ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1984
Seria: ENERGETYKA z. 87 Nr kol. 806

Tadeusz CHMIELNIAK
Instytut Maszyn i Urządzeń Energetycznych
Politechniki Śląskiej

METODY ROZWIĄZANIA ZADANIA PROSTEGO DLA PRZEPŁYWU TRANSONICZNEGO W PALISADACH ŁOPATKOWYCH

Streszczenie: Podano przegląd głównych metod rozwiązania zadania prostego teorii palisad w zakresie ustalonych przepływów transonicznych. Skupiono uwagę na przedstawieniu grupy metod kolejnych kroków czasowych czyli metod całkowania pomocniczego zadania początkowo-brzegowego oraz opisie metod rozwiązania zadania Neumanna dla potencjału prędkości (metod relaksacji).

1. Wprowadzenie

W kanałach sprężających i ekspansyjnych prędkość czynnika może w ogólnym przypadku zmieniać swoją wartość od dokrytycznej do nadkrytycznej. Analizie matematycznej tak zmiennej fizycznie struktury przepływu ustalonego (przepływów transonicznych) towarzyszy istotna trudność związana z przejściem (w jednym kanale) od eliptycznego do hiperbolicznego zadania brzegowego. Z tym samym rodzajem trudności spotykamy się rozpatrując przepływ wokół pojedynczego profilu.

Do wyznaczenia prędkości i gęstości w obszarze ustalonych przepływów transonicznych stosowane są zazwyczaj dwie grupy metod: całkowania pomocniczego zadania początkowo-brzegowego (grupa metod kolejnych kroków czasowych) i metod relaksacji. Dla obu rodzajów metod są charakterystyczne różne postacie równań opisujących przepływ.

2. Całkowa i różniczkowa postać równań zachowania.

Pomocnicze zadanie początkowo-brzegowe tworzą: układ nieustalonych równań zachowania: ciągłości, pędu i energii, równanie stanu, odpowiedni warunek początkowy oraz warunki brzegowe. Wychodząc z przyjętego (fikcyjnego) stanu początkowego przechodzimy w procesie obliczeniowym poprzez kolejne stany nieustalone do żądanego stanu ustalonego. Taki sposób postępowania stanowi ideę metody kolejnych kroków czasowych (metody ustalenia).

Podstawowy układ równań zapisuje się dla tej grupy metod albo w postaci całkowej lub w zachowawczej postaci różniczkowej [np. 1].

Całkowy zapis praw zachowania dla bezwzględnego przepływu trójwymiarowego płynu idealnego prowadzi do zależności:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V F\,dV + \oiint G\,dS = 0, \qquad p = p(\varrho, T) \tag{1}$$

gdzie:

$$F = \begin{bmatrix} \varrho \\ \varrho \bar{c}\,\bar{i} \\ \varrho \bar{c}\,\bar{j} \\ \varrho \bar{c}\,\bar{k} \\ \varrho\left(e + \frac{1}{2}c^2\right) \end{bmatrix} \qquad G = \begin{bmatrix} \varrho(\bar{c}\,\bar{n}) \\ \varrho(\bar{c}\,\bar{n})(\bar{c}\,\bar{i}) + \bar{i}\bar{n}p \\ \varrho(\bar{c}\,\bar{n})(\bar{c}\,\bar{j}) + \bar{j}\bar{n}p \\ \varrho(\bar{c}\,\bar{n})(\bar{c}\,\bar{k}) + \bar{k}\bar{n}p \\ \varrho\left(h + \frac{1}{2}c^2\right)(\bar{c}\,\bar{n}) \end{bmatrix}$$

$\bar{c} = c_1\,\bar{i} + c_2\,\bar{j} + c_3\,\bar{k}$ - prędkość bezwzględna czynnika, $\bar{n}$ (n_i)- wektor jednostkowy normalny do powierzchni S ograniczającej objętość V, p - ciśnienie, ϱ - gęstość, e - wewnętrzna energia właściwa, $c^2 = \bar{c}\bar{c}$, h - właściwa entalpia, T - temperatura bezwzględna płynu.

Równania (1) pozwalają wyznaczyć $\varrho(t)$, $\varrho\bar{c}$ (t) i $\varrho(e + \frac{1}{2}c^2) = f$ (t) wewnątrz danego elementu o objętości V w oparciu o wartości p, ϱ i $\bar{c}$ (dla gazu doskonałego $\varrho e = \frac{1}{k-1}\,p$, k - wykładnik izentropowy), określone dla danego momentu czasu $t = t_0$ na powierzchni S ograniczającej V. W tym przypadku, gdy objętość V nie zmienia się w czasie, pierwszy człon można zapisać w postaci $\frac{\partial}{\partial t}(FV)$.

W przepływie dwuwymiarowym $dV = \Delta h\,dA$, $dS = \Delta h\,dl$ (Δh stała wysokość badanego elementu, dl - element konturu L_A ograniczającego dS).

Po rozpisaniu pierwszego z równań (1) znajdujemy w tym przypadku:

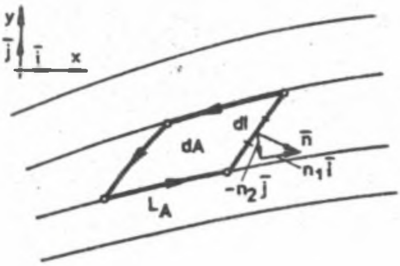
$$\frac{\partial}{\partial t}\int_A \varrho\,dA + \oint_{L_A} \varrho c_i\,n_i\,dl = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_A \varrho c_i\,dA + \oint_{L_A} \varrho c_i\,(c_j n_j)\,dl + \oint_{L_A} p\,n_i\,dl = 0 \tag{2}$$

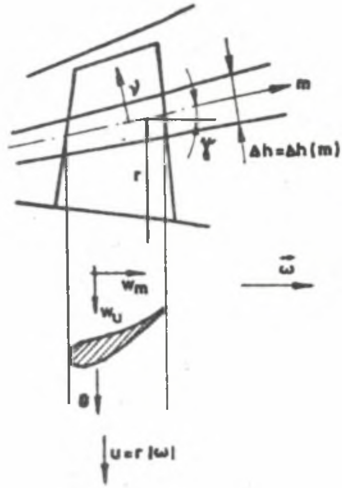
$$\frac{\partial}{\partial t}\int_A \varrho\left(e + \frac{1}{2}c^2\right)dA + \oint_{L_A} \varrho\left(h + \frac{1}{2}c^2\right)c_i\,n_i\,dl = 0,$$

przy czym dla przyjętego kierunku obejścia konturu L_A (rys.1) wektor jednostkowy $\bar{n}$ ma postać:

$$\bar{n} = \frac{dy}{dl}\,\bar{i} - \frac{dx}{dl}\,\bar{j} \quad \left(n_1 = \frac{dy}{dl},\ n_2 = -\frac{dx}{dl}\right).$$



Rys. 1



Rys. 2

W ogólnym zadaniu palisadowym rozpatruje się opływ strugą o zmiennej grubości Δh profilów umiejscowionych na danej osiowosymetrycznej powierzchni prądu. Dla merydionalnego układu współrzędnych (m,θ,ν wersory $\{e_i\}$, rys.2), wirującego ze stałą predkością kątową $\bar{\omega}$, układ równań zachowania sprowadza sie w tym przypadku do postaci:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int F_1\, dV + \oint\!\!\oint_S G_1\, dS + \int H\, dV = 0 \qquad (3)$$

przy następujących oznaczeniach:

$$F_1 = \begin{bmatrix} r\,\Delta h\,\rho \\ r\,\Delta h\,\rho w_m \\ r\,\Delta h\,\rho w_u \\ r\Delta h\,\rho[e + \frac{1}{2}(w_u^2 + w_m^2 - u^2)] \end{bmatrix} \qquad G = \begin{bmatrix} r\,\rho\,\bar{w}\,\bar{n}\,\Delta h \\ r\rho\Delta h\,\bar{w}\,\bar{n}\,(\bar{w}\,\bar{e}_1) + \bar{n}\bar{e}_1 p \\ r\rho\Delta h\bar{w}\,\bar{n}\,(\bar{w}\,\bar{e}_2) + \bar{n}\bar{e}_2 p \\ r\rho\Delta h(\bar{w}\,\bar{n})\,H_R \end{bmatrix}$$

$$H_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\Delta h\,\rho(w_u - r\omega)^2\frac{\partial r}{\partial m} - p\,\frac{\partial(r\,\Delta h)}{\partial m} \\ \Delta h\,\rho w_m\,(w_u - 2\,r\omega)\frac{\partial r}{\partial m} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{w} = w_m\,\bar{e}_1 + w_u\,\bar{e}_2, \quad H_R = h + \frac{1}{2}(w_m^2 + w_u^2 - \omega^2 r^2)$$

Rozpatrywanym równaniom w postaci całkowej odpowiadają układy równań różniczkowych (o postaci diwergentnej). Z (1) otrzymujemy po wprowadzeniu wektorów $\left(E = \varrho\left(e + \frac{1}{2}c^2\right)\right)$:

$A[\varrho, \varrho c_1, \varrho c_2, \varrho c_3, E]$, $B[\varrho c_1, \varrho c_1^2 + p, \varrho c_1 c_2, \varrho c_1 c_3, c_1(E+p)]$,

$C[\varrho c_2, \varrho c_1 c_2, \varrho c_2^2 + p, \varrho c_1 c_3, c_2(E+p)]$, $D[\varrho c_3, \varrho c_1 c_3, \varrho c_2 c_3,$

$p + \varrho c_3^2, c_3(E+p)]$

następujący układ równań różniczkowych:

$$\mathrm{div}(A,B,C,D) = \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial x_1} + \frac{\partial C}{\partial x_2} + \frac{\partial D}{\partial x_3} = 0 \tag{4}$$

Natomiast z (2) wynika układ

$$\frac{\partial I}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial m} + \frac{\partial K}{\partial \theta} = -L, \tag{5}$$

gdzie:

$I[r\Delta h\varrho, r\Delta h\varrho w_m, r\Delta h\varrho w_u, r\Delta h\varrho(e + 1/2(w_u^2 + w_m^2 - u^2))]$;

$J[r\Delta h\varrho w_m, r\Delta h(\varrho w_m^2 + p), r\Delta h\varrho w_m w_u, r\Delta h\varrho w_m H_R]$;

$K[\varrho\Delta h w_u, \varrho\Delta h w_m w_u, \Delta h(\varrho w_u^2 + p), \Delta h\varrho w_u H_R]$;

$L[0, -\Delta h\varrho(w_u - r\omega)^2 \frac{\partial r}{\partial m} - p\frac{\partial(r\Delta h)}{\partial m}, \varrho\Delta h w_m(w_u - 2r\omega)\frac{\partial r}{\partial m}, 0]$.

Zauważmy, że równania (5) nie mają w pełni postaci zachowawczej ze względu na różną od zera wartość wektora L (tak będzie też dla przepływów względnych w kartezjańskim układzie współrzędnych oraz dla większości krzywoliniowych układów współrzędnych niekoniecznie w przepływie względnym).

We wszystkich przypadkach przy zastosowaniu powyższych równań do budowy schematów różnicowych zachowana jest masa i energia, natomiast nie wszystkie składowe pędu podlegają pełnemu zachowaniu na siatce różnicowej. Np. dla przepływu względnego w kartezjańskim lub cylindrycznym układzie współrzędnych zachowana będzie na siatce różnicowej składowa pędu w kierunku $x_3(z)$, natomiast z (5) wynika, że dla merydionalnego układu współrzędnych nie zachowane są w sposób pełny obie składowe pędu.

Dyskusję różnych aspektów diwergentnej postaci równań zachowania masy, pędu i energii w krzywoliniowych układach współrzędnych zawierają opracowania [2,3,4,5,6].

3. Równania potencjału prędkości

Przepływy w palisadach można analizować także w przybliżeniu potencjalnym. Wtedy fundamentalny układ równań sprowadza się do równania potencjału prędkości ($\bar{c} = \nabla \phi$)

$$\nabla(\nabla\phi \; \nabla\phi)\nabla\phi - a^2 \nabla^2 \phi = 0, \tag{6}$$

równania Bernoulliego oraz związków charakterystycznych dla procesów izentropowych.

W kartezjańskim układzie współrzędnych równanie (6) zapisuje się w postaci:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right) - \frac{1}{a^2} c_i c_j \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} = 0$$

Historycznie rzecz biorąc pierwsze skuteczne metody numerycznego rozwiązania zagadnienia mieszanego dotyczą liniowego równania potencjału otrzymanego z (6) po zastosowaniu teorii małych zaburzeń dla opływu potencjalnego profilu. W 1971 r. Murman i Cole [7] zaproponowali zróżnicowaną w zależności od rodzaju przepływu postać operatorów różnicowych do dyskusji równania

$$\left[K - (k+1)\frac{\partial \phi}{\partial x}\right]\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0, \tag{7}$$

gdzie:

K – parametr podobieństwa ($K \sim \delta^{-2/3}$), k – wykładnik izentropowy,

δ – liczba charakteryzująca grubość profilu.

Od tej pory obserwujemy szybki rozwój tego typu postępowania do rozwiązania zarówno liniowych, jak i pełnych równań potencjału prędkości. Główną uwagę jak dotąd skupiano na badaniu prostego zadania dla pojedynczych profilów [np. 1.8.9.10]. W ostatnim okresie czasu zaznacza się także mocniejsze zainteresowanie problematyką palisadową [np. 11,12,13].

Przy rozpatrywaniu przepływów palisadowych należy brać pod uwagę pełne równanie potencjału. Istota stosowanych operatorów różnicowych wymaga wyodrębnienia kierunku przepływu. To z kolei wymusza przyjęcie odpowiedniego układu współrzędnych, ułatwiającego konstrukcję operatorów różnicowych oraz prawidłowe określenia obszarów poddźwiękowych i naddźwiękowych. Trzy następujące propozycje są godne uwagi.

W [12] do analizy przepływu w palisadach przyjęto krzywoliniowy układ współrzędnych wyznaczony przez linie prądu i linie stałych wartości potencjału dla przepływu nieściśliwego, stosując odpowiednie przekształcenie komforemne.

Dodge [11] rozpatruje równania potencjału dla opływu palisady strugą o wysokości Δh przyjmując lokalny układ współrzednych naturalnych s,n. W efekcie uzyskuje:

$$\left[1-\left(\frac{c_s}{a^2}\right)^2\right]\frac{1}{H_s^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial s^2}-\frac{2\,c_s\,c_n}{H_s\,H_n a^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial s\partial n}+\left(1-\frac{c_n^2}{a^2}\right)\frac{1}{H_n^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial n^2}+$$

$$+\frac{1}{H_s}K_1\frac{\partial\phi}{\partial s}+\frac{1}{H_n}K_2\frac{\partial\phi}{\partial n}=0, \qquad (8)$$

gdzie:

$$K_1=\frac{c_n^2}{a^2H_n^2}\frac{\partial H_n}{\partial s}+\frac{c_s^2}{a^2H_s^2}\frac{\partial H_s}{\partial s}+\frac{1}{H_sH_n}\frac{\partial H_n}{\partial s}-\frac{1}{H_s^2}\frac{\partial H_s}{\partial s}$$

$$+\frac{1}{H_s\Delta h}\frac{\partial\Delta h}{\partial s}$$

$$K_2=\frac{c_s^2}{a^2H_s^2}\frac{\partial H_s}{\partial n}+\frac{c_n^2}{a^2H_n^2}\frac{\partial H_n}{\partial n}+\frac{1}{H_3H_n}\frac{\partial H_s}{\partial n}-\frac{1}{H_n^2}\frac{\partial H_n}{\partial n}+\frac{1}{H_n\Delta h}\frac{\partial\Delta h}{\partial n}$$

Liczby H_s i H_n ustala się z zależności:

$$H_s=\left.\frac{dl}{ds}\right|_{n\,=\,\text{idem}},\quad H_n=\left.\frac{dl}{dn}\right|_{s\,=\,\text{idem}},\qquad dl=\sqrt{H_s^2d_s^2+H_n^2d_n^2}$$

Lokalny naturalny układ współrzędnych wykorzystje także Jameson [1, 13], przedstawiając równanie potencjału prędkości dla przepływu płaskiego w postaci:

$$\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)\phi_{ss}+\phi_{nn}=0, \qquad (9)$$

gdzie:

$$\phi_{ss}=\frac{1}{c^2}\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+2\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}+\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right]$$

$$\phi_{nn}=\frac{1}{c^2}\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}-2\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}+\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right]$$

W [14] Dodge proponuje przyjąć układ współrzednych zgodny z przebiegiem charakterystyk w obszarze przepływu naddźwiękowego. W tym celu przedstawiono równanie potencjału dla dowolnego nieortogonalnego układu współrzędnych o wersorach $\bar{e}_1$ i $\bar{e}_2$, tworzących odpowiednio z osią x kąt β_1 i z osią y kąt β_2.

Do budowy różnicowych operatorów zachowawczych wykorzystuje się równanie potencjału w postaci diwergentnej:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\varrho\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\varrho\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)=0 \tag{10}$$

Przedstawione sposoby postępowania nie wyczerpują rzecz jasna wszystkich możliwości określenia postaci równań zachowania oraz układów współrzędnych [np. 15]. Wydaje się przy tym celowe, aby w badaniach przepływów transonicznych w palisadach profilów metodami relaksacyjnymi wykorzystać w pełni doświadczenia uzyskane przy rozwiązywaniu dwu- i trójwymiarowych przepływów wokół płatów lotniczych.

4. Metody rozwiązywania pomocniczego zadania początkowo-brzegowego

4.1 Schematy różnicowe

Interesować nas będzie rozwiązanie zadania prostego palisad łopatkowych [4,6,16,17,18,19,20,21,22].

Po scałkowaniu układu (1) w przedziale $t^j - t^{j+1}$ otrzymujemy:

$$\int_V F^{j+1}\,dV - \int_V F^j\,dV = -\int_{t^j}^{t^{j+1}} dt \oint G\,dS \tag{11}$$

Jeżeli przyjąć definicje:

$$\Delta V\,\hat{F}^j_{\{m_i\}} = \int_V F^j dV, \quad \oint G\,dS = \sum_{\alpha=1}^{k} (\hat{G}\,\Delta S)_{\{m_i\}_\alpha}, \tag{12}$$

to (11) można sprowadzić do następującego ogólnego schematu różnicowego

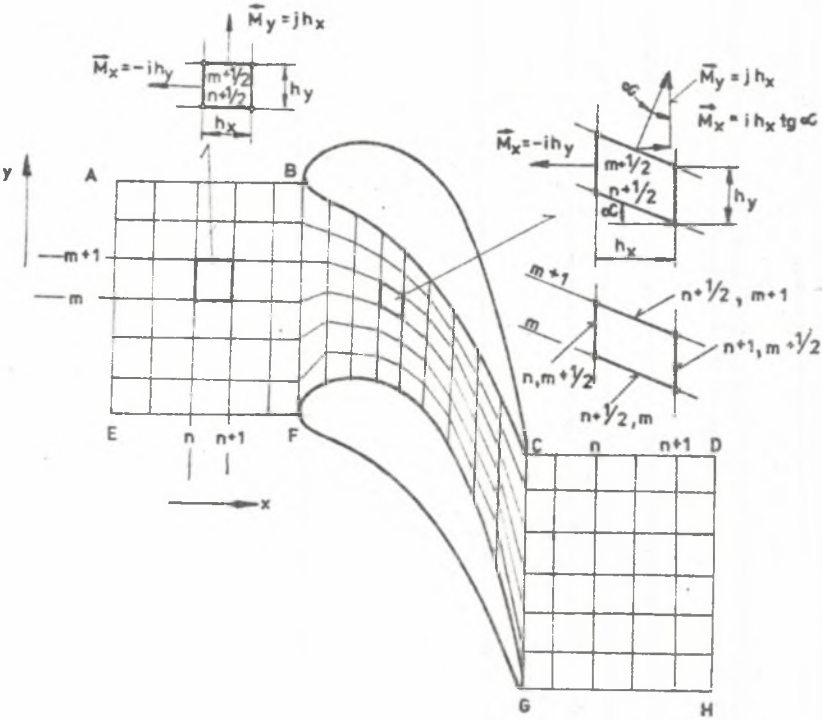
$$\hat{F}^{j+1}_{\{m_i\}} = \hat{F}^{j+1}_{\{m_i\}} - \int_{t^j}^{t^{j+1}} dt\,\frac{1}{\Delta t}\sum_{\alpha=1}^{k} (\hat{G}\,\Delta S)_{\{m_i\}_\alpha}, \tag{13}$$

gdzie:

$\hat{F}$, $\hat{G}$ – odpowiednio uśrednione wartości w przedziale Δt i na powierzchni ΔS, $\{m_i\}$ – indeks i-tej komórki o objętości ΔV, k – liczba powierzchni ΔS ograniczających ΔV. Z (13) łatwo uzyskać ogólny schemat dla przepływu dwuwymiarowego, przyjmując $V = \Delta h\, dA$. Zauważmy, że ten sam schemat otrzymujemy z równań typu (5) po scałkowaniu ich po komórce czasowo-przestrzennej $\Delta V \; \Delta t$. Przyjmując konkretne układy współrzednych, różne postacie komórek oraz definiując strumienie $\hat{F} \Delta S$ (lub $\hat{G} \Delta l$) otrzymujemy różne schematy różnicowe. Omówimy niektóre z nich, najczęściej stosowane w obliczaniach palisad łopatkowych.

a. Algorytm GODUNOWA i współpracowników [4, 6, 23]

W rozpatrywanym algorytmie wartości strumienia poszczególnych wielkości na powierzchniach (konturach) ograniczających elementarną komórke obliczeniową wyznacza się w oparciu o rozwiązanie jednowymiarowego zadania Riemanna [np. 4]. Dla siatki pokazanej na rys. 3 schemat różnicowy dla gęstości (pierwszej składowej wektora F) będzie miał postać:



Rys.3

$$\rho^{j+1}_{n+1/2,\, m+1/2} = \rho^{j}_{n+1/2,\, m+1/2} + \frac{\Delta t}{h_x}\left[(RU)_{n,\, m+1/2} - (RU)_{n+1,\, m+1/2}\right]$$

$$- \frac{\Delta t}{h_y}\left\{\left[(RU)_{n+1/2,\ m+1} - (RU)_{n+1/2,\ m}\right]tg\alpha - (RV)_{n+1/2,\ m+1} + (RV)_{n+1/2\ m}\right\}$$

gdzie:

R,U,V są wartościami gęstości oraz prędkości wzdłuż osi x i y, ustalonymi na konturach siatki i wyznaczonymi z rozwiązania początkowo-brzegowego zadania Riemanna. Podobnie zapisać można schematy dla pozostałych składowych F. Zauważmy przy tym, że obliczenia według tego schematu wymagają wprowadzenia siatki obliczeniowej i geometrycznej (rys.3).Algorytm jest stabilny przy spełnieniu warunku Couranta-Friedriechsa-Lewy'ego (CFL)[23,24] w postaci:

$$\Delta t \leq \frac{\tau_x\ \tau_y}{\tau_x + \tau_y} \tag{14}$$

$$\tau_x = \frac{h_x}{\max(u + a,\ a - u)}, \qquad \tau_y = \frac{h_y}{\max(v + a,\ a - v)}$$

u,v prędkości: w kierunku osi x,y, a - lokalna prędkość dźwięku.Pewne szczegółowe aspekty obliczeniowe dotyczące zastosowania rozpatrywanego algorytmu przedstawiono w [25, 26],a także w artykule [27] niniejszego zbioru prac.

b. Procedury McDonalda [28] i VKI [20, 29]

W budowie konkretnych algorytmów wykorzystuje się zazwyczaj siatkę pokazaną na rys.4. Charakterystyczne wielkości na brzegach poszczególnych oczek określa się jako średnią między ich wartościami w punktach węzłowych. Dla ilustracji zastosowano to założenie do pierwszego z równań (3)(biorąc przy tym pod uwagę (13), oznaczenia dla poszczególnych punktów siatki - rys.4).

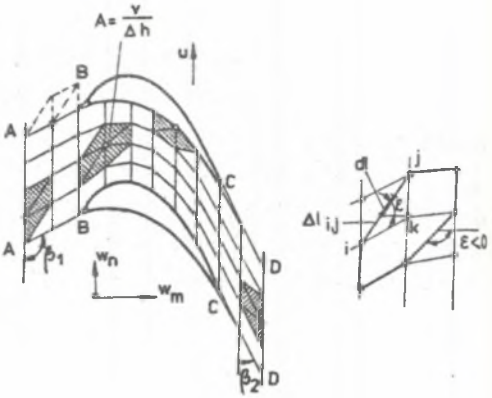
$$\varrho_k^{s+1} = \varrho_k^s + \frac{1}{2}\sum\left\{\varrho_i\ w_{mi}\ \sin\ \varepsilon_{ij} - w_{ui}\ \cos\ \varepsilon_{ij}\ \Delta h_i\ + \right.$$

$$\left. + \varrho_j\ (w_{mj}\ \sin\ \varepsilon_{ij} - w_{uj}\ \cos\ \varepsilon_{ij})\ \Delta h_j\right\}\ \Delta l_{ij}$$

Założenie liniowej zmienności poszczególnych składowych wektora G_1 wzdłuż ustalonych odcinków obwodu oczka implikuje najprostszą, możliwą do przyjęcia procedurę wyznaczania całek $\oint G_1\ S$, prowadzącą w efekcie do odpowiednio uogólnionego na przypadek skończonych powierzchni schematu Eulera. Dla zabezpieczenia zbieżności należy wprowadzić odpowiednie relacje wygładzające,np. w oparciu o idee Laxa [24].

Mimo przyjęcia w założeniach metody przepływu bezwirowego przedstawione w [28] wyniki obliczeń wskazują na dostateczną odpowiedniość (zwłaszcza w obszarze przepływów dodźwiękowych) rezultatów obliczeń z danymi eksperymentalnymi.

W [20, 29] opisano pewne rozwinięcie algorytmu McDonalda polegające na wprowadzeniu dodatkowego członu, który dla przepływu ustalonego eliminuje wpływ członu uśredniającego. Z dyskusji nad zagadnieniami stabilności schematu wprowadza się wnioski dotyczące lokalizacji powierzchni tłumienia [20]. Pewną modyfikację omawianej propozycji przedstawiono i sprawdzono z bardzo dobrym skutkiem w [19, 30].



Rys.4

c. Schematy McCormacka [31]

W pierwszym etapie schematu omówionego w [31] definiuje się dla równań typu (1) (przepływ dwuwymiarowy, rys.5) następujące wielkości:

$$
L_n(\Delta t) = \begin{cases} \overline{F}^{j+1/2}_{m,n} = F^j_{m,n} - \dfrac{\Delta t}{A_{m,n}}\left(G^j_{m,n} L_{A3} + G^j_{m,n-1} L_{A1}\right) \\[2ex] F^{j+1/2}_{m,n} = \dfrac{1}{2}\left[F^j_{m,n} + \overline{F}^{j+1/2}_{m,n} - \dfrac{\Delta t}{A_{m,n}}\left(\overline{G}^{j+1/2}_{m,n+1} L_{A3} + \overline{G}^{j+1/2}_{m,n} L_{A1}\right)\right] \end{cases}
$$

Za ich pomocą określa sie poszukiwane wartości składowych wektora F w czasie $t + \Delta t$

$$
L_m(\Delta t) = \begin{cases} \overline{F}^{j+1}_{m,n} = F^{j+1/2}_{m,n} - \dfrac{\Delta t}{A_{m,n}}\left(G^{j+1/2}_{m,n} L_{A4} + G^{j+1/2}_{m-1,n} L_{A2}\right) \\[2ex] F^{j+1}_{m,n} = \dfrac{1}{2}\left[F^{j+1/2}_{m,n} + \overline{F}^{j+1}_{m,n} - \dfrac{\Delta t}{A_{m,n}}\left(\overline{G}^{j+1}_{m+1,n} L_{A4} + \overline{G}^{j+1}_{m,n} L_{A2}\right)\right] \end{cases}
$$

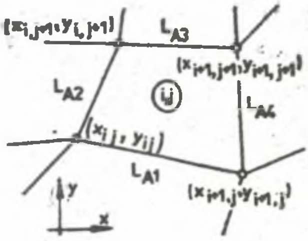
W ogólnym przypadku operatory $L_n(\Delta t)$ i $L_m(\Delta t)$ nie są przemienne, dlatego też algorytm

$$
F^{j+1}_{m,n} = [L_n(\Delta t)\, L_m(\Delta t)]\, F^j_{m,n}
$$

zapewnia dokładność rzędu pierwszego względem kroku Δt.
Niedogodność tę można usunąć rozpatrując inne sekwencje operatorów L_n, L_m. Prowadzenie np. obliczeń według schematu

$L_n(\Delta t)\ L_m(\Delta t)\ L_m(\Delta t)\ L_n(\Delta t)$

$L_n(\Delta t)\ L_m(2\ \Delta t)\ L_n(\Delta t)$



Rys.5

prowadzi już do dokładności drugiego rzędu przy przechodzeniu od F^j do F^{j+2}. Operatory $L_n(\Delta t)$ i $L_m(\Delta t)$ są stabilne dla przepływu nielepkiego przy spełnieniu kryterium (C F L). Schemat McCormacka w sformułowaniu do równań typu (5) był między innymi wykorzystywany do obliczeń przepływu na osiowosymetrycznej powierzchni prądu po uprzednim przekształceniu fizycznego obszaru przepływu do kanonicznego obszaru prostokątnego [32]. Rozwinięcie rozpatrywanej procedury dla przepływów lepkich przedstawiono w [33].

d. <u>Dwustopniowa procedura Laxa-Wendroffa [24 . 34]</u>

Biorąc pod uwagę równanie (4) dla przepływu dwuwymiarowego otrzymujemy:

(i) pierwszy krok czasowy (schemat Laxa):

$$A^{n+1}_{i,j} = \frac{1}{4}(A^n_{i+1,j} + A^n_{i-1,j} + A^n_{i,j+1} + A^n_{i,j-1})$$

$$\Delta t\left(\frac{B^n_{i+1} - B^n_{i-1,j}}{2\ \Delta x} + \frac{C^n_{i,j+1} - C^n_{i,j-1}}{2\,\Delta y}\right),$$

(ii) drugi krok czasowy:

$$A^{n+2}_{i,j} = A^{n+1}_{i,j} - 2\ \Delta t\ \frac{B^{n+1}_{i+1} - B^{n+1}_{i-1,j}}{2\ \Delta x} + \frac{C^{n+1}_{i,j+1} - C^{n+1}_{i,j-1}}{2\ \Delta y} + O(\Delta t^2, h^2)$$

Schemat ten był modyfikowany przez wielu badaczy [np. 35, 36] przez wprowadzenie połówkowych kroków czasowych i przestrzennych. W [37] rozpatrzono zastosowanie omawianej procedury z modyfikacją Lapidusa [38] (schemat uzupełnia się członami hipotetycznej lepkości typu Rusanova [39]) do wyznaczenia przepływu transonicznego przez palisadę profilów łopatkowych.

c. <u>Metoda Dentona [18]</u>

Denton dla przepływu dwuwymiarowego rozpatruje równanie zachowania dla elementarnej objętości ΔV w postaci:

- równania zachowania masy

$$\Delta t \sum (\varrho u d\ S_1 + \varrho v\ dS_2) = \Delta V\ \Delta \varrho$$

-pędu w kierunku x

$$\Delta t\sum[(p + \varrho u^2)d S_1 + \varrho u v dS_2] = \Delta V\Delta(\varrho u)$$

-pędu w kierunku y

$$\Delta t\sum[\varrho u v dS_1 + (p + \varrho v^2)dS_2] = \Delta V \Delta(\varrho v)$$

-energii

$$\Delta t\sum(\varrho u h_o dS_1 + \varrho v h_o dS_2) = \Delta V\Delta (\varrho e),$$

gdzie:

u, v - składowe predkości odpowiednio w kierunku x i y;

dS_1, dS_2 - rzuty powierzchni bocznych oczek na kierunek x i y;

e - energia wewnętrzna, h_o - entalpia spiętrzynkowa.

Równania zachowania uzupełnia równanie stanu

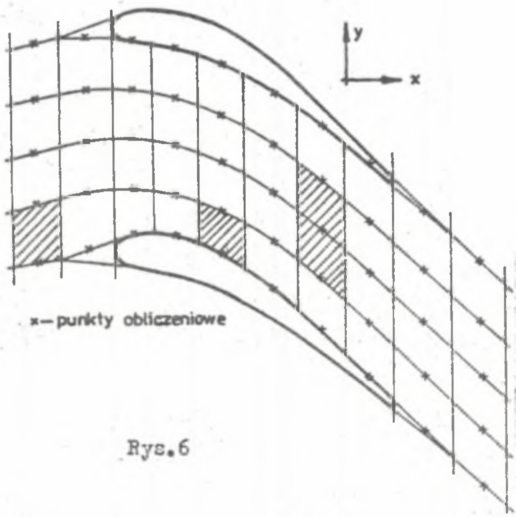
$$p = \varrho RT = \varrho R\left(e - \frac{1}{2} c^2\right) c_v$$

lub w przypadku h_o = idem

$$p = \varrho RT = \varrho R\left(h_o - \frac{1}{2} c^2\right) c_p$$

c_v, c_p - ciepła właściwe, $c^2 = u^2 + v^2$

Siatkę różnicową tworzą przybliżone linie prądu oraz linie równoległe do osi y (rys.6). Ogólnie rzecz biorąc charakterystyczną cechą metody jest założenie, że strumienie masy i pędu przez ściankę leżącą wzdłuż linii prądu można określić przez parametry odpowiadające punktowi obliczeniowemu położonemu w jej centrum. Strumienie poprzez powierzchnię leżącą wzdłuż x =idem określa się natomiast przyjmując interpolację poszczególnych



Rys.6

wielkości wzdłuż linii prądu(wsteczny iloraz różnicowy dla gradientów masy i pędu oraz przedni dla gradientu ciśnienia). Denton proponuje następującą kolejność rozwiązania układu równań **zachowania**:
równania ciągłości- obliczenie ciśnienia - równanie pędu. Po ustaleniu gęstości we wszystkich punktach siatki wykorzystuje się te wielkości z wcześniej określonymi wartościami prędkości do wyznaczania ciśnienia w każdym punkcie. Następnie tak obliczone wartości ciśnienia oraz znane już

wartości gęstości i prędkości służą do rozwiązania równań pędu w każdym punkcie.
Metoda Dentona jest jedną z szybszych metod określania ustalonego przepływu transonicznego. Dla około 400 punktów węzłowych otrzymuje sie rezultaty po 500 - 800 kroków czasowych.

4.2. Wrunki początkowe i brzegowe.

Ostatecznego zamknięcia różnicowego zadania początkowo-brzegowego dokonujemy określając warunki brzegowe i początkowe. Dla konkretnego obszaru przepływu zaznaczonego na rys.3 należy ustalić wartości brzegowe na odcinkach AE, DH, AB, EF, CD, GH oraz wzdłuż konturu profilu BC i FG. Dla jednorodnych warunków przepływu wzdłuż AE i DM analiza jednowymiarowego nieustalonego przepływu prowadzi do następujących współczynników kątowych charakterystyk $\lambda = \frac{dx}{dt}$ [6,19,40]:

$$\lambda_1 = u, \quad \lambda_2 = u - a, \quad \lambda_3 = u + a \quad \lambda_4 = u \tag{15}$$

Równania ruchu wzdłuż poszczególnych charakterystyk dla rozważonego przypadku przyjmują postać:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial x}\right]_1 v = 0, \quad \left[\frac{\partial}{\partial t} + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial x}\right]_2 J_- = 0$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \lambda_3 \frac{\partial}{\partial x}\right]_3 J_+ = 0, \quad \left[\frac{\partial}{\partial t} + \lambda_4 \frac{\partial}{\partial x}\right]_4 p - a^2\left[\frac{\partial}{\partial t} + \lambda_4 \frac{\partial}{\partial x}\right]_4 \varrho = 0, \tag{16}$$

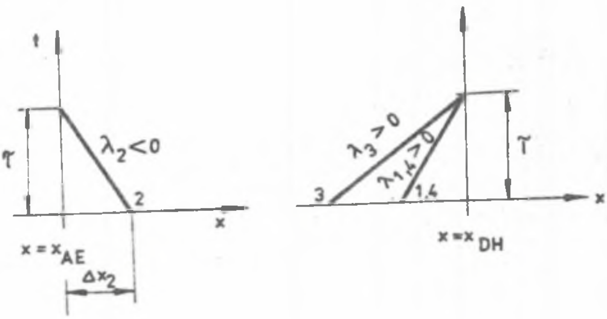
gdzie:

$J_- = u - \frac{2}{k-1}a \quad J_+ = u + \frac{2}{k-1}a$ - niezmienniki Riemanna,

$[\ ]_i$ - operatory różniczkowamia wzdłuż poszczególnych charakterystyk

Z (16) wynika, że dla $u > a$ w przekroju wlotowym AE wszystkie współczynniki λ są dodatnie, co oznacza, że zaburzenia powstałe w obszarze przepływu nie mogą zmieniać wartości parametrów na linii $x = x_{AE}$. W tym wiec przypadku określone (zadane) wartości u, v, p, ϱ są niezmienne dla wszystkich kroków czasowych. Dla $u < a$ (najczęściej występujący przypadek dla transonicznych przepływów ekspansyjnych) $\lambda_2 < 0$ i do przekroju wlotowego w czasie $t_0 + \Delta t$ docierają wzdłuż charakterystyki określonej przez λ_2 zaburzenia powstałe w obszarze obliczeniowym $(x > x_{AE})$ w czasie $t = t_0$ (rys. 7) W warunkach brzegowych należy teraz uwzględnić drugą z relacji (16), to znaczy

$$J_- = u - \frac{2a}{k-1} = \left(u - \frac{2a}{k-1}\right)_2 \tag{17}$$



Rys.7

Zadając ponadto ciśnienie spoczynkowe p_0 lub gęstość w punkcie spiętrzenia ϱ_0, entalpię całkowitą h_0 oraz kąt wlotowy β_1 obliczamy w SE poszukiwane wartości p, ϱ, u, v, uwzględniając (17) oraz

$$\frac{k}{k-1}\, p/\varrho + \frac{u^2+v^2}{a} = h_0 = \text{idem}, \qquad p/\varrho^k = p_0/\varrho_0^k$$

W przekroju wylotowym DH rozróżnić należy takie dwa przypadki:

a) u > a. Wszystkie współczynniki są dodatnie, co oznacza, że parametry termodynamiczne i kinematyczne w DH w czasie $t_0 + \Delta t$ związane są z odpowiednimi parametrami z obszaru przepływu ($x < x_{DH}$, $t = t_0$).

b) u < a. Współczynnik λ_2 jest ujemny, pozostałe dodatnie (rys.7). Przy formułowaniu warunku brzegowego należy więc wykorzystać pierwszy, trzeci i czwarty ze związków (16) oraz zadać wartość jedną z poszukiwanych wielkości. Najczęściej zadajemy w przekroju DH ciśnienie statyczne $p = p_{DH}$.

Wzdłuż odcinków AB, EF oraz CD i GH ustalamy warunki wykorzystując fakt okresowości przepływu przez palisady łopatkowe. Czynimy to analogicznie jak w przypadku eliptycznego zadania brzegowego. Na BC i FG składowa normalna prędkości względnej do konturu profilu jest równa zero.

Warunek początkowy w rozpatrywanym zadaniu można przyjąć w różny sposób. Dla skrócenia czasu obliczeń należałoby dla t = 0 przyjąć w całym obszarze przepływu parametry zbliżone do rozwiązania końcowego. Jeżeli jest to możliwe, można np. skorzystać z rozwiązania jednowymiarowego lub wykorzystać rezultaty pomiarów uzyskane przez zastosowanie metody analogii hydrogazodynamicznej.

5. Ogólna charakterystyka operatorów różnicowych dla równania potencjału.

Równanie (7)

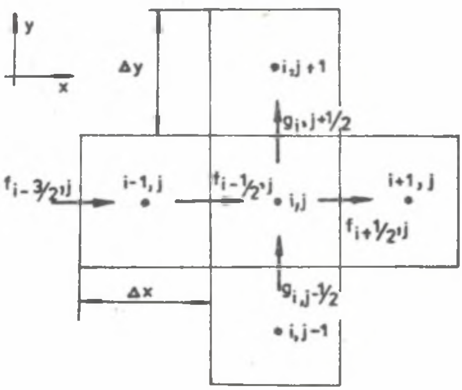
$$A \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \tag{7a}$$

po wprowadzeniu oznaczeń: $f = K \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{k+1}{2}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2$, $g = \frac{\partial \phi}{\partial y}$

przekształca się do postaci gradientowej:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} = 0 \tag{7b}$$

Do jego rozwiązania zaproponowano w [7,13] następującą aproksymacje dla f i g (rys.8)



Rys.8

$$f_{i+1/2,j} = k\left(\frac{\phi_{2+1,j} - \phi_{i,j}}{\Delta x}\right) - \frac{k+1}{2}\left(\frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{i,j}}{\Delta x}\right)^2$$

$$g_{i,j+1/2} = \frac{\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j}}{\Delta y}$$

Równanie (7 a) jest typu eliptycznego dla $A > 0$ i hiperbolicznego dla $A < 0$. Należy więc określić sposób zmiany równania różnicowego dla (7b) w zależności od wartości A. Można tego dokonać wprowadzając funkcje:

$$\mu_{i,j} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \text{ jeżeli } A_{ij} \begin{Bmatrix} >0 \\ <0 \end{Bmatrix}$$

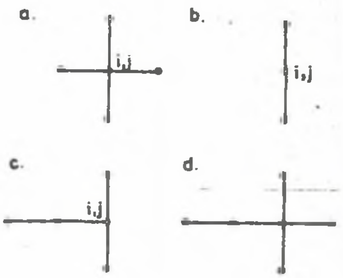
$$A_{ij} = K - (k+1)\frac{\phi_{2+1,j} - \phi_{1-1,j}}{2\,\Delta x}$$

Wykorzystując to określenie uzyskujemy następujący analogon różnicowy równania (8b)

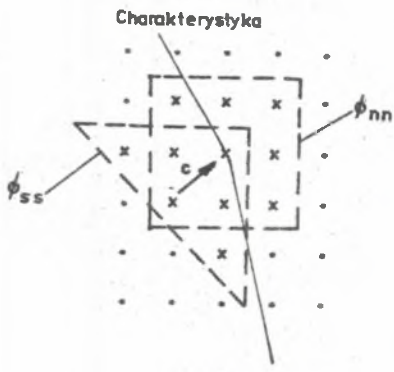
$$(1-\mu_{i,j})\frac{f_{i+1/2,j}-f_{i-1/2,j}}{\Delta x}+\mu_{i-1,j}\frac{f_{i-1/2,j}-f_{i-3/2,j}}{\Delta x}$$

$$+\frac{g_{i,j+1/2}-g_{i,j-1/2}}{\Delta y}=0 \qquad (18)$$

Drogą wyboru jednej z czterech kombinacji $\mu_{i,j}$ i $\mu_{i-1,j}$ dostaje się z (18) równanie różnicowe odpowiadające obszarowi dodźwiękowemu ($\mu_{i,j}=0$, $\mu_{i-1,j}=0$, rys.9a), linii dźwięku ($\mu_{i,j}=1$, $\mu_{i-1,j}=0$, rys.9b), obszarowi naddźwiękowemu ($\mu_{i,j}=1$, $\mu_{i-1,j}=1$, rys.9c) oraz fali uderzeniowej ($\mu_{i,j}=0$, $\mu_{i-1,j}=1$, rys.9d). W oparciu o ten schemat postępowania przedstawiono w[41] rozwiązanie zadania palisadowego dla cienkich profili.



Rys.9



Rys.10

Dodge [11] proponuje do rozwiązania równania (8) zastosować ilorazy różnicowe podane przez Stegera i Lomaxa [8]:

- obszar dodźwiękowy

$$\frac{\partial \phi}{\partial s}=\frac{1}{2}(\phi_{n,s+1}-\phi_{n,s-1})/\Delta s;\quad \frac{\partial \phi}{\partial n}=\frac{1}{2}(\phi_{n+1,s}-\phi_{n-1,s})/\Delta n;$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial s\partial n}=\frac{1}{4}(\phi_{n+1,s+1}+\phi_{n-1,s-1}-\phi_{n+1,s-1}-\phi_{n-1,s+1})/\Delta s\ \Delta n;$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial s^2}=(\phi_{n,s+1}-2\phi_{n,s}+\phi_{n,s-1})/\Delta s^2;\quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial n^2}=(\phi_{n+1,s}-2\phi_{n,s}+\phi_{n-1,s})/\Delta n^2$$

- obszar naddźwiękowy

$$\frac{\partial \phi}{\partial s} = \frac{1}{2}\left(5\,\phi_{n,s-1} - 8\,\phi_{n,s-2} + 3\,\phi_{n,s-3}\right)/\Delta s$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial s \partial n} = \frac{1}{4}\left[3(\phi_{n+1,s} - \phi_{n-1,s}) - 4(\phi_{n+1,s-1} - \phi_{n-1,s-1}) + (\phi_{n+1,s-2} -\right.$$

$$\left. - \phi_{n-1,s-1}\right)/\Delta s\ \Delta n$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial s^2} = 2\left(\phi_{n,s} - 5\,\phi_{n,s-1} + 4\,\phi_{n,s-2} - \phi_{n,s-3}\right)/\Delta s^2$$

Jameson [1,13] dla rozwiązania równania (9) przyjął schemat różnicowy (obrotowy) uzgadniany każdorazowo z lokalnym kierunkiem przepływu (rys.10). W obszarze dodźwiękowym dla ϕ_{ss} i ϕ_{nn} wykorzystuje się centralne ilorazy różnicowe, natomiast dla obszaru naddźwiękowego ϕ_{nn} oblicza się analogicznie a dla aproksymacji drugich pochodnych wchodzących w ϕ_{ss} używa się ilorazów wstecznych:

$$\phi_{xx} = \frac{\phi_{ij} - 2\,\phi_{i-1,j} + \phi_{i-2,j}}{\Delta x^2}, \qquad \phi_{xy} = \frac{\phi_{ij} - \phi_{i-1,j} - \phi_{i,j-1} + \phi_{i-1,j-1}}{\Delta x\ \Delta y}$$

$$\phi_{yy} = \frac{\phi_{ij} - 2\,\phi_{i,j-1} + \phi_{i,j-2}}{\Delta y^2}$$

Przykłady rozwiązania pełnego równania potencjału dla kanału międzyłopatkowego, zostały przedstawione między innymi w opracowaniach [11, 12 14].

6. Uwagi końcowe

a. Obok przedstawionych dwóch podstawowych grup metod istotne znaczenie w badaniach przepływu potencjalnego opisanego równaniami różniczkowymi typu hiperbolicznego ma metoda charakterystyk. Z punktu widzenia przepływów transonicznych szczególne znaczenie posiadają te numeryczne wersje metody, które wykorzystują procedury ustalenia w czasie [np.42]. Podstawową zaletą metody jest drugorząd dokładności, wadą natomiast brak możliwości rozpatrywania silnych zjawisk falowych.
Interesująco przedstawia się także zastosowanie metody elementów skończonych do badania przepływów transonicznych [np. 43, 44]. Warte odnotowania są także procedury przedstawione w [45, 46].

b. Obecny stan rozwoju metod kolejnych kroków czasowych pozwala analizować zarówno płaskie, jak i przestrzenne przepływy (zarówno zewnętrzne jak i wewnętrzne). Należy oczekiwać, że dla uzyskania dokładności drugiego rzędu po czasie rozwijać się będą metody oparte na schematach dwustopniowych [np.47].

c. Odnotowuje się ciągły postęp metodologiczny w analizie pomocniczego zadania początkowo-brzegowego dla przepływów płynów lepkich. Dotyczy to zwłaszcza przepływów zewnętrznych [np. 1, 33, 48].

d. Porównanie metod ustalania z metodami relaksacyjnymi przemawia za tymi pierwszymi. Taką opinię wyraża wiele badaczy [np. 20]. Metody relaksacji spełniają dziś istotną rolę w badaniach transonicznych przepływów zewnętrznych. Stanowić będą zapewne także ważny instrument badawczy w analizie potencjonalnych przepływów, zwłaszcza po zastosowaniu szybkich metod iteracyjnych. Mało prawdopodobne jest zastosowanie w najbliższym okresie czasu metod relaksacyjnych do rozwiązania przestrzennych zadań palisadowych.

LITERATURA

[1] Čislennyje metody w dinamike židkostiej. Red.G.Wirc, Z.Smolderen. Izd. Mir, Moskwa 1981.

[2] Sedov L.I.: Mechanika spłosznoj sredy. Izd.Nauka, Moskwa 1973.

[3] Vinokur M.: Conservation Equations of Gasdynamics in Curvilinear Coordinate Systems. J.of Comp. Physics N2,14,1974, pp.105-125.

[4] Čislennyje rešenije mnogomernych zadač gazowoj dinamiki. Red.S.K. Godunov. Izd. Nauka, Moskwa 1976.

[5] Gnesin L.I., Grodzinski V.L., Sokolowskij G.A.: Urawnienia gazowoj dinamiki w nieinercialnoj deformirujemoj sistemie koordinat.Prikladnaja Mat. i Mechanika, Wyp.5, 42, 1978 s.841-847.

[6] Sokolowskij G.A., Gnesin W.I.: Rasčet smešannych tečenij w rešetkach turbomašin. Naukowa Dumka, Kijew 1981.

[7] Murman E.M., Cole J.D.: Calculation of Plane Steady Transonic Flows. AIAA Journal Vol.9, No 1, pp 114-121.

[8] Steger J., Lomax H.: Numerical Calculation of Transonic Flow about Two-Dimensional Airfoils by Relaxaktion Procedure. AIAA Journal 10, pp,49-54, 1972.

[9] Krupp J.,Murman E.M.: Computation of Transonic Flows Past Lifting Airfoils and Slender Bodies. AIAA Journal, 10, 1972, pp 880-886.

[10] J.Van Vooren, G.H.Huizing, A.van Essen: A Finite Difference Method for the Calculation of Transonic Flow about a Wing, Based on Small Pertubation Theory. NLR TR 81031U, 1981.

[11] Dodge P.R.: A Transonic Relaxation Method for Cascade Flow Systems. VKI Lecture Series 59 Part I, 1973.

[12] Lun T.S., Coulmy G.: Relaxation Solution for the Transonic Flow trough a Cascade. Proceedings of Transsonicum Symposium II, Springer Verlag, 1975.

[13] E.M.Murman: Computation of Transonic Potential Flows in Turbomachinery.Transonic Flow Problems in Turbomachinery.Ed.T.C.Adamson.M.F.Plat-

zer, pp. 115-137.

[14] Dodge P.R.: Enginiering Report of a Non-ortogonal Numerical Method for Solving Transonic Cascade Flow. VKI Lecture Sieries 59, 1973.

[15] Stedžer Dz., Lomeks G.: Metody obobščenija relaksacji w priłoženii k zadacom o transzwukowom tečenii. Čislenije metody w mechanike židkosti. Izd. Mir, Moskwa 1973.

[16] Gopalakrishman D., Bozzola R.: Fundamentals of Time-Marching Methods. Application to Turbomachinery Cascades. VKI Lect. Ser.59, Part I,1973

[17].Bogod A.B., Zamfort B.S., Iwanov M.J., Krajko A.N.: Ob ispolzowanij procesa ustanowlenija pri rešenij zadači stacjonarnowo obtekanija gazom rešetok profilej.Izw. AN SSSR, MŽG 4, 1974.

[18] Denton J.D.: A.Extension of the Finite Area Time-Marching Method of Three Dimension.V.K.I. Lecture Series 84, 1976.

[19] Lehthaus F.: Berechnung der transonischen Strömung durch obenen Turbinengitter nach dem Zeitschrift-Verfahren. VDI - Forschungsheft 586 ss: 5-24.

[20] Couston M.: Time Marching Finite Area Methods. VKI Lect.Ser.84,1976.

[21] Venillot J.P.: Calculation of the Quasi Three Dimensional Flow in a Turbomachine Blade Row. Trans of ASME, J. of Eng for Power,January 1977 pp. 53-82

[22] Singh K.: Computation of Transonic Flows on Blade Cascade with Shock and Boundary-Layer Interaction. GEC Journal of Science Technology Vol.3, No 3, 1981.

[23] Godunow S.K., Zabrodin A.W., Prokopow G.P.: Raznostnaja schema dla dwumiernych niestacjonarnych zadač gazowoj dinamiki i rasčet obtekanija s otošedsej udarnoj wołnoj. Ž.W.Mat. i Mat.Fiziki. T1, N6,1961 s.1020-1050.

[24] Potter D.: Metody obliczeniowe fizyki. Fizyka komputerowa PWN,W-wa 1982.

[25] Chmielniak T., Misiewicz A.: Przygotowanie algorytmu obliczeń dla zagadnienia osiowo-symetrycznego w zakresie przepływów transonicznych i dodźwiękowych. Opracowanie programu obliczeniowego dla płaskiego kanału międzyłopatkowego. Praca nieopublikowana. Instytut Maszyn i Urządzeń Energetycznych Politechnika Sląska, Gliwice 1983.

[26] Misiewicz A.: Porównanie różnych metod badań przepływów transonicznych. ZN Pol.Sl. S.Energetyka z.83 s.307-319, 1983.

[27] Chmielniak T., Misiewicz A.: Analiza procesu iteracyjnego w metodzie kolejnych stanów nieustalonych z wykorzystaniem schematu Godunowa. ZN Pol.Sl. s.Energetyka z.86, 1984.

[28] McDonald P.W.: The Computation of Transonic Flow Through Two-Dimensional Gas Turbine Cascades. ASME Paper No 71-GT-89,1971.

[29] Couston M., McDonald P.W., Smolderen I.: The Damping Surface Technique for Time-depended Solutions to Fluid Dynamic Problems. VKI TN 109, March 1975.

[30] Lehthaus F.: Transonic Inviscid Flow Calculations for Flow Past swept-back Plane Turbine Cascades. Proceedings of 7 th Conference on Fluid Machinery. Budapest, September 1083.

[31] MacCormack R.W., Paullay A.J.: Computational Efficiency Achieved by Time Splitting of Finite Difference Operators. AIAA Paper No 72-154

[32] Kurzrok J.W., Nowick A.S.: Transonic Flow Around Rotor Blade Elements.Trans. of ASME J.of Fluids Eng.December 1975, pp 598-607.

[33] MacCormack R.W.: A Rapid Solwer for Hyperbolic Systems of Equations Proceedings of the Fofth Int.Conf.on Numerical Methods in Fluid Dynamics. Ed.A.I. von de Vooren, P.J.Zandbergen Springer Verlag, Berlin - Heidelberg-New York 1976.

[34] Royč P.: Wyčislitelnaja gidrodinamika, Izd. Mir, Moskwa 1980.

[35] Rubin E.L., Bustein S.Z.: Difference Methods for the Inviscid and Viscous Equations of a Compressible Gas.J.of Computational Physics, Vol.2, 1967, pp. 178-196

[36] Singleton R.E.: Lax-Wendroff Difference Scheme Applied to the Transonic Airfoil Problem. AGARD Conference Proceedings No 35, September 1968.

[37] Petrovskij I.: Numerical Solution of Transonic Flow in a Straight Cascade. Proceedings of V Conference on Fluid Machinery, Budapest 1975, pp. 809-819.

[38] Lapidus A.: A Detached Shock Calculation by Second - Order Finite Difference. J.Comp.Physics, Vol.2, 1967, pp 154-177.

[39] Rusonov W.W.: Rasčet wzajmodejstwija niestacjonarnych udarnych wołn s predpjatstwijami. Žurn.Wyčisl.Mat. i Mat.Fizyki. T.1, N 2,1961, s.267-279.

[40] Gopalakrishnan S., Bozzola R.: Numerical Reprezentation of Inlet and Exit Boundary Conditions in Transient Cascade Flow.Trans of ASME J.of Eng.Power, October 1973. pp 340-344.

[41] K.Kozel, Polasek J., Vavrincova M.: Numerical Solution of Transonic Flow Through a Cascade with Slender Profiles. Lecture Not. in Physics 90. Sixth Int.Conf. on Numerical Methods in Fluid Dynamics. Ed.H. Cabannes M.Holt, V.Rusanov. Springer,Verlag Berlin - Heifelberg - New York 1979.

[42] Delaney R.A. Kavanagh P.: Transonic Flow Analysis in Axial Flow Turbomachinery Cascades by a Time-Dependent Method of Charakteristics. Trans.of ASME J.of Eng. for Power July 1976.

[43] Hirsh Ch.: Transonic Flow Calculation in Blade Rows with on Optimal Control-Finite Element Formulation. Bat-Sheva Seminar on Finite Elemente for Non-Elliptic Problems, Tel-Aviv 1977.

[44] Hirsh Ch.,Warzee G.: An Ortogonal Finite Element Method for Transonic Flow Calculations. Lecture Notes in Physics 90.Proceedins of 6 Int.Conf. on Numerical Methods in Fluid Dynamics. Springer Verlag, 1979.

[45] Bindon J.P., Carmichael A.D.: Stramline Curwature Analysis of Compressible and High Mach Number Cascade Flows. J.Mech.Eng. Science Vol. 13, N5, 1971 pp 344-357.

[46] Katsanis T.: Fortran Program for Calculating Transonic Velocities on Blade - to - Blade Sream Surface of a Turbomachine, NASA TN D-5427, 1965.

[47] Rizzi A., Bailey H.: Finite-Volume Solution of the Euler Equations for Steady Three-Dimensional Transonic Flow. Lecture Notes in Physics 59. Proceedings of the Fifth Conf.on Num.Methods in Fluid Dy-

namics. Ed A. I von Vooren, P.J. Zaudbergen. Springer Verlag 1976, pp. 347 - 352.

[48]. Deiwert G.S.: Recent Computation of Viscous Effect in Transonic Flow. Lecture Notes in Physics 59. Procedings of the Fifth Conf. on Num. Methods in Fluid Dynamics. Ed. A. I. von Vooren. P.J. Zandbergen, Springer Verlag 1976. pp. 159 - 164.

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ РЕШЕТОК
В ОБЛАСТИ ТРАНСЗВУКОГО ТЕЧЕНИЯ

Р е з ю м е

Даются обзор основных метод решения прямых задач обтекания лопаточных решеток трансзвуковым потоком. Прежне всего уделено внимание методом установления и методом решения уровнений потенциала скоростей.

METHODS FOR CALCULATING TRANSONIC FLOW
IN TURBOMACHINERY CASCADES

S u m m a r y

Review of Methods for calculating Transonic Flow through Blade Rows has been presented. Time Marching and Relaxation Methods have been discussed above all.