ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 2002
Seria: AUTOMATYKA z. 136 Nr kol. 1556

Tadeusz KACZOREK
Politechnika Warszawska

OBSERWATORY FUNKCJONALNE MINIMALNEGO RZĘDU DYSKRETNYCH UKŁADÓW LINIOWYCH

Streszczenie. Podano nową metodę syntezy (projektowania) obserwatorów funkcjonalnych asymptotycznych i deadbeatowych minimalnego rzędu dyskretnych układów liniowych. Sformułowano warunki istnienia statycznego sprzężenia od wyjścia układu, które dokładnie odtwarza zadaną funkcję liniowego wektora stanu oraz warunki istnienia obserwatorów funkcjonalnych asymptotycznych i deadbeatowych minimalnego rzędu. Podano również procedury syntezy tych obserwatorów funkcjonalnych oraz statycznego sprzężenia od wyjścia. Procedury te zostały zilustrowane przykładami numerycznymi.

DESIGN OF FUNCTIONAL OBSERVERS OF MINIMAL ORDER FOR LINEAR DISCRETE-TIME SYSTEMS

Summary. A new method for designing of the asymptotic and deadbeat functional observers of minimal order for linear discrete-time systems is proposed. Necessary and sufficient conditions are established for the existence of a static output-feedback that reconstruct exactly a given linear function of state vector. Existence conditions of the asymptotic and deadbeat functional observers of minimal order are also established. Procedures for computation of matrices of the functional observer and the static output-feedback are derived and illustrated by numerical examples.

1. Wprowadzenie

Obserwatorem funkcjonalnym nazywamy układ dynamiczny, który na podstawie znajomości wymuszenia i odpowiedzi obiektu wyznacza estymatę zadanej funkcji liniowej wektora stanu tego obiektu (układu). Obserwator funkcjonalny o skończonym czasie trwania przebiegów przejściowych nazywamy deadbeatowym, a stabilny obserwator funkcjonalny o nieskończonym czasie trwania przebiegów przejściowych obserwatorem asymptotycznym. Obserwatory funkcjonalne układów liniowych były rozpatrywane w wielu pracach [1, 4, 7-

10]. W ostatnich latach dużo uwagi poświęcono algorytmom syntezy (projektowania) obserwatorów funkcjonalnych minimalnego rzędu ciągłych układów liniowych. Chia-Chi Tsui w pracach [8-10] podał różne algorytmy oraz coraz to lepsze oszacowanie minimalnego rzędu obserwatorów funkcjonalnych liniowych układów ciągłych. Najlepsze z tych oszacowań minimalnego rzędu jest następujące [8]:$min\{n, v_1 + ... + v_m\}$ oraz $min\{n - p, (v_1 - 1) + ... + (v_m - 1)\}$, gdzie n, m, p i v_i ($i = 1, ... , p$) są odpowiednio rzędem obiektu, liczbą wejść, liczbą wyjść obiektu oraz indeksami obserwowalności obiektu.

Celem tej pracy jest podanie nowej metody syntezy (projektowania) obserwatorów funkcjonalnych asymptotycznych i deadbeatowych minimalnego rzędu dyskretnych układów liniowych. Zostaną podane warunki istnienia statycznego sprzężenia od wyjścia, które dokładnie odtwarza zadaną funkcję liniową wektora stanu obiektu oraz warunki istnienia obserwatorów funkcjonalnych asymptotycznych i deadbeatowych minimalnego rzędu. Zostaną podane również procedury syntezy tych obserwatorów funkcjonalnych oraz statycznego sprzężenia od wyjścia.

2. Sformułowanie zadania

Niech $R^{n\times m}$ będzie zbiorem macierzy o elementach z ciała liczb rzeczywistych i wymiarach $n\times m$ oraz $R^n = R^{n\times 1}$. Dany jest dyskretny układ liniowy opisany równaniem

$$x_{i+1} = Ax_i + Bu_i \tag{1a}$$
$$y_i = Cx_i, \tag{1b}$$

przy czym $x_i \in R^n$, $u_i \in R^m$ i $y_i \in R^p$ są odpowiednio wektorami stanu, wymuszenia (sterowania) i odpowiedzi, a A, B i C macierzami rzeczywistymi o odpowiednich wymiarach. Zakładamy, że para (A, C) jest obserwowalna oraz rząd $C = p$.

Poszukiwać będziemy obserwatora funkcjonalnego minimalnego rzędu r układu (1) opisanego równaniami:

$$z_i = Fz_i + Gu_i + Hy_i \quad , z_i \in R^r,\ F \in R^{r\times r},\ G \in R^{r\times m},\ H \in R^{r\times p} \tag{2a}$$
$$w_i = Lz_i + My_i \quad , w_i \in R^q,\ L \in R^{q\times r},\ M \in R^{q\times p}, \tag{2b}$$

który odtwarza asymptotycznie, tj. $\lim_{i\to\infty}[w_i - Kx_i] = 0$, zadaną funkcję wektora stanu

$$Kx_i, \tag{3}$$

przy czym macierz $K \in R^{q\times n}$ jest znana.

Zadanie nasze można więc sformułować następująco: Znane są macierze A, B, C układu (1) oraz macierz K. Należy wyznaczyć minimalny rząd r oraz macierze F, G, H, L i M obserwatora (2).

3. Rozwiązanie zadania

3.1. Obserwatory asymptotyczne

Niech

$$e_i = z_i - Tx_i, \quad T \in R^{r \times n} \tag{4}$$

Korzystając z (4), (1) i (2a) możemy napisać

$$\begin{aligned} e_{i+1} &= z_{i+1} - Tx_{i+1} = Fz_i + Gu_i + Hy_i - T(Ax_i + Bu_i) = \\ &= Fe_i + (FT + HC - TA)x_i + (G - TB)u_i \end{aligned} \tag{5}$$

Dla

$$FT + HC - TA = 0 \ \text{ i } \ G = TB \tag{6}$$

zależność (5) przyjmuje postać

$$e_{i+1} = Fe_i \tag{7}$$

Rozwiązanie

$$e_i = F^i e_0 \tag{8}$$

równania (7) zanika asymptotycznie do zera dla $i \to \infty$ dla dowolnego $e(0)$ wtedy i tylko wtedy, gdy macierz F ma wszystkie wartości własne wewnątrz koła jednostkowego (jest macierzą Schura).

Z zależności (4) wynika, że $z_i \to Tx_i$ wtedy i tylko wtedy, gdy $e_i \to 0$ dla $i \to \infty$. W tym przypadku w stanie ustalonym

$$Kx_i = (LT + MC)x_i \tag{9}$$

oraz

$$K = LT + MC = \begin{bmatrix} L & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ C \end{bmatrix} \tag{10}$$

W równaniu (10) znane są macierze K i C, a poszukujemy macierzy L, M i T o możliwie najmniejszej liczbie wierszy macierzy T.

Z twierdzenia Kroneckera-Capellego [5] wynika, że istnieje macierz $M \in R^{q \times p}$ taka, że $K = MC$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\text{rząd}\, C = \text{rząd}\begin{bmatrix} C \\ K \end{bmatrix} \tag{11}$$

W tym przypadku $T = 0$, $r = 0$ rekonstrukcja funkcji stanu (3) nie wymaga obserwatora dynamicznego (2), a jedynie wyznaczenia macierzy M jako rozwiązania równania $MC = K$. Para (A, C) (układ (1)) jest obserwowalna wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\text{rząd}\, Q = n, \tag{12}$$

przy czym

$$Q = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}, A \in R^{n\times n}, C \in R^{p\times n}$$

W dalszych rozważaniach korzystać będziemy z następującego lematu, którego dowód podany jest w dodatku.

Lemat 1. Dla danej pary (A, C) istnieją macierze nieosobliwe $T \in R^{n\times n}, C_1 \in R^{p\times p}$ oraz macierz $A_1 \in R^{n\times p}$ takie, że

$$\overline{A} = TAT^{-1} = \left[A_1 \begin{array}{c} I_{n-p} \\ \hdashline 0 \end{array} \right], \overline{C} = CT^{-1} = [C_1 \quad 0] \tag{13}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\text{rząd}\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \cdots\cdots \\ CA^{q} \end{bmatrix} = n, \tag{14}$$

gdzie q jest najmniejszą liczbą naturalną nie mniejszą od $\dfrac{n-p}{p}$.

Niech

$$K = [K_1, K_2], K_1 \in R^{q\times p}, K_2 \in R^{q\times(n-p)}, T = [T_1, T_2], T_1 \in R^{r\times p}, T_2 \in R^{r\times(n-p)} \tag{15}$$

Jeżeli macierz C ma postać

$$C = [C_1 \quad 0], \det C_1 \neq 0, \tag{16}$$

to korzystając z (10) i (15) otrzymujemy $[K_1, K_2] = L[T_1, T_2] + M[C_1, 0]$ oraz

$$K_1 = LT_1 + MC_1 \tag{17a}$$

$$K_2 = LT_2 \tag{17b}$$

Niech rząd $K_2 = r \le q$. Z zależności (17b) oraz z faktu, że $rząd[LT_2] \le min(\,rząd\ L,\ rząd\ \ T_2)$ [5] wynika, że liczba wierszy macierzy T może być co najwyżej równa r. Stanowi to dolne ograniczenie na minimalny rząd poszukiwanego obserwatora (2).

Z zależności (6) i (16) mamy

$$[TA - FT]\begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & I_{n-p} \end{bmatrix} = H[C_1 \quad 0] \tag{18}$$

oraz

$$[TA - FT]\begin{bmatrix} I_p \\ 0 \end{bmatrix} = HC_1 \tag{19}$$

$$[TA - FT]\begin{bmatrix} 0 \\ I_{n-p} \end{bmatrix} = 0 \tag{20}$$

Jeżeli macierz A ma postać

$$A = \left[A_1 \; \begin{matrix} I_{n-p} \\ \hdashline 0 \end{matrix} \right], \tag{21}$$

to równanie (20) przyjmuje postać

$$T\begin{bmatrix} I_{n-p} \\ \hdashline 0 \end{bmatrix} = FT_2, \tag{22}$$

gdyż $A\begin{bmatrix} 0 \\ I_{n-p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n-p} \\ \hdashline 0 \end{bmatrix}$ oraz $T\begin{bmatrix} 0 \\ I_{n-p} \end{bmatrix} = T_2$.

Niech F będzie stabilną macierzą diagonalną

$$F = diag[z_1 \quad z_2 \quad \ldots \quad z_r],\ z_i \ne z_j \ \text{ dla } \ i \ne j, |z_i| < 1,\ i = 1, \ldots, r \tag{23}$$

Biorąc pod uwagę (23) i $T = [t_{ij}] \in R^{r \times n}$ możemy równanie (22) napisać w postaci

$$\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1,n-p} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2,n-p} \\ \hdashline t_{r1} & t_{r2} & \cdots & t_{r,n-p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 t_{1,p+1} & z_1 t_{1,p+2} & \cdots & z_1 t_{1,n} \\ z_2 t_{2,p+1} & z_2 t_{2,p+2} & \cdots & z_2 t_{2,n} \\ \hdashline z_r t_{r,p+1} & z_r t_{r,p+2} & \cdots & z_r t_{r,n} \end{bmatrix} \tag{24}$$

Równość (24) określa zależności między elementami macierzy T oraz pozwala część tych elementów wybrać dowolnie i wyrazić pozostałe elementy w funkcji tych wybranych. Jeżeli $n \le 2p$, to macierz T_2 można wybrać dowolnie, a $T_1 = FT_2$.

Znając K_2 i T_2 możemy wyznaczyć z równania (17b) macierz L wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\text{rząd}\, T_2 = \text{rząd} \begin{bmatrix} T_2 \\ K_2 \end{bmatrix} \tag{25}$$

Następnie znając T_1, L_1, L i C_1 z równania (17a) możemy wyznaczyć macierz

$$M = (K_1 - LT_1)C_1^{-1} \tag{26}$$

Z przedstawionych rozważań wynika następująca procedura syntezy obserwatora funkcjonalnego (2) dla układu (1).

Procedura 1

Krok 1. Macierze A, C sprowadzamy do postaci kanonicznej (14).

Krok 2. Wyznaczamy rząd macierzy K_2 i przyjmujemy $r = rząd\, K_2$.

Krok 3. Przyjmując macierz F w postaci (23) wyznaczamy ograniczenia (24) na elementy macierzy T oraz macierze T_2 i T_1.

Krok 4. Sprawdzamy czy jest spełniony warunek (25). Jeżeli tak, to z równania (17b) wyznaczamy macierz L. Jeżeli warunek (25) nie jest spełniony, to zwiększamy r o jeden i powtarzamy krok 3.

Krok 5. Z zależności (26) oraz

$$G = TB, H = [TA_1 - FT_1]C_1^{-1} \tag{27}$$

wyznaczamy macierze M, G i H.

Krok 6. Korzystając z równań (2) wyznaczamy poszukiwany obserwator funkcjonalny (2).

Uwaga. Rząd obserwatora (2) nie przekracza wartości $n-p$, gdyż dla $r = n-p$ macierz T_2 jest macierzą nieosobliwą i warunek (25) jest spełniony dla każdej macierzy K_2.

Lemat 2. Jeżeli macierz T_2 można wybrać dobrowolnie i rząd $K_2 = r$, to $L = K_{21}$, przy czym $K_2 = K_{21}K_{22}, K_{21} \in R^{q\times r}, K_{22} \in R^{r\times(n-p)}$.

Dowód. Jeżeli rząd $K_2 = r$, to macierz K_2 można przedstawić jako iloczyn macierzy K_{21} i K_{22}, z których każda ma rząd równy r [5]. Jeżeli T_2 jest dowolna, to możemy wybrać $T_2 = K_{22}$, a wtedy zgodnie z (17b) $L = K_{21}$.

Z powyższych rozważań wynika więc następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1. Jeżeli układ (1) spełnia warunek (14), to istnieje obserwator funkcjonalny (2) rzędu r spełniający warunek

$$rząd\ K_2 \le r \le n-p \tag{28}$$

Przykład 1. Wyznaczyć obserwator funkcjonalny (2) układu (1) o macierzach:

$$A=\begin{bmatrix}2&1&1&0\\0&2&0&1\\1&-1&0&0\\1&2&0&0\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\-1&2\\1&0\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix},\tag{29}$$

który odtwarza asymptotycznie funkcję liniową Kx_i dla

$$K=\begin{bmatrix}1&2&1&-1\\3&4&-2&2\end{bmatrix}\tag{30}$$

W tym przypadku mamy $n = 4$, $m = p = q = 2$. Łatwo sprawdzić, że para (A, C) spełnia warunek (14). Istnieje więc obserwator funkcjonalny (2) dla tego układu. Korzystając z procedury 1 otrzymamy kolejno:

Krok 1. Para (A,C) macierzy (29) ma już postać kanoniczną (14), a macierz $C_1 = I_2$.

Krok 2. Z (30) mamy

$$K_2=\begin{bmatrix}1&-1\\-2&2\end{bmatrix},r=\text{rząd }K_2=1$$

Krok 3. Przyjmując $F=[0.1]$ z zależności (24) dla $T=[T_1,\ T_2]=[t_1,t_2 \vdots t_3,t_4]$

otrzymamy $[t_1,\ t_2]=[0.1t_3, 0.1t_4]$.

Macierz $T_2=[t_3,t_4]$ możemy więc wybrać dowolnie.

Krok 4. Warunek (25) jest spełniony dla $T_2=[1,-1]$, a macierz $L=\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}$, gdyż

macierz K_2 możemy przedstawić w postaci

$$K_2=\begin{bmatrix}1&-1\\-2&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}[1\ -1]$$

Krok 5. Korzystając z zależności (26) i (27) otrzymamy

$$M=(K_1-LT_1)C_1^{-1}=\begin{bmatrix}0.9\ ,&2.1\\3.2\ ,&3.8\end{bmatrix},G=TB=[-1.9\ ,1.9],H=[TA_1-FT_1]C_1^{-1}=[0.19,-3.09]$$

Krok 6. Poszukiwany obserwator funkcjonalny ma postać

$$z_{i+1}=0.1z_i+[-1.9,\ 1.9]u_i+[0.19,-3.09]y_i$$

$$w_i=\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}z_i+\begin{bmatrix}0.9\ ,&2.1\\3.2\ ,&3.8\end{bmatrix}y_i$$

Istotny wpływ na minimalny rząd obserwatora funkcjonalnego ma macierz K. Dla tego samego układu (1) ale różnych K otrzymamy na ogół różne minimalne rzędy obserwatorów funkcjonalnych (2).

Przykład 2. Niech macierze A,B,C układu (1) mają postać (29), ale macierz K niech ma postać

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & -2 & 2 \end{bmatrix}, \tag{31}$$

różniącą się od (30) tylko znakiem ostatniego elementu pierwszego wiersza.

Korzystając z procedury 1 otrzymamy kolejno:

Krok 1. Para (A,C) macierzy (29) ma już postać kanoniczną (14), a macierz $C_1 = I_2$.

Krok 2. Z (31) mamy

$$K_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \text{ oraz } r = \text{rząd } K_2 = 2$$

Krok 3. Przyjmując $F = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}$ z zależności $T_1 = FT_2$ otrzymamy

$$\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1t_{13} & 0.1t_{14} \\ 0.2t_{23} & 0.2t_{24} \end{bmatrix}$$

Macierz T_2 możemy więc wybrać dowolnie.

Krok 4. Warunek (25) jest spełniony dla każdej nieosobliwej macierzy T_2.

Rozwiązując równanie (17b) dla $T_2 = I_2$ otrzymamy

$$L = K_2 T_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Krok 5. Korzystając z zależności (26) i (27) otrzymamy

$$M = (K_1 - LT_1)C_1^{-1} = \begin{bmatrix} 0.9\,, 1.8 \\ 3.2\,, 3.6 \end{bmatrix}, G = TB = \begin{bmatrix} -0.9\,, & 2 \\ 1 & , 0.2 \end{bmatrix}, H = [TA_1 - FT_1]C_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1.19\,, -0.9 \\ 1 \quad, 2.36 \end{bmatrix}$$

Krok 6. Poszukiwany obserwator funkcjonalny ma postać

$$z_{i+1} = \begin{bmatrix} 0.1\,, & 0 \\ 0 & , 0.2 \end{bmatrix} z_i + \begin{bmatrix} -0.9\,, & 2 \\ 1 & , 0.2 \end{bmatrix} u_i + \begin{bmatrix} 1.19\,, -0.9 \\ 1 \quad, 2.36 \end{bmatrix} y_i$$

$$w_i = \begin{bmatrix} 1 & , 1 \\ -2 & , 2 \end{bmatrix} z_i + \begin{bmatrix} 0.9\,, 1.8 \\ 3.2\,, 3.6 \end{bmatrix} y_i$$

3.2. Obserwatory deadbeatowe

Obserwatorem deadbeatowym nazywamy obserwator o skończonym czasie trwania przebiegów przejściowych. Obserwator funkcjonalny (2) nazywać będziemy obserwatorem deadbeatowym układu (1) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba naturalna r_0 taka, że

$$w_i = Kx_i \text{ dla wszystkich } i \geq r_0 \tag{32}$$

Wykażemy, że jeżeli układ (1) spełnia warunek (14), to istnieje obserwator deadbeatowy o postaci (2), dla którego r_0 spełnia warunek

$$1 < \text{rząd } K_2 \leq r_0 \leq n - p \tag{33}$$

Zakładamy, że macierze A i C mają postacie odpowiednio (16) i (21).
W przypadku obserwatora deadbeatowego jako macierz F wybieramy macierz nilpotentną o postaci

$$F = \begin{bmatrix} 0 & I_{r-1} \\ \hline & 0 \end{bmatrix} \in R^{r \times r} \tag{34}$$

W tym przypadku równanie (22) ma postać

$$\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1,n-p} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2,n-p} \\ \hline t_{r1} & t_{r2} & \cdots & t_{r,n-p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{2,p+1} & t_{2,p+2} & \cdots & t_{2,n} \\ t_{3,p+1} & t_{3,p+2} & \cdots & t_{3,n} \\ \hline t_{r,p+1} & t_{r,p+2} & \cdots & t_{r,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \tag{35}$$

Równość (35) określa zależności między elementami macierzy T oraz pozwala część tych elementów wybrać dowolnie i pozostałe elementy wyrazić w funkcji tych wybranych.
Jeżeli $n \leq 2p$, to macierz T_2 można wybrać dowolnie, a $T_1 = FT_2$.

Lemat 3. Jeżeli macierz T_2 można wybrać dowolnie, to

$$r_0 = r = \text{rząd } K_2 \tag{36}$$

Dowód. Jeżeli T_2 można wybrać dowolnie, to warunek (25) jest spełniony i z równania (17b) możemy wyznaczyć macierz L, a następnie z zależności (26) i (27) macierze M, G i H. Jeżeli macierz F ma postać (34), to łatwo wykazać, że

$$F^i = 0 \quad \text{dla } i \geq r \tag{37}$$

W tym przypadku z (8) mamy $e_i = 0$ dla $i \geq r$, a to implikuje spełnienie warunku (32) dla $i \geq r_0 = r$.

Z przedstawionych rozważań wynika następujące twierdzenie:

Twierdzenie 2. Jeżeli układ (1) spełnia warunek (14), to istnieje deadbeatowy obserwator funkcjonalny (2) rzędu r spełniający warunek

$$1<\text{rząd } K_2 \le r \le n-p, \qquad (38)$$

który odtwarza dokładnie funkcję liniową Kx_i po czasie nie dłuższym niż jego rząd.

Procedura syntezy deadbeatowego obserwatora jest następująca:

Procedura 2.

Kroki 1 i 2 są takie same jak w procedurze 1.

Krok 3. Przyjmując macierz F w postaci (34) wyznaczamy ograniczenia (35) na elementy macierzy T oraz macierze T_2 i T_1.

Kroki 4-6 są takie same jak w procedurze 1.

Przykład 3. Wyznaczyć deadbeatowy obserwator funkcjonalny (2) dla układu (1) o macierzach (29) i macierzy K o postaci (31).

Kroki 1 i 2 są takie same, jak w przykładzie 2, a więc $r=2$.

Krok 3. Przyjmując $F=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$ z zależności (35) otrzymamy $\begin{bmatrix}t_{11}&t_{12}\\t_{21}&t_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}t_{23}&t_{24}\\0&0\end{bmatrix}$.

Macierz $T_2=\begin{bmatrix}t_{13}&t_{14}\\t_{23}&t_{24}\end{bmatrix}$ możemy wybrać dowolnie, a $T_1=\begin{bmatrix}t_{23}&t_{24}\\t_{21}&t_{22}\end{bmatrix}$, przy czym $t_{21}\,t_{22}$ są równie dowolne.

Krok 4. Macierz T_2 wybieramy tak, aby był spełniony warunek (25), na przykład $T_2=I_2$. W tym przypadku z równania (17b) dostaniemy $L=K_2=\begin{bmatrix}1&1\\-2&2\end{bmatrix}$.

Krok 5. Przyjmując $T_1=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$ z zależności (26) i (27) otrzymamy

$$M=(K_1-LT_1)C_1^{-1}=\begin{bmatrix}1&1\\3&6\end{bmatrix}, G=TB=\begin{bmatrix}-1&3\\1&0\end{bmatrix}, H=[TA_1-FT_1]C_1^{-1}=\begin{bmatrix}1&1\\1&2\end{bmatrix}$$

Krok 6. Poszukiwany deadbeatowy obserwator funkcjonalny ma postać

$$z_{i+1}=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}z_i+\begin{bmatrix}-1&2\\1&0\end{bmatrix}u_i+\begin{bmatrix}1&1\\1&2\end{bmatrix}y_i$$

$$w_i=\begin{bmatrix}1&1\\-2&2\end{bmatrix}z_i+\begin{bmatrix}1&1\\3&6\end{bmatrix}y_i$$

4. Wnioski, uogólnienia i problemy otwarte

Podano nową metodę syntezy obserwatorów funkcjonalnych asymptotycznych i deadbeatowych minimalnego rzędu dyskretnych układów liniowych. Sformułowano warunki konieczne i wystarczające istnienia statycznego sprzężenia zwrotnego od wyjścia, które dokładnie (z uchybem zerowym) odtwarza zadaną funkcję liniową wektora stanu. Wykazano, że jeżeli układ spełnia warunek (14), to istnieje obserwator funkcjonalny asymptotyczny rzędu *r*, spełniającego warunek (28) oraz obserwator funkcjonalny deadbeatowy rzędu *r*, spełniającego warunek (38), który odtwarza dokładnie zadaną funkcję liniową wektora stanu po czasie nie dłuższym niż jego rząd. Podano procedury wyznaczania tych obserwatorów, które zostały zilustrowane na trzech przykładach. Metodę syntezy asymptotycznych obserwatorów funkcjonalnych można stosować również do ciągłych układów liniowych. Problemem otwartym jest uogólnienie tej metody na układy singularne [4] oraz standardowe i singularne układy dwuwymiarowe [4,6].

LITERATURA

1. Kaczorek T.: Perfect functional observers of singular continuous-time linear systems, Machine Intelligence & Robotic Control, vol. 3, No 2, 2001, pp. 77-82.
2. Kaczorek T.: Full-order perfect observers for continuous-time linear systems, Pomiary Automatyka Kontrola, 1/2001.
3. Kaczorek T.: Full-order Perfect Observers for Continuous-time Linear Systems, Bull. Pol. Acad. Tech. Sci., Vol. 49, No. 4, 2001.
4. Kaczorek T.: Teoria sterownia i systemów. PWN, Warszawa 1999.
5. Kaczorek T.: Wektory i macierze w automatyce i elektrotechnice. WNT, Warszawa 1998.
6. Kaczorek T.: Perfect Observers for Singular 2-D Fornasini-Marchesini Models, IEEE Trans. Autom. Control, Vol. 46, No. 10, 2001, pp. 1-4.
7. O' Reilly J.: Observers for Linear Systems, Academic Press, London 1983.
8. Tsui C.C.:What is the Minimum Function Observer Order ?, Journal of The Franklin Institute, Volume: 335, Issue: 4, May, 1998, pp. 623-628.
9. Tsui C.C.: A New Algorithm for Design of Multifunctional Observers, IEEE Trans. Autom. Control, Vol. AC-30, 1985, pp. 89-93.
10. Tsui C.C.:, On the order reduction of linear function observers, IEEE Trans. Autom. Control, Vol. AC-31,1986, pp. 447-449.

Recenzent: Prof. dr hab. Jerzy Klamka

Abstract

In the paper linear finite-dimensional, discrete-time control systems with constraint coefficients are considered. Next, observation problem for these systems is defined and explained. Moreover, formal definition of deadbeat functional observer is given.

A new method for designing of the asymptotic and deadbeat functional observers of minimal order for linear discrete-time systems is proposed. necessary and sufficient conditions are established for the existence of a static output-feedback that reconstruct exactly a given linear function of state vector. existence conditions of the asymptotic and deadbeat functional observers of minimal order are also established. procedures for computation of matrices of the functional observer and the static output-feedback are derived and illustrated by numerical examples.

Functional observers for different types of dynamical systems have been discussed in many papers and monographs. The present paper extends certain results given in papers [1,4,7-10]. Moreover, the paper contains several remarks and comments concerning deadbeat observers for linear discrete control systems.

Dodatek

Lemat 1. Dla danej pary (A,C) istnieją macierze nieosobliwe $T \in R^{n\times n}, C_1 \in R^{p\times p}$ oraz macierz $A_1 \in R^{n\times p}$ takie, że

$$\overline{A} = TAT^{-1} = \left[A_1 \; \begin{matrix} I_{n-p} \\ 0 \end{matrix} \right], \overline{C} = CT^{-1} = [C_1 \quad 0] \tag{A.1}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\text{rząd} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \dots\dots \\ CA^q \end{bmatrix} = n, \tag{A.2}$$

gdzie q jest najmniejszą liczbą naturalną nie mniejszą od $\frac{n-p}{p}$.

Dowód

Niech
$$T=\begin{bmatrix}T_1\\T_2\\\vdots\\T_{q+1}\end{bmatrix},\ T_i\in R^{p\times n}, i=1,\dots,q,\ T_{q+1}\in R^{(n-pq)\times n} \tag{A.3}$$

oraz

$$A_1=\begin{bmatrix}\overline{A}_1\\\overline{A}_2\\\vdots\\\overline{A}_{q+1}\end{bmatrix},\ \overline{A}_i\in R^{p\times p}, i=1,\dots,q,\ \overline{A}_{q+1}\in R^{(n+p-pq)\times p} \tag{A.4}$$

Korzystając (A.1), (A.3) i (A.4) otrzymamy:

$$C=[C_1\ \ 0]T\text{, czyli } T_1=C_1^{-1}C \tag{A.5}$$

oraz

$$\begin{bmatrix}T_1\\T_2\\\vdots\\T_{q+1}\end{bmatrix}A=\begin{bmatrix}\overline{A}_1 & I_p & 0 & \cdots & 0\\\overline{A}_2 & 0 & I_p & \cdots & 0\\\overline{A}_{q+1} & 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}T_1\\T_2\\\vdots\\T_{q+1}\end{bmatrix} \tag{A.6}$$

Z (A.6) mamy

$$T_1A=\overline{A}_1T_1+T_2, T_2A=\overline{A}_2T_1+T_3,\dots,T_qA=\overline{A}_qT_1+T_{q+1},$$

czyli

$$T_{i+1}=T_iA-\overline{A}_iT_1\quad\text{dla}\quad i=1,\dots,q \tag{A.7}$$

Korzystając z (A.7) wykażemy, że macierz T jest nieosobliwa wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony warunek (A.2). Biorąc pod uwagę (A.3), (A.5) i (A.7) możemy napisać

$$T=\begin{bmatrix}T_1\\T_2\\T_3\\\vdots\\T_{q+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}T_1\\T_1A-\overline{A}_1T_1\\T_2A-\overline{A}_2T_1\\\vdots\\T_qA-\overline{A}_qT_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I_p & 0 & 0 & \cdots & 0\\-\overline{A}_1 & I_p & 0 & \cdots & 0\\-\overline{A}_2 & -\overline{A}_1 & I_p & \cdots & 0\\-\overline{A}_q & -\overline{A}_{q-1} & \cdots & \cdots & I_p\end{bmatrix}\begin{bmatrix}T_1\\T_1A\\T_1A^2\\\vdots\\T_1A^q\end{bmatrix} \tag{A.8}$$

Z zależności (A.8) wynika, że

$$\text{rząd}\,T = \text{rząd}\begin{bmatrix} T_1 \\ T_1A \\ \vdots \\ T_1A^q \end{bmatrix} = \text{rząd}\begin{bmatrix} C_1^{-1}C \\ C_1^{-1}CA \\ \vdots \\ C_1^{-1}CA^q \end{bmatrix} = \text{rząd}\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^q \end{bmatrix}$$