ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 2002
Seria: AUTOMATYKA z. 136 Nr kol. 1556

Marek KUBALE, Adrian KOSOWSKI
Politechnika Gdańska

ALGORYTMY RADIOWEGO KOLOROWANIA GRAFÓW

Streszczenie. W pracy opisane są podstawowe zasady i właściwości radiowego kolorowania grafów. Podane są oszacowania radiowej liczby chromatycznej grafu w przypadku ogólnym dla ścieżek i cykli oraz dokładne wartości radiowej liczby chromatycznej dla grafów pełnych *k*-dzielnych, kół i dwugwiazd. Zamieszczono także przykładowe wyniki porównania dobroci suboptymalnych, sekwencyjnych algorytmów radiokolorowania grafów.

ALGORITHMS FOR RADIOCOLORING OF GRAPHS

Summary. The basic principles and features of graph radiocoloring are presented in this paper. Lower and upper bounds for the radiochromatic number of graphs are given, in the general case as well as for paths and cycles. Exact values of the radiochromatic number are given for complete *k*-parite graphs, wheels and double stars. The paper also contains a comparison of the quality of suboptimal, sequential radiocoloring algorithms having polynomial-time complexity.

1. Wprowadzenie

Przydział częstotliwości roboczych w sieciach telefonii komórkowej jest procesem dyskretnym, polegającym na optymalnej gospodarce ograniczonego pasma częstotliwości. Obszar działania sieci komórkowej dzieli się na pojedyncze komórki, które posiadają bazową stację nadawczą. Stacje bazowe połączone są za pomocą sieci o wysokiej przepustowości. W celu nawiązania połączenia telefonicznego użytkownik sieci musi wysłać zgłoszenie do stacji bazowej swojej komórki. Żądanie może zostać obsłużone, jeśli stacja jest w stanie przydzielić użytkownikowi wolny kanał komunikacji bezprzewodowej o określonej częstotliwości sygnału. Kanały o tej samej częstotliwości ze względu na interferencję nie mogą być używane w komórkach znajdujących się blisko siebie, dopuszczalne są natomiast w odległych

komórkach. Próbą zamodelowania tej sytuacji jest tzw. radiowe kolorowanie wierzchołków grafu [1, 2, 3].

Radiowe kolorowanie (radiokolorowanie) wierzchołkowe grafu spójnego jest szczególnym przypadkiem klasycznego kolorowania wierzchołkowego grafu, powstałym na skutek wzmocnienia warunku na minimalne odległości kolorów pomiędzy wierzchołkami. Przy radiokolorowaniu wymagana jest nie tylko różnica kolorów dla wierzchołków bezpośrednio sąsiadujących, ale dla wszystkich par wierzchołków spójnego grafu. Narzucona różnica kolorów jest tym większa, im bliżej siebie wierzchołki znajdują się w kolorowanym grafie. Pierwotnie postawiony problem radiokolorowania polegał na minimalizacji szerokości pasma nadawczego przy przydzielaniu częstotliwości roboczych dla stacji radiotelefonicznych. Stacje znajdujące się blisko siebie powinny nadawać na odpowiednio dalekich częstotliwościach; interferencja pomiędzy stacjami słabnie ze wzrostem odległości między nimi.

2. Radiowe kolorowanie grafu

Niech G będzie grafem spójnym o $n \geq 2$ wierzchołkach, złożonym ze zbioru wierzchołków $V = \{v_1, ..., v_n\}$ i zbioru krawędzi E. Dla każdej pary różnych wierzchołków $v_i, v_j \in V$ symbolem $d(v_i, v_j)$ oznaczamy *odległość* wierzchołków v_i i v_j w grafie G, czyli liczbę krawędzi najkrótszej drogi łączącej v_i i v_j. Dla grafu G definiujemy niezmiennik zwany *średnicą grafu* $\mathrm{diam}(G)$, określony wzorem: $\mathrm{diam}(G) = \max_{i,j}\{d(v_i, v_j) : 1 \leq i < j \leq n\}$.

Definicja 1. *Radiopokolorowaniem* (wierzchołkowym) grafu G nazywamy każdą funkcję $c : V \to \{1, ..., s\}$, która dla kolejnych argumentów ze zbioru V przyjmuje wartości $c_1 \equiv c(v_1), ..., c_n \equiv c(v_n)$ takie, że:

$$\forall_{1 \leq i < j \leq n} (d(v_i, v_j) + |c_i - c_j| > \mathrm{diam}(G)).$$

Wartość c_i można interpretować jako barwę (kolor), częstotliwość, czy inną wielkość fizyczną opisującą obiekt odpowiadający wierzchołkowi v_i.

Liczbę $s = \max\{c_i : 1 \leq i \leq n\}$ nazywać będziemy *rozpiętością* radiopokolorowania c grafu G. Wówczas o grafie G powiemy, że jest *radiokolorowalny s* kolorami.

Definicja 2. Najmniejszą liczbę s, taką że s jest rozpiętością pewnego radiopokolorowania grafu G, nazywamy *radiową liczbą chromatyczną* (albo *liczbą radiową*) grafu G i oznaczamy $\chi_R(G)$. Radiopokolorowanie grafu G nazwiemy *optymalne*, jeżeli jego rozpiętość wynosi $\chi_R(G)$.

Liczbę radiową grafu można interpretować nie tylko jako górne ograniczenie dla przydzielanego stacjom radiowym pasma nadawczego. Liczba radiowa grafu jest jednocześnie poszukiwaną minimalną szerokością pasma.

Definicje 1 i 2 prowadzą bezpośrednio do dwóch ważnych wniosków.

Wniosek 1. *Żadne legalne radiopokolorowanie c nie może zawierać dwóch identycznych wyrazów w ciągu kolorów.*

Rzeczywiście, z definicji 1 wynika: $\forall_{1\le i<j\le n}[d(v_i,v_j)+|c_i-c_j|>\mathrm{diam}(G)]\Rightarrow$

$$\Rightarrow \forall_{1\le i<j\le n}[\mathrm{diam}(G)+|c_i-c_j|>\mathrm{diam}(G)]\Leftrightarrow \forall_{1\le i<j\le n}|c_i-c_j|>0.$$

Wniosek 2. *Każde radiopokolorowanie grafu jest również klasycznym legalnym pokolorowaniem wierzchołkowym tego grafu.*

Rzeczywiście, na mocy wniosku 1 wszystkie wierzchołki mają różne kolory, a więc również każda para sąsiednich wierzchołków ma różne kolory.

3. Oszacowania radiowej liczby chromatycznej grafów

Znajdowanie liczby radiowej grafów jest przypuszczalnie problemem niewielomianowym.

Twierdzenie 1 [5]. *Dla grafów o średnicy 2 problem znajdowania liczby radiowej jest NP-trudny.*

Dla grafów o większej średnicy problem ten może okazać się nie mniej trudny. Co gorsza, w ogólnym przypadku nie są znane żadne silne oszacowania dla liczby radiowej. Jedno z możliwych oszacowań $\chi_R(G)$ zawarte jest w następującym twierdzeniu.

Twierdzenie 2. *Radiowa liczba chromatyczna grafu G spełnia zależności:*

$$n\le\chi_R(G)\le(n-1)\cdot\mathrm{diam}(G)+1$$

Dowód. ($n \le \chi_R(G)$). Na mocy wniosku 1 wszystkie kolory przydzielane wierzchołkom muszą być różne. Ponieważ pokolorowanie składa się z ciągu n dodatnich liczb naturalnych, przynajmniej jedna z nich jest nie mniejsza od n, a więc również χ_R jest nie mniejsze od n.

($\chi_R \le (n-1)\cdot \mathrm{diam}(G)+1$). Przydzielając kolejnym wierzchołkom grafu kolory: $c_1 = 1$, $c_2 = \mathrm{diam}(G)+1$, $c_3 = 2\cdot\mathrm{diam}(G)+1,\ldots, c_n = (n-1)\cdot\mathrm{diam}(G)+1$ otrzymamy radiopokolorowanie grafu $(n-1)\cdot\mathrm{diam}(G)+1$ kolorami. ■

Bezpośrednią konsekwencją twierdzenia 2 jest wniosek 3.

Wniosek 3. *Jeżeli $G_2, G_3, G_4,\ldots,G_n$ jest ciągiem grafów o stałej średnicy, czyli* $\mathrm{diam}(G_n) = \theta(1)$, *to* $\chi_R(G_n) = \theta(n)$.

Twierdzenie 3. *Jeżeli dla pewnej klasy grafów $G_2, G_3, G_4,\ldots, G_n$ średnica kolejnych grafów ciągu rośnie liniowo wraz z rzędem grafu n, czyli* $\mathrm{diam}(G_n) = \theta(n)$, *to* $\chi_R(G_n) = \theta(n^2)$.

Dowód. Obierzmy taki ciąg wierzchołków $u_1, u_2,\ldots, u_{\mathrm{diam}(G)+1}$ grafu G, że $\forall_{1\le i\le \mathrm{diam}(G)}\ d(u_i, u_{i+1}) = 1$ oraz $d(u_1, u_{\mathrm{diam}(G)+1}) = \mathrm{diam}(G)$. Nietrudno zauważyć, że w każdym legalnym pokolorowaniu grafu G musi zachodzić następująca nierówność: $\forall_{1\le i<j\le\lceil \mathrm{diam}(G)/2\rceil} |c(u_i) - c(u_j)| \ge \mathrm{diam}(G)/2$. Stąd wynika

$$\chi_R(G) \ge \max_{1\le i\le\lceil \mathrm{diam}(G)/2\rceil} c(u_i) \ge \lceil \mathrm{diam}(G)/2\rceil\cdot(\lceil \mathrm{diam}(G)/2\rceil - 1) + 1 = \theta(n^2).$$

Z drugiej strony, górne oszacowanie z twierdzenia 2 prowadzi do wniosku: $\chi_R(G) = O(n^2)$. Otrzymujemy więc: $\chi_R(G) = \theta(n^2)$. ■

Twierdzenie 4 [2]. *Niech G będzie grafem o średnicy* $\mathrm{diam}(G)=2$. *Zachodzi następujące ograniczenie na radiową liczbę chromatyczną grafu G:* $n \le \chi_R(G) \le 2n-2$,

przy czym równość $\chi_R(G) = n$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy dopełnienie grafu G jest półhamiltonowskie. Ponadto, dla każdej liczby naturalnej k: $n \le k \le 2n-2$ istnieje taki graf spójny H o n wierzchołkach i średnicy $\mathrm{diam}(H)=2$, *że* $\chi_R(H)=k$.

Twierdzenie 4 poprawia o 1 górne oszacowanie liczby radiowej grafów o średnicy 2.

4. Radiowe liczby chromatyczne wybranych klas grafów

Obecnie znane są wzory określające radiową liczbę chromatyczną dla pewnych klas grafów, np. dla grafów pełnych *k*-dzielnych i kół.

Twierdzenie 5 [2]. Graf pełny k-dzielny $K_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$ rzędu n, gdzie k<n, ma radiową liczbę chromatyczną $\chi_R(K_{n_1,n_2,\ldots,n_k}) = n + k - 1$.

W szczególności dla gwiazd rzędu n (tj. grafów $K_{1,n-1}$) zachodzi: $\chi_R(K_{1,n-1}) = n + 2 - 1 = n + 1$.

Twierdzenie 6 [2]. Przez W_n oznaczmy koło o n wierzchołkach. Radiowa liczba chromatyczna grafu W_n wynosi:

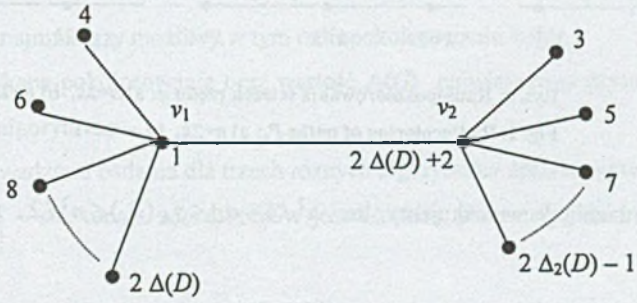
$$\chi_R(W_n) = \begin{cases} 4, & \text{gdy } n = 4 \\ 7, & \text{gdy } n = 5 \\ n+1, & \text{gdy } n > 5 \end{cases}$$

Dwugwiazdą D nazywamy dowolne drzewo z n–2 liśćmi i dwoma wierzchołkami v_1 i v_2 nie będącymi liśćmi. Przez odpowiednio $\Delta_1(D)$ i $\Delta_2(D)$ oznaczmy liczbę sąsiadów wierzchołków v_1 i v_2, a przez $\Delta(D)$ stopień dwugwiazdy D.

Twierdzenie 7. *Radiowa liczba chromatyczna dla dwugwiazdy D wynosi:*

$\chi_R(D) = 2\Delta(D) + 2$.

Dowód. Dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że $\Delta_1(D) \geq \Delta_2(D)$, a więc $\Delta(D) = \Delta_1(D)$. Minimalna różnica radiokolorów pomiędzy wierzchołkiem v_1 i każdym z jego sąsiadów wynosi 3, a minimalna różnica radiokolorów pomiędzy parą sąsiadów wierzchołka v_1 wynosi 2. Stąd wynika, że do pokolorowania samego wierzchołka v_1 i jego sąsiadów potrzeba co najmniej $2\Delta(D) + 2$ radiokolorów. Na rys. 1 przedstawiono optymalne radiopokolorowanie całej dwugwiazdy $2\Delta(D) + 2$ kolorami.



Rys. 1. Optymalne radiopokolorowanie dwugwiazdy

Fig. 1. Optimal radiocoloring of a double star

Twierdzenie 8. *Przez C_n oznaczmy cykl o n wierzchołkach, $n \geq 5$. Radiowa liczba chromatyczna cyklu C_n spełnia zależność:*

$$\lceil \lfloor n/2 \rfloor / 2 \rceil \cdot (\lceil \lfloor n/2 \rfloor / 2 \rceil - 1) + 1 \leq \chi_R(C_n) \leq \lfloor (n-1)/2 \rfloor \cdot \lfloor n/2 \rfloor + (3 + (-1)^n)/2$$

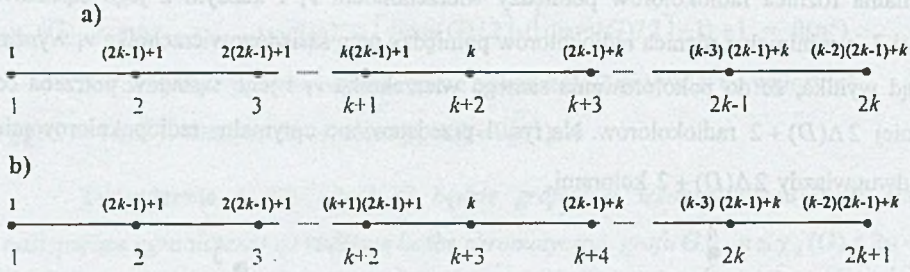
Dowód. Oszacowanie dolne na $\chi_R(C_n)$ jest prostym wnioskiem z twierdzenia 3. Wystarczy bowiem zauważyć, że $\mathrm{diam}(C_n) = \lfloor n/2 \rfloor$. Oszacowanie górne udowodnili Chartrand i in. [2], którzy pokazali ponadto algorytm, kolorujący radiowo dowolny cykl z wykorzystaniem $\lfloor (n-1)/2 \rfloor \cdot \lfloor n/2 \rfloor + (3 + (-1)^n)/2$ kolorów. ■

Z twierdzenia 8 wnioskujemy, że: $n^2/16 - \alpha n \leq \chi_R(C_n) \leq n^2/4$, $n \geq 5$ dla pewnej stałej α.

Twierdzenie 9. *Przez P_n oznaczmy ścieżkę o n wierzchołkach, $n \geq 3$. Radiowa liczba chromatyczna dla P_n spełnia zależność:*

$$\lceil (n-1)/2 \rceil \cdot (\lceil (n-1)/2 \rceil - 1) + 1 \leq \chi_R(P_n) \leq \lfloor (n+1)/2 \rfloor \cdot (n-1) + 1$$

Dowód. Oszacowanie dolne na χ_R wynika bezpośrednio z twierdzenia 3; wystarczy zauważyć, że $\mathrm{diam}(P_n) = n - 1$. Oszacowanie górne można otrzymać jako liczbę kolorów użytych przez pokolorowania przedstawione na rys. 2a i 2b (odpowiednio dla n parzystych i nieparzystych). Dla $n \geq 3$ są to radiopokolorowania legalne. ■



Rys. 2. Radiopokolorowania ścieżek rzędu n: a) $n=2k$, b) $n=2k+1$

Fig. 2. Radiocoloring of paths P_n: a) $n=2k$, b) $n=2k+1$

Z twierdzenia 9 wnioskujemy, że: $n^2/4 - \alpha n \leq \chi_R(P_n) \leq n^2/2$, $n \geq 3$ dla pewnej stałej α.

Na podstawie wyników badań przeprowadzonych za pomocą algorytmu komputerowego sformułowano następujące hipotezy.

Hipoteza 1. *Radiowa liczba chromatyczna dla ścieżki P_n wynosi*

$$\chi_R(P_n) = \begin{cases} n^2/2 - n + 2, & \text{gdy } n = 2k \\ n^2/2 - n + 7/2, & \text{gdy } n = 2k+1 \end{cases}$$

Prawdziwość hipotezy 1 sprawdzono dla ścieżek $P_2, \ldots, P_{13}$.

Hipoteza 2. *Radiowa liczba chromatyczna dla cyklu C_n wynosi*

$$\chi_R(C_n) = \begin{cases} n^2/8 + 3n/4, & \text{gdy } n = 4k \\ n^2/8 + n/4 + 5/8, & \text{gdy } n = 4k+1 \\ n^2/8 + n/2 + 1/2, & \text{gdy } n = 4k+2 \\ n^2/8 + n/2 + 3/8, & \text{gdy } n = 4k+3 \end{cases}$$

Prawdziwość hipotezy 2 sprawdzono dla cykli $C_3, \ldots, C_{18}$.

5. Radiokolorowanie grafów algorytmami sekwencyjnymi

Algorytmy sekwencyjne radiokolorowania grafów to algorytmy o wielomianowej złożoności obliczeniowej, które dla zadanego grafu G zwracają pewne (niekoniecznie optymalne) radiopokolorowanie tego grafu zgodnie z następującym schematem:

1. Odczytaj graf G rzędu n o zbiorze wierzchołków V (zapisany np. w postaci macierzy sąsiedztwa $G_{n \times n}$).
2. Utwórz tablicę odległości $D_{n \times n}$: $D[i,j] = d(v_i, v_j)$.
3. Na podstawie macierzy $D_{n \times n}$ i/lub $G_{n \times n}$ utwórz sekwencję $q_1, \ldots, q_n$ wierzchołków do kolorowania w sposób specyficzny dla algorytmu.
4. Koloruj graf G zachłannie według tej sekwencji, tj. kolejno wierzchołkom $q_1, \ldots, q_n$ przydzielaj najmniejszy możliwy w tym radiopokolorowaniu kolor.
5. Zwróć uzyskane pokolorowanie oraz wartość A(G) największego użytego koloru, gdzie A – nazwa algorytmu.

Przeprowadzono badania dla trzech różnych algorytmów sekwencyjnych:

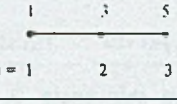
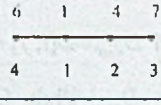
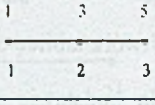
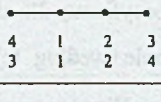
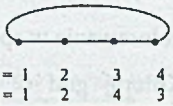
1. Algorytm S – sekwencja wierzchołków jest dowolną permutacją zbioru V, np. ciągiem $v_1, \ldots, v_n$.
2. Algorytm SL – sekwencja wierzchołków tworzona jest dokładnie w ten sam sposób, jak w zwyczajnym algorytmie SL kolorowania wierzchołkowego (patrz [8]).

3. Algorytm SF – na początek sekwencji wstawiany jest za każdym razem taki wierzchołek v_j, który nie jest jeszcze pokolorowany i dla którego wyrażenie $\sum_{1\le i\le n,\, i\ne j} D[i,j]$ przybiera wartość minimalną. Algorytm ten jest naturalną z punktu widzenia radiokolorowania modyfikacją algorytmu LF przy zwyczajnym kolorowaniu wierzchołkowym.

Wszystkie algorytmy charakteryzują się taką samą złożonością obliczeniową (narzuconą przez punkty 2 i 4 algorytmu) rzędu $\theta(n^3)$ zarówno w przypadku pesymistycznym, jak i optymistycznym. Złożoność pamięciowa wszystkich algorytmów wynosi $\theta(n^2)$. Dlatego też jedynym kryterium porównywania algorytmów sekwencyjnych jest rozpiętość generowanych przez nie radiopokolorowań. Jest oczywiste, że dla każdego z algorytmów S, SL, SF istnieją grafy dość trudne do radiokolorowania (grafy SHC). Algorytmy SL i SF mają dodatkowo grafy trudne do radiokolorowania (grafy HC), natomiast algorytm S takich grafów nie posiada. W tabl. 1 zawarto najmniejsze grafy SHC dla algorytmów S, SL, SF oraz najmniejsze grafy HC dla algorytmów SL, SF. Definicje tych pojęć Czytelnik znajdzie w [8].

Tablica 1

Najmniejsze grafy SHC i HC dla sekwencyjnych algorytmów S, SF i SL radiokolorowania. Przez q_1, q_2 oznaczono sekwencje prowadzące do pokolorowań suboptymalnych

Algorytm:	S	SF	SL
Graf SHC:			
Graf HC:	BRAK		

Twierdzenie 10. *Dla algorytmu S nie ma grafu HC.*

Dowód. Niech będzie dane optymalne radiopokolorowanie c grafu G kolorami $c_1,\dots,c_n$. Oczywiście, zachodzi $\min(c_i)=1$; $\max(c_i)=\chi_R(G)$. Algorytm S pokoloruje ten graf optymalnie pod warunkiem przygotowania odpowiedniej sekwencji wierzchołków $q_1,\dots,q_n$ (wierzchołek q_i kolorowany jako i-ty w kolejności) ustalonej według następującego algorytmu:

1. Jako q_1 obieramy wierzchołek, który w pokolorowaniu c otrzymał kolor nr 1.

2. Dla kolejnych wartości naturalnych $k = 1,...,n-1$ przyjmując dane $q_1...q_k$, $k \in \{1,...,n-1\}$ znajdujemy q_{k+1} według następującej metody:

(a) kolorujemy kolejno wierzchołki $q_1,...,q_k$ algorytmem S;

(b) dla każdego wierzchołka $v_i \notin \{q_1,...,q_k\}$ obliczamy, jaki kolor s_i nadałby mu algorytm S, gdyby wierzchołek ten był kolorowany jako następny, tj. (k+1)-szy w sekwencji;

(c) jeżeli istnieje taki wierzchołek $v_i \notin \{q_1,...,q_k\}$, że $s_i = c_i$, to przypisujemy $v_i \to q_{k+1}$ i wykonujemy podpunkt (g);

(d) w przeciwnym przypadku zastępujemy pokolorowanie c przez pokolorowanie c' takie, że:

(e) $c_j' = s_j$, dla j: $c_j = \min_{i:\ v_i \notin \{q_1,...,q_k\}} (c_i)$;

(f) $c_i' = c_i$, dla wszystkich pozostałych wierzchołków v_i ($i \neq j$).

(g) Pokolorowanie c' jest legalnym, optymalnym radiopokolorowaniem. Zauważmy, że dla wierzchołka v_j zachodzi $s_j < c_j$ (nie może być $c_j < s_j$, bo s_j jest najmniejszym dozwolonym kolorem dla v_j; nie może też być $c_j = s_j$ ze względu na niespełnienie warunku w podpunkcie c), czyli pokolorowanie c' wykorzystuje nie więcej barw niż pokolorowanie c. Na skutek zmniejszenia numeru barwy wierzchołka v_j w pokolorowaniu c' w stosunku do pokolorowania c nie może on wchodzić w konflikt barw z żadnym innym wierzchołkiem $v_i \notin \{q_1,...,q_k\}$, albowiem $c_j' = s_j < c_j < c_i$ (odległość kolorów dla v_j i v_i wzrosła). Zgodnie z założeniem barwa $c_j' = s_j$ nie wchodzi też w konflikt z żadnym wierzchołkiem $v_i \in \{q_1,...,q_k\}$, a więc wierzchołek v_j jest pokolorowany legalnie. Ponieważ pokolorowanie c jest legalne i optymalne, to również pokolorowanie c' jest legalne i optymalne.

(h) przypisujemy $v_j \to q_{k+1}$;

(i) przypisujemy $c' \to c$; warto zauważyć, że pokolorowanie c nigdy nie ulega zmianie dla wierzchołków $v_i \in \{q_1,...,q_k\}$;

(j) kończymy krok 2 wiedząc, że pokolorowanie wierzchołków $q_1,...,q_{k+1}$ algorytmem S da te same wartości kolorów, co w optymalnym radiopokolorowaniu c.

3. Kończymy algorytm z sekwencją $q_1,...,q_n$ prowadzącą do pewnego optymalnego radiopokolorowania grafu G.

Ponieważ przedstawiony algorytm można zastosować do dowolnego grafu, oznacza to, że nie istnieje graf HC dla algorytmu S. ■

Z kroku 4 dowodu twierdzenia 10 wynika, że zawsze istnieje przynajmniej jedna sekwencja $q_1,\ldots,q_n$ prowadząca do optymalnego pokolorowania grafu. Fakt ten został przez autorów wykorzystany przy tworzeniu niewielomianowego algorytmu kolorowania optymalnego.

Algorytmy S, SF, SL zaimplementowano w języku programowania C dla kompilatora *gcc* i przetestowano na komputerze PC wyposażonym w procesor AMD Athlon 1533 MHz.

Tablica 2

Porównanie rozpiętości radiokolorowania dla różnych algorytmów sekwencyjnych

$n(G)$	$g(G)$	10%				20%				50%			
		diam (G)	$S(G)$	$SF(G)$	$SL(G)$	diam (G)	$S(G)$	$SF(G)$	$SL(G)$	diam (G)	$S(G)$	$SF(G)$	$SL(G)$
20	*min*	7	69	69	73	3	28	27	29	2	20	20	20
	max	14	176	171	173	8	117	114	125	3	55	53	56
	ave	10,00	115,89	112,78	116,98	4,67	60,53	58,77	62,16	2,58	37,15	36,01	38,84
40	*min*	5	98	91	91	3	53	52	53	2	40	40	40
	max	8	242	239	258	5	161	160	175	3	109	106	113
	ave	6,18	159,40	156,75	163,07	3,86	101,13	98,80	101,42	2,09	46,31	45,56	46,98
60	*min*	4	112	105	105	3	87	86	87	2	60	60	60
	max	7	330	323	353	5	248	240	262	3	159	156	171
	ave	5,19	202,35	198,76	208,06	3,26	118,31	114,96	119,77	2,02	62,24	61,73	62,42
80	*min*	4	161	156	151	3	128	126	132	2	80	80	80
	max	7	445	443	473	4	255	248	268	2	84	84	85
	ave	4,59	234,93	230,58	238,97	3,03	145,10	141,28	148,22	2,00	80,84	80,45	80,90
100	*min*	4	217	216	200	3	175	171	180	2	100	100	100
	max	6	470	465	518	4	311	302	327	3	262	256	282
	ave	4,19	257,79	255,04	247,03	3,00	188,95	184,73	194,84	2,00	101,02	100,57	101,02
200	*min*	3	230	224	224	3	422	414	459	2	200	200	200
	max	4	541	542	499	3	453	443	498	2	204	203	203
	ave	3,51	385,45	382,36	359,03	3,00	436,60	428,41	476,81	2,00	200,71	200,46	200,83
400	*min*	3	611	592	591	3	901	890	1042	2	400	400	400
	max	3	646	630	631	3	944	933	1091	2	403	403	403
	ave	3,00	626,42	612,05	608,72	3,00	921,07	910,40	1068,75	2,00	400,87	400,57	400,83
600	*min*	3	1054	1037	1051	2	600	600	600	2	600	600	600
	max	3	1119	1084	1102	3	1412	1398	1641	2	603	603	603
	ave	3,00	1083,58	1064,89	1070,50	2,44	946,68	940,39	1049,78	2,00	600,82	600,64	600,81
800	*min*	3	1534	1518	1557	2	800	800	800	2	800	800	800
	max	3	1588	1571	1608	3	1858	1847	2184	2	804	802	803
	ave	3,00	1566,67	1547,88	1585,78	2,09	894,30	892,99	922,98	2,00	800,90	800,60	800,79
1000	*min*	3	2026	1996	2107	2	1000	1000	1000	2	1000	1000	1000
	max	3	2072	2074	2165	2	1002	1001	1002	2	1004	1003	1004
	ave	3,00	2050,51	2029,54	2140,10	2,00	1000,17	1000,08	1000,12	2,00	1000,85	1000,64	1000,81

Zbadano jakość uzyskiwanych pokolorowań wyrażoną poprzez wartości S(G), SF(G) i SL(G) dla odpowiednio dużej statystycznej próbki grafów losowych o zadanym rzędzie $n(G)$ i *gęstości* $g(G)$ (tj. liczbie krawędzi grafu w stosunku do liczby krawędzi grafu pełnego tego samego rzędu). Badania wykonano dla grafów o rzędach $n(G) \in \{10,...,1000\}$ i gęstościach $g(G) \in \{5\%,...,50\%\}$. W tabl.2 zawarto wyniki obliczeń dla grafów o rzędzie $n(G) \in \{20,40,60,80,100,200,400,600,800,1000\}$ i gęstości $g(G) \in \{10\%,20\%,50\%\}$. W każdym przypadku podano minimalne, średnie (średnia arytmetyczna) oraz maksymalne wartości parametrów diam(G), S(G), SF(G) i SL(G) dla próbki 500 losowych grafów spójnych.

Na podstawie wyników badań wyciągnięto następujące wnioski:

1. Najgorsze wyniki daje algorytm S.
2. Dla większości grafów pokolorowanie o najmniejszej rozpiętości daje algorytm SF, jednak różnice wyników pomiędzy poszczególnymi algorytmami są niewielkie.
3. W przypadku grafów rzadkich ($g(G) \leq 10\%$) o średnicy 4 zdecydowanie najmniejszą rozpiętość pokolorowania uzyskuje się algorytmem SL.

Algorytmy sekwencyjne zwracają wartość bliską rzeczywistej radiowej liczbie chromatycznej. Przykładowo, dla grafów gęstych o średnicy 2 w zakresie rzędów 80,...,1000 wszystkie algorytmy sekwencyjne zwracają wartość różniącą się o co najwyżej 4 od dolnego oszacowania na liczbę radiową, a więc odchylenie wyniku od liczby radiowej nie przekracza 4.

LITERATURA

1. Chartrand G., Erwin D., Zhang P.: A graph labeling problem suggested by FM channel restrictions, University of Massachusetts, USA, 2001.
2. Chartrand G., Erwin D., Zhang P., Harary F.: Radio labelings of graphs. Bulletin of the ICA, vol. 33, 2001, pp. 77-85.
3. Fotakis D., Pantziau G., Pentaris G., Spirakis P.: Frequency assignment in mobile and radio networks, DIMACS series in Discrete Mathematics, 2001.
4. Fotakis D., Nikoletseas S., Papadopoulou V., Spirakis P.: NP-completeness results and efficient approximations for radiocoloring in planar graphs, Computer Technology Institute and Patras University, Greece, 2001.
5. Janczewski R.: Radiowe liczby k-chromatyczne. Politechnika Gdańska, Wydział ETI, na prawach rękopisu, 2001.
6. Janssen J. C. M.: Channel assignment and graph labeling, Dalhousie University, Halifax, Canada.

7. Kosowski A.: Radiowe kolorowanie grafów. Raport 08/2002, Politechnika Gdańska, Wydział ETI.
8. Kubale M.: Introduction to Computational Complexity and Algorithmic Graph Coloring. Wyd. GTN, Gdańsk 1998.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Andrzej Świerniak

Abstract

Radiocoloring of a connected graph G is a special case of the classical model of coloring the vertices of G. In contrast to the classical method, the difference in colors assigned to vertices u, v is inversely proportional to the distance between u and v. The aim is to find such a radiocoloring of G, that the maximal color used is as small as possible. In the paper we study basic principles and properties of the graph radiocoloring problem. Since the general problem is NP-hard, we give lower and upper bounds for the radiochromatic number. Exact values of the radiochromatic number are given for complete multiparite graphs, wheels and double stars. Finally, we give computational results obtained while testing the performance of suboptimal coloring algorithms on pseudorandom graphs.