

Adam NADOLSKI
Politechnika Gdańska

CYRKULARNY INDEKS CHROMATYCZNY GRAFÓW KUBICZNYCH

Streszczenie. W referacie omówimy własności cyrkularnego kolorowania krawędzi grafów oraz cyrkularnego indeksu chromatycznego. Po zdefiniowaniu tego rodzaju kolorowania zbadamy, które ze znanych wyników dla klasycznego kolorowania krawędzi grafów kubicznych można przenieść na rozważany model kolorowania. Dodatkowo podamy nietrywialne oszacowanie na cyrkularny indeks chromatyczny dla nieskończonej rodziny grafów kubicznych klasy 2.

CIRCULAR CHROMATIC INDEX OF CUBIC GRAPHS

Summary. In this contribution we consider the properties of circular edge coloring of a graph and the circular chromatic index. After giving a definition of this kind of graph coloring, we study, which of the known results for classical edge coloring for cubic graphs can be applied to the considered model of coloring. Moreover, we bound the circular chromatic index for an infinite family of Class 2 cubic graphs.

1. Wprowadzenie

Rozważmy system produkcyjny, w którym praca jest wykonywana w ruchu ciągłym, tzn. po zakończeniu wykonywania jednego cyklu produkcyjnego od razu rozpoczynany jest kolejny. Jeśli wszystkie zadania w tym systemie mają jednakowy czas wykonania i każde z nich w trakcie wykonywania zajmuje dwie przypisane temu zadaniu maszyny, to mamy do czynienia z systemem zadań 2-procesorowych. Tę sytuację można wygodnie modelować za pomocą grafu, którego wierzchołki odpowiadają maszynom, zaś krawędzie zadaniom. Wtedy układanie cyklicznego harmonogramu staje się równoważne cyrkularnemu kolorowaniu krawędzi tego grafu.

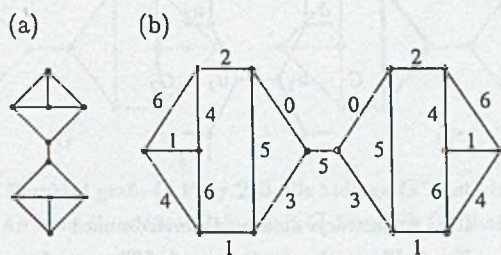
Cyrkularny indeks chromatyczny jest uogólnieniem klasycznego indeksu chromatycznego, uzyskanym poprzez przeniesienie definicji cyrkularnej liczby chromatycznej,

wprowadzonej przez A. Vince'a [5], z wersji wierzchołkowej na krawędziową. Niech $k \geq 2d$ będą liczbami naturalnymi. Wówczas przez (k, d) -pokolorowanie krawędzi grafu $G = (V, E)$ rozumiemy przyporządkowanie $c : E \rightarrow \{0, 1, \dots, k-1\}$ takie, że dla dowolnych dwóch krawędzi sąsiednich e_1, e_2 zachodzi $d \leq |c(e_1) - c(e_2)| \leq k - d$. *Cyrkularny indeks chromatyczny* $\chi'_c(G)$ grafu G definiujemy jako kres dolny ilorazów k/d , dla których istnieje (k, d) -pokolorowanie krawędzi grafu G . Okazuje się (patrz [1]), że kres dolny występujący w definicji jest zawsze osiągalny, a zatem może być zastąpiony przez minimum. Ponadto k może być ograniczone przez liczbę krawędzi G , zaś d przez rozmiar maksymalnego skojarzenia $\alpha'(G)$.

W rozważaniach będziemy się posługiwać także następującą równoważną definicją cyrkularnego indeksu chromatycznego podaną w [1]. Dla liczby rzeczywistej $r > 1$ oznaczmy przez C^r okrąg o obwodzie r . Wtedy r -cyrkularne pokolorowanie krawędzi definiujemy jako dowolne przyporządkowanie krawędziom G łuków jednostkowych na C^r , tak że dla dowolnych krawędzi sąsiednich przyporządkowane im luki są rozłączne. Cyrkularny indeks chromatyczny definiujemy jako najmniejszą liczbę rzeczywistą r , dla której taka konstrukcja jest jeszcze możliwa.

Ponieważ $(k, 1)$ -pokolorowanie krawędzi jest klasycznym k -pokolorowaniem krawędzi, więc zachodzi $\chi'_c(G) \leq \chi'(G)$, gdzie $\chi'(G)$ oznacza indeks chromatyczny grafu G . Z drugiej strony w [1] wykazana jest nierówność $\chi'(G) - 1 < \chi'_c(G)$ oraz bezpośrednio z definicji wynika, że $\Delta(G) \leq \chi'_c(G)$, gdzie $\Delta(G)$ oznacza maksymalny stopień grafu G . Wyniki te w połączeniu z twierdzeniem Vizinga [6] prowadzą do wniosku, że dla grafów klasy 1 (spełniających $\chi'(G) = \Delta(G)$) zachodzi $\Delta(G) = \chi'_c(G) = \chi'(G)$, zaś dla grafów klasy 2 (spełniających $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$) zachodzi $\Delta(G) < \chi'_c(G) \leq \chi'(G)$. Ostatnia nierówność daje nam podział grafów klasy 2 na dwie podklasy: grafy klasy 2, dla których $\chi'_c(G) < \chi'(G)$ będziemy określać jako grafy *klasy 1.5*, zaś te, dla których $\chi'_c(G) = \chi'(G)$ - jako grafy *klasy 2.5*.

W pracy [1] wykazano także, że cyrkularny indeks chromatyczny grafu Petersena wynosi $3 + 2/3$. W tej pracy zajmiemy się własnościami cyrkularnego indeksu chromatycznego innych grafów kubicznych. Zbadamy, które ze znanych wyników dotyczących klasycznego kolorowania krawędzi tej klasy grafów dają się przenieść na wersję cyrkularną.



Rys. 1. Przykłady grafów kubicznych z mostem
 Fig. 1. An example of cubic graphs with a bridge

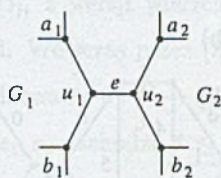
2. Żmirłacze i redukcje grafów kubicznych

W rozważaniach nad indeksem chromatycznym grafów kubicznych zostało odkrytych kilka redukcji, pozwalających w pewnych przypadkach zredukować graf kubiczny klasy 2 do mniejszego grafu o tych własnościach. Żmirłaczami (ang. *snarks*) nazywamy nietrywialne grafy kubiczne klasy 2, to znaczy bez mostów i takie, które nie mogą zostać zredukowane. W tym punkcie zbadamy, jak te redukcje wpływają na cyrkularny indeks chromatyczny.

Grafy posiadające most wszystkie są klasy 2, co wykazano w [2]. Jednakże sam fakt istnienia mostu w grafie nie determinuje, czy jest to graf klasy 1.5 czy też klasy 2.5. Na rysunku 1 przedstawiono przykłady dwóch grafów z mostem. Ponieważ, jak można łatwo sprawdzić, połowka grafu 1(a) nie posiada $(7, 2)$ -pokolorowania, graf ten jest klasy 2.5. Natomiast dla grafu 1(b) przedstawiono także jego $(7, 2)$ -pokolorowanie krawędziowe, które jak się okazuje, jest optymalne, a zatem cyrkularny indeks chromatyczny tego grafu wynosi 3.5 i jest to graf klasy 1.5. Poniższe twierdzenie charakteryzuje klasę grafu kubicznego z mostem za pomocą klasy jego składowych po usunięciu mostu.

Twierdzenie 1. Niech G będzie kubicznym grafem prostym z mostem e , którego usunięcie daje graf o składowych G_1 i G_2 . Wówczas $\chi'_c(G) < 4$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\chi'_c(G_1) < 4$ i $\chi'(G_2) < 4$.

Dowód. Załóżmy, że $\chi'_c(G_1) < 4$ i $\chi'(G_2) < 4$. Wtedy istnieje liczba naturalna q taka, że $\chi'_c(G_1) \leq 4 - 1/q$ i $\chi'(G_2) \leq 4 - 1/q$. Niech C będzie okręgiem długości $4 - 1/q$,



Rys. 2. Ilustracja do dowodu twierdzenia 1

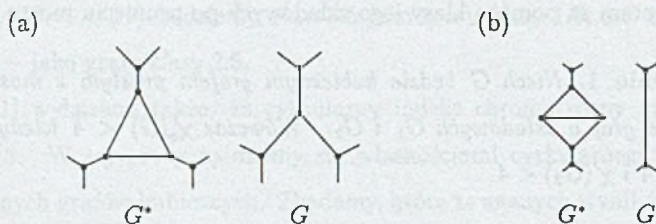
Fig. 2. Illustration for the proof of Theorem 1

zaś c_1 i c_2 będą cyrkularnymi pokolorowaniami odpowiednio G_1 i G_2 , pochodzącymi od pewnych $(4q - 1, q)$ -pokolorowań krawędziowych. Wtedy dla dowolnej krawędzi \bar{e} grafu G_i , $c_i(\bar{e})$ jest łukiem okręgu C , którego początek i koniec są wielokrotnościami $1/q$.

Wprowadźmy oznaczenia jak na rys. 2 i rozważmy zbiór $C \setminus (c_1(u_1a_1) \cup c_1(u_1b_1))$. Możliwe są dwa przypadki: jest to suma dwóch łuków l_1 i l_2 o łącznej długości $(4 - 1/q) - 2 = 2 - 1/q$ bądź pojedynczy łuk o długości $2 - 1/q$. W pierwszym przypadku długości każdego z łuków l_1 i l_2 są wielokrotnościami $1/q$, a zatem jeśli długość l_1 jest mniejsza niż 1, to długość l_2 wynosi co najmniej 1. Zatem w obu przypadkach można znaleźć na okręgu C jednostkowy łuk s_1 rozłączny z $c_1(u_1a_1)$ i $c_1(u_1b_1)$. Analogicznie postępując mamy łuk s_2 długości 1 rozłączny z $c_2(u_2a_2)$ i $c_2(u_2b_2)$. Teraz, ewentualnie wykonując „obrót” pokolorowania ϕ_2 , możemy założyć, że $s_1 = s_2 = s$.

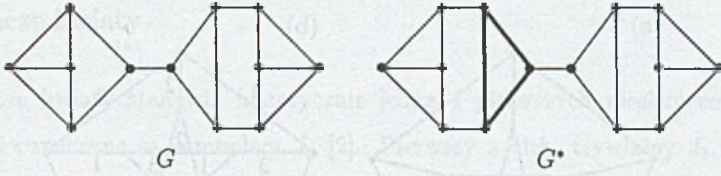
Ostatecznie konstruujemy pokolorowanie grafu G : krawędzie wspólne z G_i kolorujemy zgodnie z c_i , zaś krawędź u_1u_2 kolorem c . Ponieważ c jest rozłączny z $c_i(a_iu_i)$ i $c_i(b_iu_i)$, $i = 1, 2$, skonstruowane pokolorowanie jest legalne.

Implikacja przeciwna wynika stąd, że zarówno G_1 , jak i G_2 są podgrafami grafu G , a zatem $\chi'_c(G_i) < \chi'_c(G)$ dla $i = 1, 2$. \square



Rys. 3. Usunięcie elementu grafu: (a) trójkąta; (b) kwadratu z przekątną

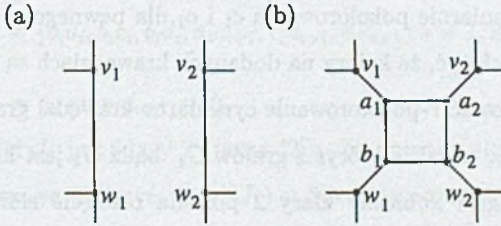
Fig. 3. Removal of a fragment of a graph: (a) a triangle; (b) a square with a diagonal



Rys. 4. Przykład grafu G klasy 2.5, dla którego G^* jest klasy 1.5
 Fig. 4. An example of Class 2.5 graph G for which G^* is of Class 1.5

Najprostszą ze wspomnianych redukcji grafów kubicznych jest usunięcie trójkąta bądź kwadratu z przekątną, przedstawione na rys. 3. W pracy [2] wykazano, że graf zawierający trójkąt bądź kwadrat z przekątną jest klasy 2 wtedy i tylko wtedy, gdy graf powstały przez usunięcie tego elementu jest klasy 2.

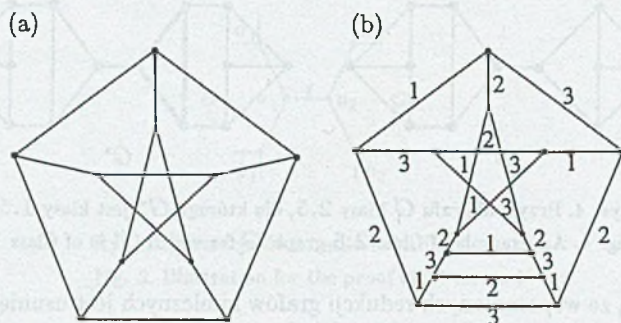
Zauważmy, że jeśli dla pewnej liczby rzeczywistej r graf G jest r -cyrkularnie kolorowalny, to graf G^* powstały poprzez wstawienie w miejsce jednego z wierzchołków trójkąta bądź kwadratu z przekątną w miejsce krawędzi także jest r -cyrkularnie kolorowalny. Z przedstawionych rozważań wynika, że jeśli graf G jest klasy 1.5, to G^* też jest klasy 1.5. Przeciwna implikacja nie jest jednak prawdziwa. Rozważmy bowiem grafy G i G^* przedstawione na rys. 4. Podobnie jak miało to miejsce dla grafów na rys. 1, graf G jest klasy 2.5, podczas gdy graf G^* klasy 1.5.



Rys. 5. Redukcja cyklu długości 4: (a) graf G ; (b) graf G^\square
 Fig. 5. Reduction of a cycle of length 4: (a) graph G ; (b) graph G^\square

Następna redukcja umożliwia usuwanie z grafu cykli długości 4. Rozważmy fragmenty grafów G i G^\square na rys. 5. Wiadomo, że jeśli G jest klasy 1, to także G^\square jest 3-barwny. Poniższe twierdzenie, udowodnione w [4], pozwala na wysunięcie wniosku, że jeśli G^\square jest klasy 2.5, to także G jest tej samej klasy.

Twierdzenie 2. *Jeżeli q jest liczbą naturalną, a graf G spełnia $\chi'_c(G) \leq 4 - 1/q$, to $\chi'_c(G^\square) \leq 4 - 1/q$.*



Rys. 6. (a) Graf Petersena P ; (b) graf P^\square i jego pokolorowanie trzema kolorami

Fig. 6. (a) Petersen graph P ; (b) graph P^\square and its 3-coloring

Zauważmy, że nie jest prawdziwa implikacja: G jest klasy 1.5, to G^\square jest klasy 1.5. Za przykład może posłużyć graf Petersena P , dla którego $\chi'_c(P) = 3 + 2/3$, zaś $\chi'_c(P^\square) = 3$ (patrz rys. 6).

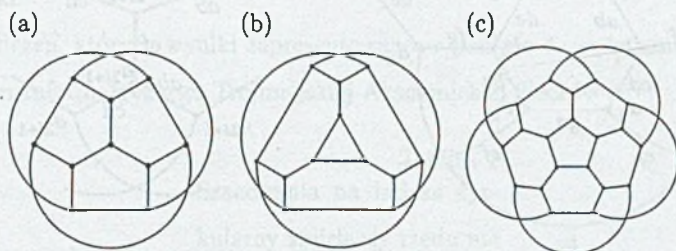
Kolejna redukcja dotyczy grafów o małej spójności. Załóżmy, że graf kubiczny G ma rozcięcie złożone z dwóch niezależnych krawędzi. Wtedy, po usunięciu tego rozcięcia i połączeniu w każdej z powstałych składowych krawędziami dwóch wierzchołków stopnia 2, otrzymujemy dwa grafy kubiczne G_1, G_2 . Jak się okazuje [2], G jest klasy 2 wtedy i tylko wtedy, gdy co najmniej jeden z grafów jest klasy 2. Załóżmy teraz, że oba grafy G_1 i G_2 mają r -cykularnie pokolorowania c_1 i c_2 dla pewnego $r < 4$. Wtedy bez straty ogólności możemy założyć, że kolory na dodanych krawędziach są identyczne, co pozwala nam łatwo skonstruować r -pokolorowanie cykularne krawędzi grafu G . Wynika stąd, że jeśli G jest klasy 2.5, to także któryś z grafów G_1 bądź G_2 jest klasy 2.5.

Podobnie, jeśli graf kubiczny klasy 2 posiada rozcięcie złożone z trzech krawędzi niezależnych, to można go rozłożyć na dwa grafy kubiczne, z których co najmniej jeden nie jest 3-barwny. Tego typu redukcji nie potrafimy jednak przeprowadzić dla kolorowania cykularnego.

Zgodnie z powyższymi rozważaniami za żmirlacze powszechnie uważa się grafy o obwodzie nie mniejszym niż 5, o spójności cyklicznej co najmniej 4. Najmniejszym żmirlaczem jest graf Petersena, dla którego wartość indeksu cykularnego wynosi $3 + 2/3$, a więc jest to graf klasy 1.5. W dalszej części pracy wykażemy, że dwie nieskończone rodziny żmirlaczy także są klasy 1.5.

3. Żmirlące kwiaty

Żmirlące kwiaty stanowią historycznie jedną z pierwszych nieskończonych rodzin żmirlaczy i oznaczane są symbolem J_n [2]. Pierwszy z nich, trywialny J_3 , powstaje w wyniku zastąpienia w grafie Petersena P jednego z wierzchołków przez trójkąt. Przedstawiony jest on na rys. 7(b). Kolejne grafy tej rodziny powstają przez dodawanie kolejnych wierzchołków w cyklu i kolejnych płatków. Rysunek 7(c) prezentuje graf J_5 . Formalnie



Rys. 7. Konstrukcja grafów kwiatów: (a) graf Petersena; (b) Graf J_3 ; (c) graf J_5

Fig. 7. Construction of flower snarks: (a) Petersen graph; (b) graph J_3 ; (c) graph J_5

graf J_n możemy zdefiniować podając zbiór jego wierzchołków i krawędzi:

$$V(J_n) = \{a_i, b_i, c_i, d_i : i = 1, 2, \dots, n\}$$

$$E(J_n) = \{b_i a_i, b_i c_i, b_i d_i, a_i a_{i+1}, c_i d_{i+1}, d_i c_{i+1} : i = 1, 2, \dots, n\},$$

gdzie $a_{n+1} = a_1$, $c_{n+1} = c_1$ oraz $d_{n+1} = d_1$.

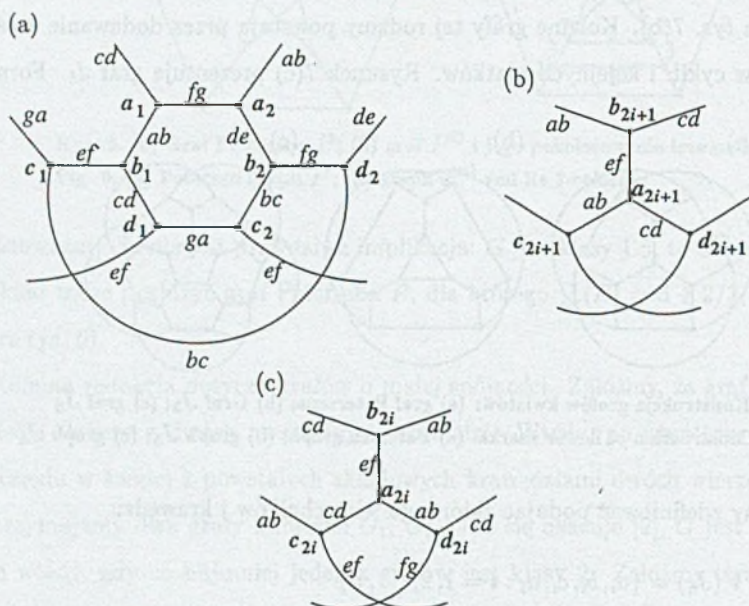
Dla każdego k graf J_k jest klasy 2 (patrz [2]). Za pomocą algorytmów opisanych w [4] udało się komputerowo obliczyć, że $\chi'_c(J_3) = 3.5$. Dla pozostałych grafów tej rodziny mamy następujące nietrywialne oszacowanie:

Twierdzenie 3. Dla dowolnej liczby naturalnej k zachodzi $\chi'(J_{2k+1}) \leq 3.5$.

Dowód. Dowód opiera się na wskazaniu cyrkularnego pokolorowania J_{2k+1} 7/2 kolorami. Jak już zostało wspomniane $\chi'_c(J_3) = 3.5$. Zajmijmy się zatem $k > 1$.

Wprowadźmy następujące oznaczenia: $a = [0, 0.5)$, $b = [0.5, 1)$, $c = [1, 1.5)$, $d = [1.5, 2)$, $e = [2, 2.5)$, $f = [2.5, 3)$ oraz $g = [3, 3.5)$. Krawędzie wychodzące z wierzchołków a_1, b_1, c_1, d_1 oraz a_2, b_2, c_2 i d_2 kolorujemy tak, jak jest to przedstawione na rys. 8(a). Następnie kolorujemy krawędzie incydentne z wierzchołkami a_{2i+1}, b_{2i+1} dla $i = 1, 2, \dots$,

k zgodnie z rys. 8(b), zaś krawędzie incydentne z a_{2i}, b_{2i}, c_{2i} i d_{2i} dla $i = 2, \dots, k$ zgodnie z rys. 8(c). Teraz wystarczy sprawdzić, że tak zdefiniowane pokolorowanie jest poprawnie określone i legalne, to znaczy, że każda z krawędzi ma przydzielony kolor i żadne dwie krawędzie sąsiednie nie mają przydzielonych kolorów kolidujących. \square



Rys. 8. 3.5-cyrkularne pokolorowanie grafu J_{2k+1}

Fig. 8. 3.5-coloring of graph J_{2k+1}

W pracy [4] w podobny sposób oszacowano przez 3.5 cyrkularny indeks chromatyczny innej nieskończonej rodziny żmirlaczy, skonstruowanej przez Goldberga w [3].

4. Istnienie żmirlaczy o indeksie cyrkularnym równym 4

Zarówno dla grafu Petersena jak i dla żmirlaczy kwiatów okazało się, że są one klasy 1.5. Rodzi się zatem pytanie, czy istnieje żmirlacz klasy 2.5. Zauważmy, że opisane wcześniej redukcje grafów kubicznych, poza przypadkiem rozkładu grafów cyklicznie 3-spójnych krawędziowo, zachowywały własność należenia do klasy 2.5, co sprawia, że pytanie staje się jeszcze bardziej interesujące.

Dla grafów o mniej niż 18 wierzchołkach jedynym źmirłaczem jest graf Petersena, dla którego, jak wiadomo, $\chi'_c = 3 + 2/3$. Przeprowadzając obliczenia komputerowe za pomocą algorytmów opisanych w [4] dla dwóch źmirłaczy 18-wierzchołkowych stwierdziliśmy, że ich cyrkularny indeks chromatyczny wynosi $3 + 1/3$. Natomiast dla źmirłaczy o liczbie wierzchołków pomiędzy 20 a 22 udało się oszacować badany parametr z góry przez 3.5. Zestawienie tych wyników zawiera tabl. 1. Tak więc problem istnienia źmirłacza klasy 2.5 pozostaje nie rozstrzygnięty. Wiemy jednak, że jeśli taki graf istnieje, to ma przynajmniej 24 wierzchołki.

Część obliczeń, których wyniki zaprezentowano w punkcie 4., wykonano na komputerach Centrum Informatycznego Trójmiejskiej Akademickiej Sieci Komputerowej.

Tablica 1
Szacowania na indeks cyrkularny źmirłaczy rzędu nie większego niż 22

n	liczba źmirłaczy	χ'_c
10	1	$= 3 + 2/3$
12	0	-
14	0	-
16	0	-
18	2	$= 3 + 1/3$
20	6	≤ 3.5
22	20	≤ 3.5

LITERATURA

1. Hackmann A., Kemnitz A.: The circular chromatic index, *Disc. Math.*, (w druku).
2. Isaacs R.: Infinite families of nontrivial trivalent graphs which are not Tait colorable, *Amer. Math. Month.* 82, 1975, pp. 221-239.
3. Goldberg M. K.: Construction of Class 2 graphs with maximum vertex degree 3, *J. Comb. Theory, Ser. B.* 31, 1981, pp. 282-291.

4. Nadolski A.: Cyrkularne kolorowanie grafów i jego zastosowanie w szeregowaniu zadań, Praca magisterska, Politechnika Gdańska, WETI, 2001.
5. Vince A.: Star chromatic number, J. Graph Theory 23, 1988, pp. 551–559.
6. Vizing V. G.: On an estimate of the chromatic class of a p -graph (po rosyjsku), Met. Diskret. Anal. 3, 1964, pp. 25–30.

Recenzent: Dr hab. inż. Konrad Wala, Prof. AGH

Abstract

In this paper we consider circular edge coloring of a graph, whose definition is obtained by transferring the model of graph coloring introduced by Vince, from vertex to edge version. This type of coloring is an assignment of unit arcs of a circle to the edges of a graph in such a way that for each adjacent edges, their arcs do not intersect. A circumference of the smallest circle, for which this construction is still possible, is called the circular chromatic index.

In the paper, after defining this variation of coloring we study its properties for cubic graphs. It turns out, that many of the well known results for classical edge coloring for this class of graphs may be transferred to the circular version. Moreover, we prove that the circular chromatic index of flower snarks is less than or equal to 3.5. Finally, we check computationally that each snark of order at most 22 has the circular chromatic index less than 4.