ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 2002
Seria: AUTOMATYKA z. 136 Nr kol. 1556

Krzysztof GIARO, Robert JANCZEWSKI
Politechnika Gdańska

# O PROBLEMIE PRZYDZIAŁU CZĘSTOTLIWOŚCI, KONTRASTOWYM KOLOROWANIU GRAFÓW I CZĘŚCIOWYCH *k*-DRZEWACH

**Streszczenie.** Problem przydziału częstotliwości to zagadnienie, które formułuje się zazwyczaj następująco: na pewnym obszarze znajduje się grupa nadajników radiowych, którym trzeba przydzielić częstotliwości w taki sposób, żeby nie zakłócały się podczas nadawania i aby szerokość wykorzystanego przez nie pasma częstotliwości była minimalna. Zagadnienie to modeluje się zazwyczaj na gruncie teorii grafów za pomocą trzech pojęć: grafów interferencji, kontrastowych pokolorowań i *T*-rozpiętości. Niniejszy artykuł poświęcony jest złożoności obliczeniowej tego modelu; zawiera jego dokładny opis, dowód tego, że wyznaczanie *T*-rozpiętości i optymalnych pokolorowań kontrastowych jest NP-trudne nawet dla grafów dwudzielnych oraz wielomianowy algorytm wyznaczający optymalne pokolorowania kontrastowe dla tzw. częściowych *k*-drzew.

# ON THE FREQUENCY ASSIGNMENT PROBLEM, *T*-COLORINGS OF GRAPHS AND PARTIAL *k*-TREES

**Summary.** Frequency assignment problem (FAP) can be formulated as follows: there is a group of transmitters situated in a certain region of a plane; a channel is to be assigned to each of them in such a way that there is no interference during transmitting and the span of used frequency band is minimal. The paper is devoted to the computational complexity of the graph-theoretical model of FAP based on three notions: interference graphs, *T*-colorings and the *T*-span. We describe the model, prove that the problem of computing the *T*-span is NP-hard even for bipartite graphs and present a polynomial time algorithm for finding optimal *T*-coloring for the so-called partial *k*-trees.

## 1. Wprowadzenie

Tematem niniejszego referatu jest wprowadzony przez Hale'a [2] teoriografowy model dla problemu przydziału częstotliwości (PPCz). Zagadnienie PPCz formułuje się zazwyczaj następująco: na pewnym obszarze znajduje się grupa nadajników radiowych, którym trzeba przydzielić częstotliwości w taki sposób, żeby nie zakłócały się podczas nadawania i aby szerokość wykorzystanego przez nie pasma częstotliwości była jak najmniejsza. Model Hale'a opiera się na trzech pojęciach: grafach interferencji, kontrastowych pokolorowaniach i $T$-rozpiętości. Pojęcia te zostaną poniżej zdefiniowane i pokrótce omówione.

*Grafem interferencji* nazywać będziemy graf, którego wierzchołkami są rozważane nadajniki; w grafie interferencji krawędź łączy parę wierzchołków-nadajników wtedy i tylko wtedy, gdy mogą się zakłócać w trakcie nadawania. W trakcie budowy grafu interferencji uwzględnia się wszystkie czynniki mające wpływ na interferencję: ukształtowanie terenu, położenie nadajników, czynniki meteorologiczne i inne. Występujące dalej grafy oznaczane będą literami $G$ i $H$, ich zbiory wierzchołków odpowiednio $V(G)$ i $V(H)$, a zbiory krawędzi odpowiednio $E(G)$ i $E(H)$.

*Kontrastowym pokolorowaniem* lub *T-pokolorowaniem* grafu $G$ nazywać będziemy każdą funkcję, która przyporządkowuje wierzchołkom grafu $G$ liczby całkowite, nazywane dalej *kolorami*, w taki sposób, że dla każdej pary sąsiadujących w grafie $G$ wierzchołków $u$, $v$ odległość przydzielonych im kolorów nie należy do zbioru $T(\{u, v\})$, gdzie $T(\{u, v\})$ jest tak dobranym podzbiorem zbioru liczb całkowitych nieujemnych, że każdy przydział nadajnikom $u$, $v$ częstotliwości o odległości nie należącej do $T(\{u, v\})$ gwarantuje brak interferencji w trakcie nadawania (zazwyczaj przyjmuje się, że $T(\{u, v\}) = \{0\}$, gdy nadajniki $u$, $v$ są położone blisko siebie i $T(\{u, v\}) = \{0, 1\}$, gdy są bardzo blisko).

Kontrastowe pokolorowanie grafu interferencji jest w modelu Hale'a odpowiednikiem przydziału częstotliwości, który gwarantuje brak interferencji w trakcie nadawania. Odpowiednikiem rozwiązania problemu przydziału częstotliwości będzie oczywiście każde *optymalne* pokolorowanie kontrastowe, tj. takie, którego *rozpiętość* (różnica pomiędzy największym a najmniejszym wykorzystanym kolorem) jest minimalna. Tę minimalną możliwą rozpiętość wśród wszystkich możliwych $T$-pokolorowań grafu $G$ oznacza się symbolem $sp_T(G)$ i nazywa *T-rozpiętością* grafu $G$.

Dalsza część tego referatu poświęcona jest złożoności obliczeniowej wyznaczania $T$-rozpiętości i optymalnych kontrastowych pokolorowań dla dwóch klas grafów interferencji: grafów dwudzielnych i częściowych $k$-drzew. Wykażemy, że wyznaczanie optymalnych pokolorowań kontrastowych i $T$-rozpiętości jest NP-trudne w pierwszym przypadku i rozwiązywalne w czasie wielomianowym w drugim. Podstawowe informacje na temat złożoności rozważanych zagadnień w innych przypadkach można znaleźć m.in. w [3] i [4].

## 2. Grafy dwudzielne

Przypomnijmy, że $G$ jest grafem dwudzielnym wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór jego wierzchołków można podzielić na dwa rozłączne podzbiory $V_1$, $V_2$ takie, że każda krawędź grafu $G$ łączy wierzchołek ze zbioru $V_1$ z wierzchołkiem ze zbioru $V_2$. Klasa grafów dwudzielnych jest ważna m.in. ze względu na posiadane zastosowania w teorii szeregowania zadań i układaniu rozkładów zajęć. Dla nas istotne będzie tylko to, że grafy dwudzielne mają relatywnie prostą strukturę i występują rzadko (większość grafów nie należy do tej klasy).

**Twierdzenie.** *Wyznaczanie T-rozpiętości oraz optymalnych T-pokolorowań jest NP-trudne nawet dla grafów dwudzielnych.*

**Dowód.** Wystarczy wykazać, że wyznaczanie $T$-rozpiętości grafów dwudzielnych jest NP-trudne, bo z tego wynika od razu druga część tezy. Aby wykazać, że wyznaczanie $T$-rozpiętości grafów dwudzielnych jest NP-trudne, zredukujemy doskonale znany NP-zupełny problem sprawdzania 5-kolorowalności grafów ogólnych do sprawdzania, czy $T$-rozpiętość grafów dwudzielnych nie przekracza liczby 4.

Niech $G$ będzie dowolnym grafem, a $H$ grafem dwudzielnym, który powstał z $G$ poprzez wstawienie na każdą krawędź jednego nowego wierzchołka. W ten sposób każda krawędź istniejąca w grafie $G$ została podzielona na dwie; jednej z nich przyporządkowujemy zbiór $\{0, 1, 4\}$, a drugiej zbiór $\{0, 2, 3\}$ (innymi słowy, przyjmujemy, że jeżeli z jednej krawędzi $e$ powstały dwie $e_1$, $e_2$, to $T(e_1) = \{0, 1, 4\}$ i $T(e_2) = \{0, 2, 3\}$ lub $T(e_2) = \{0, 1, 4\}$ i $T(e_1) = \{0, 2, 3\}$). Wystarczy wykazać, że graf $G$ jest 5-kolorowalny wtedy i tylko wtedy, gdy $sp_T(H) \leq 4$.

Jeżeli graf $G$ można pokolorować 5 kolorami, to bez straty ogólności możemy przyjąć, że kolorami, które wykorzystano do pokolorowania grafu $G$, są liczby 0, 1, 2, 3 i 4. Okazuje się, że to pokolorowanie można w naturalny sposób przedłużyć do kontrastowego pokolorowania grafu $H$. Wystarczy w tym celu przyjąć, że jeżeli $w$ jest wierzchołkiem grafu $H$, który nie jest wierzchołkiem grafu $G$, a który został wstawiony na krawędź łączącą wierzchołek $u$ z wierzchołkiem $v$, to przydzielony mu kolor $c_w$ zależy od kolorów wierzchołków $u$, $v$ w następujący sposób:

| $c_u$ | $c_v$ | $c_w$ | $c_u$ | $c_v$ | $c_w$ | $c_u$ | $c_v$ | $c_w$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 4 | 1 | 4 | 2 | 3 | 2 | 4 |
| 0 | 2 | 4 | 2 | 0 | 3 | 3 | 4 | 2 |
| 0 | 3 | 1 | 2 | 1 | 3 | 4 | 0 | 3 |
| 0 | 4 | 1 | 2 | 3 | 1 | 4 | 1 | 3 |
| 1 | 0 | 2 | 2 | 4 | 1 | 4 | 2 | 0 |
| 1 | 2 | 0 | 3 | 0 | 2 | 4 | 3 | 0 |
| 1 | 3 | 0 | 3 | 1 | 4 | | | |

(zakładamy, że krawędzi $\{u, w\}$ przyporządkowany został zbiór $\{0, 2, 3\}$, a krawędzi $\{v, w\}$ zbiór $\{0, 1, 4\}$). Ponieważ utworzone w ten sposób kontrastowe pokolorowanie korzysta tylko z kolorów 0, 1, 2, 3 i 4, więc $sp_T(H) \leq 4$, co było do wykazania.

Z drugiej strony, jeżeli $sp_T(H) \leq 4$, to biorąc dowolne optymalne pokolorowanie kontrastowe grafu $H$ i obcinając je do zbioru wierzchołków grafu $G$, otrzymamy, co łatwo sprawdzić, pokolorowanie grafu $G$ korzystające z co najwyżej 5 kolorów, co było do wykazania.

## 3. Częściowe *k*-drzewa

Przypomnijmy, że $k$-drzewa ($k$ jest tutaj dowolną ale ustaloną liczbą naturalną) definiuje się zazwyczaj jako najmniejszą klasę grafów, która zawiera $k$-wierzchołkowy graf pełny oraz jest zamknięta ze względu na operację dodawania nowego wierzchołka sąsiadującego z $k$ wierzchołkami, które indukują podgraf pełny; $k$-drzewa są ściśle związane z drzewami bo graf jest drzewem wtedy i tylko wtedy, gdy jest 1-drzewem i każde $k$-drzewo jest grafem spójnym.

Przypomnijmy także, że graf jest *częściowym k-drzewem* wtedy i tylko wtedy, gdy jest podgrafem pewnego $k$-drzewa. Częściowe $k$-drzewa mają silnie zorganizowaną, rekurencyjną strukturę, która czyni je bardzo dogodnymi do obróbki algorytmami dynamicznymi.

**Definicja.** Dla danego częściowego $k$-drzewa $G$ przez *drzewiastą dekompozycję rozmiaru k* rozumiemy parę $(H, \gamma)$, gdzie $H$ jest drzewem, zaś $\gamma = \{X_i\colon X_i \wedge i \in I\}$ rodziną podzbiorów zbioru wierzchołków grafu $G$ indeksowaną wierzchołkami tego drzewa, spełniającą następujące warunki:

1) $\bigcup_{i\in I} X_i = V(G)$,
2) dla każdej krawędzi $\{u, v\}$ grafu $G$ istnieje taki wierzchołek $i \in I$ drzewa $H$, że $\{u, v\} \subseteq X_i$,
3) dla każdej trójki $a, b, c \in I$ takiej, że $b$ leży w $H$ na ścieżce prowadzącej z $a$ do $c$ zachodzi $X_a \cap X_c \subseteq X_b$,
4) dla każdego $i \in I$ mamy $|X_i| \leq k+1$.

Jak pokazano w [1, 5], przy ustalonym $k$ każde częściowe $k$-drzewo posiada drzewiastą dekompozycję rozmiaru $k$ i można ją uzyskać w czasie liniowym. Co więcej, w dekompozycji tej krawędzie drzewa $H$ można zorientować tworząc drzewo binarne o korzeniu $r$, przy czym każdy wierzchołek $i$ z $H$ będzie jednego z następujących rodzajów:

1) *liść* — $i$ jest liściem drzewa, wówczas $|X_i| = 1$,
2) *wierzchołek wprowadzający* — $i$ ma tylko jeden bezpośredni następnik $j$ oraz dla pewnego wierzchołka $v \in V \setminus X_j$ zachodzi $X_i = X_j \cup \{v\}$,
3) *wierzchołek usuwający* — $i$ ma tylko jeden bezpośredni następnik $j$ oraz dla pewnego wierzchołka $v \in V \setminus X_i$ zachodzi $X_j = X_i \cup \{v\}$,
4) *wierzchołek łączący* — $i$ ma dwa bezpośrednie następniki $j_1$ i $j_2$ oraz $X_i = X_{j_1} = X_{j_2}$.

Mając daną drzewiastą dekompozycję grafu $G$ w postaci pary $(H, \gamma)$ dla danego wierzchołka $i$ drzewa binarnego $H$ określimy przez $H_i$ jego poddrzewo indukowane przez wierzchołki: $i$ oraz wszystkie jego następniki (bezpośrednie i pośrednie). Podobnie niech $G_i$ będzie podgrafem grafu $G$ indukowanym przez sumę zbiorów $X_j$, gdzie $j$ przebiega wszystkie wierzchołki z $H_i$. Łatwo zauważyć, że $H_i$ jest drzewiastą dekompozycją rozmiaru $k$ dla częściowego $k$-drzewa $G_i$, ponadto $G_r = G$.

Z definicji bezpośrednio wynika, że dla $k$-drzew, a zatem i dla częściowych $k$-drzew prawdziwe jest oszacowanie liczby chromatycznej $\chi(G) \leq k+1$, więc z nierówności Tesmana [6] otrzymujemy $sp_T(G) \leq k\,|\bigcup_{e\in E} T(e)|$.

Dla uproszczenia zapisu niech $L = \{0, ..., k|\bigcup_{e\in E} T(e)|\}$. Na mocy powyższego, szukając optymalnego $T$-pokolorowania grafu $G$ wystarczy rozważać pokolorowania barwami ze zbioru $L$. W dalszej części przedstawimy jedynie część algorytmu pozwalającą na obliczenie $sp_T(G)$ — jej rozszerzenie do procedury zwracającej również optymalne $T$-pokolorowanie jest proste.

Dla każdego $i \in I$ obliczymy wartość funkcji $D_i$: $L^{X_i} \to N_0 \cup \{\infty\}$ taką, że $D_i(\phi)$ dla dowolnej funkcji $\phi$: $X_i \to L$ jest najmniejszą możliwą wartością maksymalnego koloru dla $(T|_{E_i})$-pokolorowania grafu $G_i$ kolorami z $L$ będącego przedłużeniem $\phi$. W przypadku gdy pokolorowanie takie nie istnieje, przyjmujemy, że funkcja ma wartość nieskończoną. Jest oczywiste, że wartości każdej z funkcji $D_i$ można zakodować w postaci tablicy liczb całkowitych o co najwyżej $|L|^{k+1}$ komórkach. Ponadto $sp_T(G)$ jest równe minimum z $D_r$. Aby obliczyć tę ostatnią funkcję będziemy wyznaczać wszystkie $D_i$ dla $i \in I$ rozpoczynając od liści drzewa binarnego $H$, systematycznie posuwając się w górę, aż do korzenia. Algorytm jest następujący:

1. Jeśli $i$ jest liściem, to $X_i$ jest jednoelementowy i z definicji $D_i(\phi) = l$ dla $\phi \equiv l$.
2. Jeżeli $i$ jest wierzchołkiem usuwającym o bezpośrednim następniku $j$ oraz $X_j = X_i \cup \{v\}$ a funkcja $D_j$ jest już znana, wówczas $D_i(\phi) = \min\{D_j(\psi)\text{: } \psi|_{X_i} \equiv \phi \wedge \psi \in L^{X_j}\}$.
3. Jeżeli $i$ jest wierzchołkiem wprowadzającym o bezpośrednim następniku $j$ oraz $X_i = X_j \cup \{v\}$, a funkcja $D_j$ jest już znana, wówczas mamy $D_i(\phi) = \infty$ dla wszystkich funkcji $\phi$ spełniających $|\phi(v)-\phi(u)| \in T(\{v, u\})$ przy pewnym $u \in X_j$, sąsiadującym z $v$ w $G$. W przeciwnym zaś razie mamy $D_i(\phi) = \max(\phi(v), D_j(\phi|_{X_j}))$.
4. Jeżeli $i$ jest wierzchołkiem łączącym o następnikach $j_1$ i $j_2$, a funkcje $D_{j_1}$ i $D_{j_2}$ są już znane, wówczas $D_i(\phi) = \max(D_{j_1}(\phi), D_{j_2}(\phi))$ dla każdego $\phi \in L^{X_i}$.

Poprawność konstrukcji w punkcie 3 wynika z faktu, że zgodnie z definicją drzewiastej dekompozycji mamy $v \notin V_j$, ani też nie sąsiaduje on w $G_i$ z żadnym wierzchołkiem z $V_j \setminus X_j$. Natomiast w punkcie 4 korzystamy z tego, że zbiory $V_{j_1} \setminus X_i$ oraz $V_{j_2} \setminus X_i$ są rozłączne i niezależne w $G_i$.

Jest widoczne, że wyliczenie $D_i$ na podstawie znanych wartości przypisanych bezpośrednim następnikom $i$ wymaga $O(k|L|^{k+1})$ operacji arytmetycznych. Natomiast $|I|$ jest przy ustalonym $k$ ograniczone z góry funkcją liniową $n$, stąd ostateczna złożoność obliczeniowa całego algorytmu jest wielomianowa i wynosi $O(n|\bigcup_{e \in E} T(e)|^{k+1})$.

LITERATURA

1. Bodlaender H.L.: Treewidth: algorithmic techniques and results. Proc. 22nd Int. Simposium on Mathematical Foundations of Computer Science, LNCS 1295 (1997), pp. 29-36.

2. Hale W.K.: Frequency assignment: Theory and Applications. Proceedings of the IEEE, vol. 68, no. 12, 1980, pp. 1497-1514.
3. Janczewski R.: O złożoności problemu przydziału częstotliwości i kontrastowego kolorowania grafów, Zeszyty Naukowe Polit. Śl., ser. Automatyka 131, 2000, s. 95-101.
4. Janczewski R.: Kontrastowe kolorowanie grafów i jego zastosowania, Praca doktorska, Politechnika Gdańska, wydz. ETI, 2001.
5. Jansen K., Scheffler P.: Generalized coloring for tree-like graphs, Disc. App. Math. 75 (1997), pp. 135 – 155.
6. Tesman B.A.: Applications of forbidden difference graphs to *T*-coloring, Congressus Numerantium 74, 1990, pp. 15-24.


Recenzent: Prof. dr hab. inż. Jerzy Klamka


**Abstract**

Frequency assignment problem (FAP) can be formulated as follows: there is a group of transmitters situated in a certain region of a plane; a channel is to be assigned to each of them in such a way that there is no interference during transmitting and the span of used frequency band is minimal. The paper is devoted to the computational complexity of the graph-theoretical model of FAP based on three notions: interference graphs, *T*-colorings and the *T*-span. The model has been introduced by Hale. We describe it, define interference graphs, *T*-colorings, and the *T*-span. Next, we prove that the problem of computing the *T*-span is NP-hard even for bipartite graphs by reducing the well-known NP-complete 5-colorability problem to our problem. Finally, we present a polynomial time algorithm for finding optimal *T*-coloring for the so-called partial *k*-trees. The algorithm is based on a dynamic programming approach and some properties of trees.