą. Według Samojłowicza minimalna ich liczba wynosi 6. Z przeprowadzonych obliczeń testowych wynika, że liczba 10 wyrazów szeregu całkowicie wystarcza do odwzorowania profili grubych (turbinowych) z dokładnością rzędu 10^{-5} . Współczynniki wyrazów rozwinięcia określa się na drodze iteracyjnej z błędem rzędu 10^{-5} .

W metodach różnic skończonych dokładność uzyskiwanych wyników uzależniona jest od liczby punktów obliczeniowych, przy czym szczególnie istotne jest tu ich zagęszczenie w strefie wlotowej i wylotowej palisady. Można przyjąć, że przy zastosowaniu siatki obliczeniowej składającej się z około 500 punktów (tak jak w przykładach), dokładność otrzymanych wyników, poza strefą wlotową wynoszącą ok. 5-10% długości cięciwy, jest rzędu 1-2%. Pewne zauważalne rozbieżności w obrębie krawędzi wlotowych (rys. 7 i 8) wynikają z błędów metody, polegającego na tym, że arbitralnie zakłada się

tu położenie punktu stagnacji na krawędzi wlotowej profilu, podczas gdy lokalizacja tego punktu zależna jest od warunków napływu.

Niewielkie odchylenia w przebiegu rozkładu współczynnika ciśnienia σ_p (rys. 7 i 8) występują blisko krawędzi wylotowej.

Otóż wokół ostrza profilu koncentruje się strefa o bardzo dużych gradientach, odzwierciedlenie których wymagałoby znacznie gęstszych siatek. W tym więc przypadku wyniki uzyskane przy zastosowaniu metody różnic skończonych, których istotą jest pewna aproksymacja zagadnienia, odbiegają nieco od wyników MOK. To odchylenie wykazuje stopień niezrealizowania postulatu Kutty-Żukowskiego (18), wynoszący w przytoczonych przykładach obliczeniowych ok. 5%, tzn.

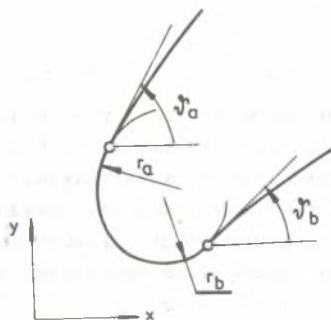
$$\frac{|w_+| - |w_-|}{w} \approx 0,05.$$

Powyższa właściwość metod funkcji prądu powoduje, że uzyskuje się tu, w porównaniu z metodą odwzorowań konforemnych, kąty wypływu φ_2 przeciętnie ok. $0,5-0,6^\circ$ wyższe [6]. Należy zauważyć, że odchylenie to daje w przypadku palisad sprzężających wyniki bliższe rzeczywistości.

Jeżeli chodzi o porównanie metod MFP-SP i MFP-SK między sobą, to używa się tu dokładność tego samego rzędu, z tym że MFP-SP wymaga dużo dokładniejszego zadania geometrii profilu, gdyż nawet mała odchyłka znacznie wpływa na wyniki.

5.3. Przygotowanie danych

Dosyć ważnym momentem przy rozwiązywaniu opływu palisady profili jest zadanie geometrii profilu. Wartości współrzędnych określa się najczęściej albo według stabilizowanych wartości, tzw. profili podstawowych lub też wykorzystując odczyty odpowiednio powiększonych rysunków profilu. W programie MOK i MFP-SK wystarczy zadać tylko współrzędne profilu, natomiast w przypadku programu MFP-SP należy dodatkowo zadać jeszcze promień zaokrąglenia noska (promień krawędzi natarcia) i promień krawędzi spływu oraz kąty stycznych w punktach przejścia od okręgów na nosku i krawędzi spływu do profilu zasadniczego (rys. 11).



Rys. 11. Fragment profilu do przygotowania danych w programie MFP-SP

W metodzie MOK określenie funkcji odwzorowującej powoduje wygładzenie pewnych niedokładności zadania współrzędnych profilu, natomiast w programie MFP-SP następuje jakby ich wzmocnienie. Składają się na to dwie przyczyny. Jedną z nich jest zastosowana w programie MFP-SP procedura

interpolacyjna "cubic spline fit", która jest bardzo czuła nawet na drobne odchylenia (zaokrąglenia) w danych. Drugą przyczyną leży w tym, że wartości prędkości na brzegu profilu uzyskuje się na podstawie kąta nachylenia linii brzegowej profilu (w tym miejscu) oraz pochodnej funkcji prądu tylko w jednym kierunku. W programie MFP-SK wartości prędkości wyznacza się za pomocą pochodnych funkcji prądu w dwóch kierunkach wyznaczonych przez układ współrzędnych.

Na podstawie dotychczasowej praktyki obliczeniowej stwierdzono, że dla poprawnego zadania profilu typu sprężarkowego wystarczy określenie współrzędnych w minimum ok. 30-40 punktach na obwodzie profilu, przy czym należy oczywiście zagęścić punkty w pobliżu krawędzi wlotowej i wylotowej.

5.4. Realizacja programów na EMC

Program MOK i MFP-SP napisane są w języku FORTRAN-1900, natomiast MFP-SK w języku ALGOL-1900. Przystosowane są one do obliczeń na komputerze ODR-1305. Oceniając budowę programów obliczeniowych pod kątem ich złożoności i ilości rozwiązań logicznych można stwierdzić, że prezentują one zbliżony poziom złożoności, niemniej różnią się pod względem wymaganej pojemności pamięci LMC. I tak realizacja programu MOK wymaga pojemności 20 K, MFP-SK pojemności ok. 35 K, natomiast MFP-SP wymaga 45 K.

Jeżeli chodzi o czas obliczeń to najkrótszy jest on dla programu MOK i przeciętnie dla profilu sprężarkowego wynosi ok. 8 min. W granicznych przypadkach, dla silnie wygiętych profili dochodzi do 15 minut. Struktura programu i własności metody powodują, że rozwiązanie zagadnienia o wpływie palisady profili dla innych warunków pracy nie wymaga już większego nakładu czasu na liczenie. Czas realizacji programów MFP-SP i MFP-SK wynosi ok. 10-15 minut, przy czym dla różnych warunków pracy obliczenia prowadzone są od nowa.

Ogólnie można stwierdzić, że dla przypadku analizy płaskiego przepływu płynu nieściśliwego największą efektywnością obliczeniową charakteryzuje się metoda odwzorowania konforemnego.

5.5. Wniosek końcowy

Wszystkie przedstawione metody posiadają pewne zalety, które powodują, że metody te predystynowane są do stosowania przy rozwiązywaniu aktualnych zagadnień przepływu przez palisady. Stosunkowo różny zakres zastosowań powoduje, że metoda odwzorowań konforemnych i metoda funkcji prądu wzajemnie się uzupełniają. Jeżeli chodzi o programy MFP-SP i MFP-SK to wydaje się celowe połączenie ich w jeden program zachowując ich zalety i korzystne rozwiązania.

LITERATURA

- [1] Chmielniak T.: Zagadnienia cieplnych maszyn przepływowych. Teoria palisad. Skrypt nr 783, Pol.Śl. Gliwice 1979.
- [2] Katsanis T.: A Computer Program for Calculating Velocities and Streamlines on a Blade-to-Blade Stream Surface of a Turbomachine. NASA TN D-4525/1968.
- [3] Klonowska M.E., Prosnak W.J., Szymański J.K.: Obliczanie opływu palisady prostoliniowej. Praca IPPT, Warszawa 1976.
- [4] Otte J.: Numeryczne modelowanie quasi-trójwymiarowego przepływu płynu w maszynach wirnikowych. Zbiór prac IV Konferencji "Technologia przepływowych maszyn wirnikowych" Rzeszów 1978.
- [5] Otte J.: Zastosowanie współczesnych metod obliczeniowych mechaniki przepływów w procesie projektowania wentylatorów. ZN Politechniki Śląskiej, Energetyka z. 72, 1979.
- [6] Otte J., Szafraniec A.: Porównanie metod modelowania przepływu przez palisady profilów. XVIII Sympozjon "Modelowanie w Mechanice" Wisła 1979. Zbiór prac.
- [7] Otte J.: Uwagi o pracy palisad profili w strudze płynu o zmiennej grubości. IV Krajowa Konferencja Mechaniki Cieczy i Gazów, Łódź-Burzenin 1980.
- [8] Prosnak W.J.: O automatycznym rozwiązywaniu podstawowego zagadnienia teorii profilu. Prace IPPT 32/1972.
- [9] Prosnak W.J.: Mechanika płynów, t. 1 Warszawa 1971.
- [10] Samożłowicz G.S.: Raszczet gidrodinamiczeskich resztek. PMM, t. XIV, wyp. 2 (1960).
- [11] Stanitz J.D.: Some Theoretical Aerodynamic Investigations of Impellers in Radial and Mixed-Flow Centrifugal Compressors. Trans, ASME, 4, 1952.
- [12] Szafraniec A.: Analogowe i numeryczne badania przepływów przez palisady łopatkowe maszyn wirnikowych. Praca doktorska, Gliwice 1978.
- [13] Witkowski A., Misiewicz A.: Modelowanie przepływu rzeczywistego w osiowym stopniu sprężającym. Sympozjum "Modelowanie w Mechanice" Wisła 1980.

Recenzent: doc. dr inż. Jerzy Roszkowski

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ЦИФРОВЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ОПЛЫВАНИЯ
РЕШЕТКИ НАГНЕТАЮЩИХ ПРОФИЛЕЙ

Р е з ю м е

В работе проведено попытку сравнения трёх методов анализа метода конформных отображений, метода функции тока на основе прямоугольной решетки и метода функции тока на основе криволинейной решетки применяемых в лаборатории тепловых ротационных машин Института энергетических машин и оборудования для решения оплыва решётки профилей. Коротко описано методы. Представлено примеры расчётов.

COMPARATIVE ANALYSIS OF NUMERICAL METHODS FOR SOLVING OF FLOW ROUND
OF A COMPRESSION PROFILES PALISADE

S u m m a r y

Three methods conform mappings method, stream functions methods with rectangle and curvilinear net of solving of a flow round of a compression profiles palisade are compared. All methods are shortly characterised and comoutantional examples are given.