

Adam MAREK
Tadeusz RODACKI

MODEL MATEMATYCZNY FALOWNIKA PRĄDOWEGO ZASILAJĄCEGO NAGRZEWNICĘ INDUKCYJNĄ

Streszczenie. W artykule tym przeprowadzona została analiza matematyczna układu zasilającego układ grzejny wzбудnik – wsad – kondensator kompensujący zgodnie z metodą transformacji Laplace'a, metodą transformacji Fouriera, a także przedstawiono schemat ideowy takiego zasilacza.

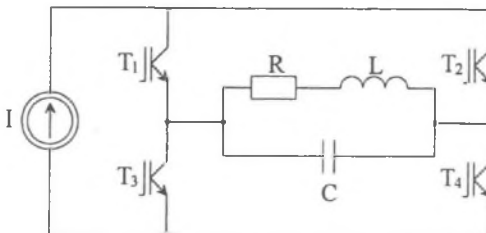
MATHEMATICAL MODEL OF THE CURRENT INVERTER FEEDING INDUCTION HEATER

Summary. The paper presents mathematical analysis of the feeder of the heating inductor – charge – compensate capacitor configuration based on Laplace and Fourier transformation methods. A schematic diagram of that kind of a feeder is given in the papers as well.

1. WSTĘP

Urządzenia do nagrzewania indukcyjnego, których częstotliwość robocza jest wyższa od częstotliwości sieciowej, zasilane są najczęściej za pomocą jednego z dwóch zasilaczy: równoległego falownika prądowego lub szeregowego falownika napięciowego. Przedmiotem analizy są zasilacze średniej częstotliwości, charakteryzujące się zakresem zmian w przedziale od 1 kHz do kilkunastu kHz. W niniejszej pracy do analizy przyjęto równoległy falownik prądowy.

Uproszczony schemat takiego zasilacza został przedstawiony poniżej:



Rys.1. Schemat równoległego falownika prądowego

Fig.1. Diagram of the parallel current inverter

2. ZJAWISKA FIZYCZNE ZACHODZĄCE WEWNĄTRZ WSADU

Zadaniem układu grzejnego wzbudnik - wsad jest przekazywanie strumienia energii ze wzbudnika do wsadu za pomocą pola elektromagnetycznego, a następnie przetworzenie energii pola elektromagnetycznego w energię cieplną. Pole elektromagnetyczne wytworzone jest przez wzbudnik w postaci uzwojeń, przez które przepływa prąd elektryczny. Energia ta za przyczyną występowania zjawiska indukcji elektromagnetycznej oraz zjawiska naskórkowości zostaje przetworzona na energię cieplną wydzielaną we wsadzie (zachodzi to w przypadku, gdy wsad jest materiałem przewodzącym prąd elektryczny). Zjawisko indukcji elektromagnetycznej powoduje przepływ prądów wirowych we wsadzie, natomiast zjawisko naskórkowości jest przyczyną koncentracji wydzielanej mocy w warstwach powierzchniowych wsadu. Widać więc, że we wsadzie indukują się prądy wirowe, które są odpowiedzialne za wydzielanie się ciepła. Jednak gęstość tych prądów jest większa w warstwach powierzchniowych wsadu.

Podstawowym współczynnikiem określającym stan wewnątrz wsadu (stan ten jest wynikiem współdziałania opisanych wyżej zjawisk zachodzących wewnątrz wsadu) jest głębokość wnikania pola elektromagnetycznego δ . Współczynnik ten jest definiowany jako odległość od powierzchni wsadu, w której następuje e-krotne zmniejszenie amplitudy natężenia pola magnetycznego. Wartość współczynnika δ jest definiowana:

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega * \mu * \sigma}} = \sqrt{\frac{1}{\pi * f * \mu * \sigma}}, \quad (1)$$

gdzie:

- f - częstotliwość wytwarzanego we wsadzie pola magnetycznego;
- μ - przenikalność magnetyczna wsadu;
- σ - konduktywność wsadu.

We wzorze tym uwidacznia się znaczący wpływ częstotliwości przełączania falownika zasilającego tego typu obciążenie. Wzrost częstotliwości powoduje bowiem, że skutecznie nagrzewana jest coraz to węższa warstwa zewnętrzna wsadu. Znaczny wpływ na głębokość wnikania pola elektromagnetycznego δ mają czynniki związane z rodzajem nagrzewanego materiału. Są to: przenikalność magnetyczna wsadu oraz konduktywność wsadu. Należy również zwrócić uwagę na to, że wartość obu tych parametrów zmienia się w sposób znaczący wraz ze wzrostem temperatury wsadu.

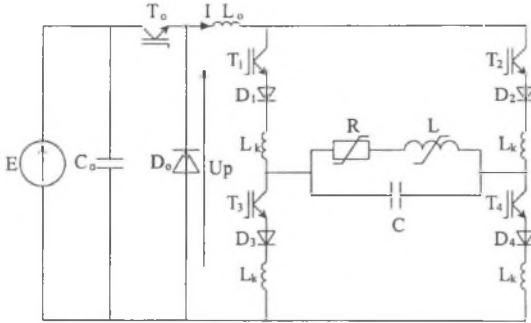
3. UKŁAD ZASILAJĄCY UKŁAD GRZEJNY WZBUDNIK – WSAD: WIADOMOŚCI PODSTAWOWE, PODSTAWOWE ZALEŻNOŚCI

3.1. Wiadomości podstawowe

Na rys. 2 przedstawiono schemat ideowy przekształtnika średniej częstotliwości z równoległym obwodem rezonansowym.

W układzie tym zamiast dotychczas powszechnie stosowanego przekształtnika sterowanego od strony sieci, użyto przekształtnik diodowy o stałej wartości napięcia wyjściowego. Rozwiązanie to jest korzystne, ponieważ oddziaływanie takiego układu przekształtnikowego na sieć zasilającą jest znacznie mniejsze niż układu przekształtnika tyrystorowego. Jednocześnie jest możliwe zmniejszenie indukcyjności dławika L_p , którego cena stanowi istotną pozy-

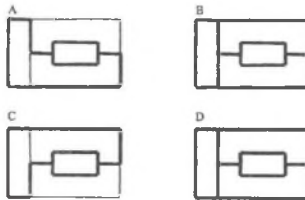
cję w kosztach budowy przemiennika. Zmniejszenie wartości indukcyjności wynika z tego, że w przypadku przekształtnika sterowanego częstotliwość przełączania zaworów wynosi $6f_s$ (300 Hz w Europie), zaś częstotliwość pracy łącznika może wynosić kilkanaście kHz. W tym przypadku zachodzi konieczność sterowania prądu w obwodzie prądu stałego.



Rys. 2. Schemat ideowy przekształtnika
Fig. 2. Schematic diagram of the converter

Zasada działania przedstawionego powyżej układu polega na cyklicznym przełączaniu pary tranzystorów T_1 i T_4 lub pary tranzystorów T_2 i T_3 . W wyniku powyższego działania odbiornik R, L, C zasilany jest prądem o kształcie praktycznie prostokątnym, natomiast napięcie na tym odbiorniku, przy odpowiednim doborze pojemności kondensatora kompensującego C , częstotliwości przełączania par tranzystorów oraz dla odpowiedniej dobroci Q obwodu drgającego (badany układ R, L, C), ma kształt prawie sinusoidalny.

W wyniku zastąpienia źródła zasilania E , kondensatora zasobniczego C_0 , tranzystora zasilającego T_0 , diody zwrotnej D_0 oraz dławika L_0 zastępczym źródłem prądowym I , wyróżniamy cztery podstawowe schematy zastępcze dla jednego cyklu pracy. Schematy te są przedstawione na rysunku poniżej:



Rys. 3. Schematy zastępcze dla poszczególnych etapów pracy
Fig. 3. Equivalent diagram for the particular stages of work

Kolejność obowiązywania schematów jest następująca: najpierw pojawia się schemat A (przewodzą tranzystory T_1 i T_4), później schemat B (komutacja - przewodzą wszystkie cztery tranzystory), następnie schemat C (przewodzą tranzystory T_2 i T_3), po czym na koniec schemat D (zjawisko komutacji - przewodzą ponownie wszystkie cztery tranzystory).

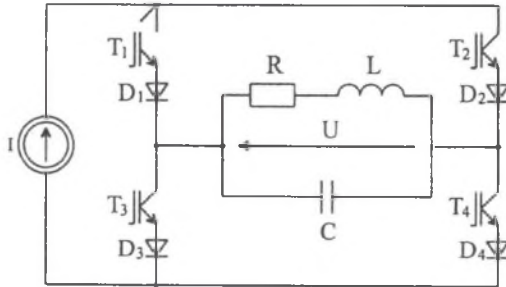
Po zakończeniu obowiązywania schematu D rozpoczyna ponownie obowiązywać schemat A. W tym momencie kończy się cykl pojawiających się kolejno po sobie stanów układu falownika.

3.2. Model falownika - założenia upraszczające, zależności matematyczne

Analiza matematyczna układu falownika w całej jego złożoności byłaby bardzo skomplikowana, a rezultaty takiej analizy (jeśli byłaby ona w ogóle możliwa), mogłyby być tylko nieznacznie dokładniejsze w porównaniu do analizy matematycznej dokonanej z wprowadzeniem poniższych założeń upraszczających:

- rzeczywiste struktury źródła prądu, tranzystorów, diod, rezystancji, indukcyjności i pojemności zostają zastąpione strukturami idealnymi,
- pomija się proces komutacji tranzystorów, w związku z czym można pominąć także dławiki komutacyjne L_k ,
- pomija się obwody zabezpieczeń falownika,
- pomija się impedancję połączeń przewodowych pomiędzy poszczególnymi elementami falownika,
- pomija się wpływ temperatury na elementy falownika.
- zakłada się, że tłumienie równoległego obwodu rezonansowego jest mniejsze od krytycznego.

Przyjęcie powyższych uproszczeń umożliwia przyjęcie do dalszej analizy następującego schematu elektrycznego falownika:



Rys. 4. Schemat uproszczony falownika

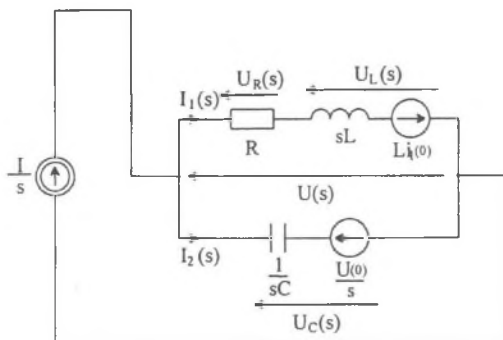
Fig.4. Simplified diagram of the inverter

W wyniku przyjęcia założenia, że w układzie nie występuje zjawisko komutacji, do dalszej analizy będą brane tylko dwa schematy zastępcze z rys. 3: A i C.

Zależności matematyczne zostaną wyznaczone metodą Laplace'a wykorzystaną do rozwiązywania obwodu elektrycznego. W tym celu wyznaczamy odpowiedniki poszczególnych elementów elektrycznych (L , C , R , I) z rys. 4 w metodzie Laplace'a.

3.3. Opis stanu falownika w przypadku gdy przewodzą tranzystory T_1 i T_4

Schemat zastępczy dla tego przypadku przedstawiony jest jako schemat A na rys. 3. Równoważny schemat elektryczny wykorzystujący metodę Laplace'a ma postać jak na rys. 5.

Rys.5. Równoważny schemat elektryczny, gdy przewodzą tranzystory T_1 i T_4 Fig.5. Equivalent diagram in the case when transistors T_1 and T_4 are in the active mode

Na schemacie tym przyjęto następujące warunki brzegowe:

- $i_1(0)$ - jest to wartość prądu przepływającego przez cewkę indukcyjną w momencie rozpoczęcia obowiązywania tego schematu (przyjmujemy, że odbywa się to w chwili $t = 0$),
- $U(0)$ - jest to wartość napięcia panującego na kondensatorze w momencie rozpoczęcia obowiązywania tego schematu (przyjmujemy, że odbywa się to w chwili $t = 0$).

Równania opisujące stan modelu falownika w momencie obowiązywania schematu elektrycznego przedstawionego na rys. 5 występują w postaci równań:

$$U(s) = RI_1(s) + sLI_1(s) - Li_1(0), \quad (2)$$

$$U(s) = \frac{U(0)}{s} + \frac{I_2(s)}{sC}, \quad (3)$$

$$\frac{I}{s} = I_1(s) + I_2(s), \quad (4)$$

Przedstawiony układ trzech równań sprowadzamy do jednego równania opisującego prąd $I_1(s)$. Wybrano ten prąd, ponieważ gdy wyznaczymy jego postać czasową, to będzie można łatwo znaleźć pozostałe interesujące nas prądy i napięcia układu.

W celu uzyskania postaci czasowej prądu $i_1(t)$ musimy najpierw wyznaczyć deltę równania charakterystycznego (zauważamy, że w naszym przypadku pożądanym jest stan, w którym prąd $i_1(t)$ miałby charakter oscylacyjny - tzn. $\Delta < 0$), później wyznaczyć jego pierwiastki, a następnie po dokonaniu odwrotnego przekształcenia Laplace'a, uzyskujemy ostatecznie postać czasową prądu $i_1(t)$:

$$i_1(t) = I + \frac{2U(0) - R(I + i_1(0))}{2\omega_s L} e^{-\alpha t} \sin(\omega_s t) + (i_1(0) - I) e^{-\alpha t} \cos(\omega_s t), \quad (5)$$

gdzie:

$$\alpha = \frac{R}{2L} - \text{współczynnik tłumienia drgań własnych układu},$$

$$\omega_s = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} - \text{pulsacja drgań własnych układu},$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} - \text{pulsacja drgania rezonansowego bez tłumienia}.$$

Wartość napięcia na odbiorniku wynosi:

$$u(t) = Ri_1(t) + L \frac{di_1(t)}{dt}, \quad (6)$$

Po przekształceniach otrzymujemy ostatecznie:

$$u(t) = RI + \left(\frac{R(U(0) - RI)}{2\omega_s L} + \frac{I - i_1(0)}{\omega_s C} \right) e^{-\alpha t} \sin(\omega_s t) + (U(0) - RI) e^{-\alpha t} \cos(\omega_s t), \quad (7)$$

Wartość początkową prądu $i_1(0)$ i napięcia $U(0)$ wyznaczmy wiedząc, że wartość napięcia na kondensatorze oraz prąd płynący przez dławik na końcu obowiązywania rozpatrywanego schematu wynosi $-U(0)$ oraz $-i_1(0)$. Należy jednak podkreślić, że stan taki występuje dla przebiegów ustalonych. Wobec tego $i_1(0)$ oraz $U(0)$ wyznaczmy z układu równań:

$$-U(0) = RI + \left(\frac{R(U(0) - RI)}{2\omega_s L} + \frac{I - i_1(0)}{\omega_s C} \right) e^{-\frac{\alpha}{2f} t} \sin\left(\frac{\omega_s}{2f} t\right) + (U(0) - RI) e^{-\frac{\alpha}{2f} t} \cos\left(\frac{\omega_s}{2f} t\right), \quad (8)$$

$$-i_1(0) = I + \frac{2U(0) - R(I + i_1(0))}{2\omega_s L} e^{-\frac{\alpha}{2f} t} \sin\left(\frac{\omega_s}{2f} t\right) + (i_1(0) - I) e^{-\frac{\alpha}{2f} t} \cos\left(\frac{\omega_s}{2f} t\right), \quad (9)$$

Analityczne wyznaczenie rozwiązań prądu $i_1(0)$ oraz napięcia $U(0)$ z układu równań (8) i (9) jest stosunkowo żmudne i złożone. Rozwiązanie układu równań można dokonać więc przy wykorzystaniu jednego z programów matematycznych.

Zależności równań (8) i (9) dla przypadku, gdy przewodem tranzystory T_2 i T_3 różnią się jedynie znakami prądu zasilania - tzn. zamiast I występuje $-I$.

3.4. Zależności opisujące pracę przerywacza prądu stałego

Analiza pracy przerywacza została przeprowadzona dla układu, którego schemat został przedstawiony na rys. 2. Na podstawie drugiego prawa Kirchhoffa otrzymujemy równanie:

$$\frac{E - U_p}{L_0} = \frac{di}{dt}, \quad (10)$$

Analizę wpływu parametrów łącznika na zmianę prądu obwodu pośredniczącego można przeprowadzić z wykorzystaniem metody superpozycji zakładając, że napięcie obwodu pośredniczącego zawiera dwie składowe: wartość średnią i składową przemienną.

Wpływ wartości średniej na zmienność prądu wynika wprost z relacji przedstawionej powyżej dla przypadków skończonych:

$$\Delta I \approx \frac{E - U_{ps}}{L_0} \Delta t, \quad (11)$$

gdzie:

U_{ps} - średnia wartość napięcia obwodu pośredniczącego.

Wartość ΔI jest zależna od:

- częstotliwości przełączania f ,
- parametrów równoległego obwodu rezonansowego R , L , C ,
- prądu pośredniczącego i .

Składowa przemienna w napięciu pośredniczącym charakteryzuje się tym, że jej częstotliwości jest dwa razy większa od częstotliwości przełączania zaworów:

$$i_z = \int \frac{-U_{pzm} \sin 2\omega t}{L_0} dt, \quad (12)$$

gdzie:

U_{pzm} - amplituda składowej zmiennej napięcia obwodu pośredniczącego.

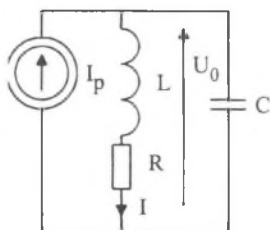
Amplituda składowej zmiennej wynosi:

$$I_{zm} = \frac{U_{pzm}}{2\omega L_0}, \quad (13)$$

Amplituda tej składowej zależy od:

- amplitudy składowej zmiennej napięcia obwodu pośredniczącego,
- podwójnej częstotliwości przełączania zaworów.

3.5. Analiza falownika z wykorzystaniem rozkładu prądu zasilającego metodą Fouriera



Rys.6. Schemat zastępczy falownika

Fig.6. Equivalent diagram of the inverter

Zakładając: stałość prądu zasilającego o kształcie prostokątnym, liniowość idealnych elementów układu można stosować metodę superpozycji prądów dla poszczególnych harmonicznych wykorzystując metodę rozkładu Fouriera prądu zasilającego równoległy obwód R, L, C. Rys. 6 przedstawia schemat zastępczy układu falownika.

Rozkładając prąd o kształcie prostokątnym otrzymujemy:

$$i_p = \frac{4}{\pi} I_p (\sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \dots), \quad (14)$$

Wartości skuteczne prądu I_p poszczególnych harmonicznych wynoszą:

$$I_{p(n)} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi n} I_p, \quad (15)$$

Impedancja zastępcza układu wynosi:

$$Z_{(n)} = \frac{(R + jX_{L(n)})(-jX_{C(n)})}{R + j(X_{L(n)} - X_{C(n)})}, \quad (16)$$

Prąd odbiornika dla poszczególnych harmonicznych wynosi:

$$I_{(n)} = I_{p(n)} \frac{X_{C(n)}}{\sqrt{R^2 + (X_{L(n)} - X_{C(n)})^2}}, \quad (17)$$

Całkowita moc wydzielona w odbiorniku:

$$P = I_{(1)}^2 R_{(1)} + I_{(3)}^2 R_{(3)} + I_{(5)}^2 R_{(5)} + \dots, \quad (18)$$

4. WNIOSKI KOŃCOWE

W wyniku przeprowadzonych analiz i symulacji [4] stwierdzono, że:

- a) za pomocą analizy pracy falownika metodą transformacji Laplace'a uzyskuje się równania dla podstawowych wielkości, które są nieczytelne,
- b) wyniki analizy pracy falownika metodą Fouriera (rozkładu prądu na harmoniczne) są proste, jednak zakres jej stosowania jest praktycznie ograniczony dla tłumień mniejszych od krytycznego (taki warunek również zastosowano przy analizie metodą transformacji Laplace'a),
- c) praktycznie całą moc wydziela we wsadzie pierwsza harmoniczna prądu.

LITERATURA

1. Barlik R., Nowak M.: Technika tyrystorowa. WNT, Warszawa 1985.
2. Tunia H., Winiarski B.: Podstawy energoelektroniki. WNT, Warszawa 1975.
3. Tunia H., Smirnow A., Nowak M., Barlik R.: Układy energoelektroniczne. WNT, Warszawa 1982.
4. Marek A.: Analiza pracy i projekt falownika prądowego równoległego do nagrzewania indukcyjnego. Praca dyplomowa. Pol. Śląska, Gliwice 1998.

Recenzent: Dr hab. inż. Czesław Sajdak, prof. Pol. Śl.

Wpłynęło do Redakcji 31 maja 1999 r.

Abstract

The paper presents mathematical analysis of the feeding inverter (Fig. 4) based on Laplace transformation method. Dependencies obtained that way are illegible due to their complexity. Analysis of the rectangular shaped current based on Fourier series expansion gave much better results. The dependencies calculated that way are possible simple and make simple determination of some interesting quantities for the heating process like current and power release in the charge. With respect to the design analysis of the DC current breaker was performed as well (part of Fig. 2).